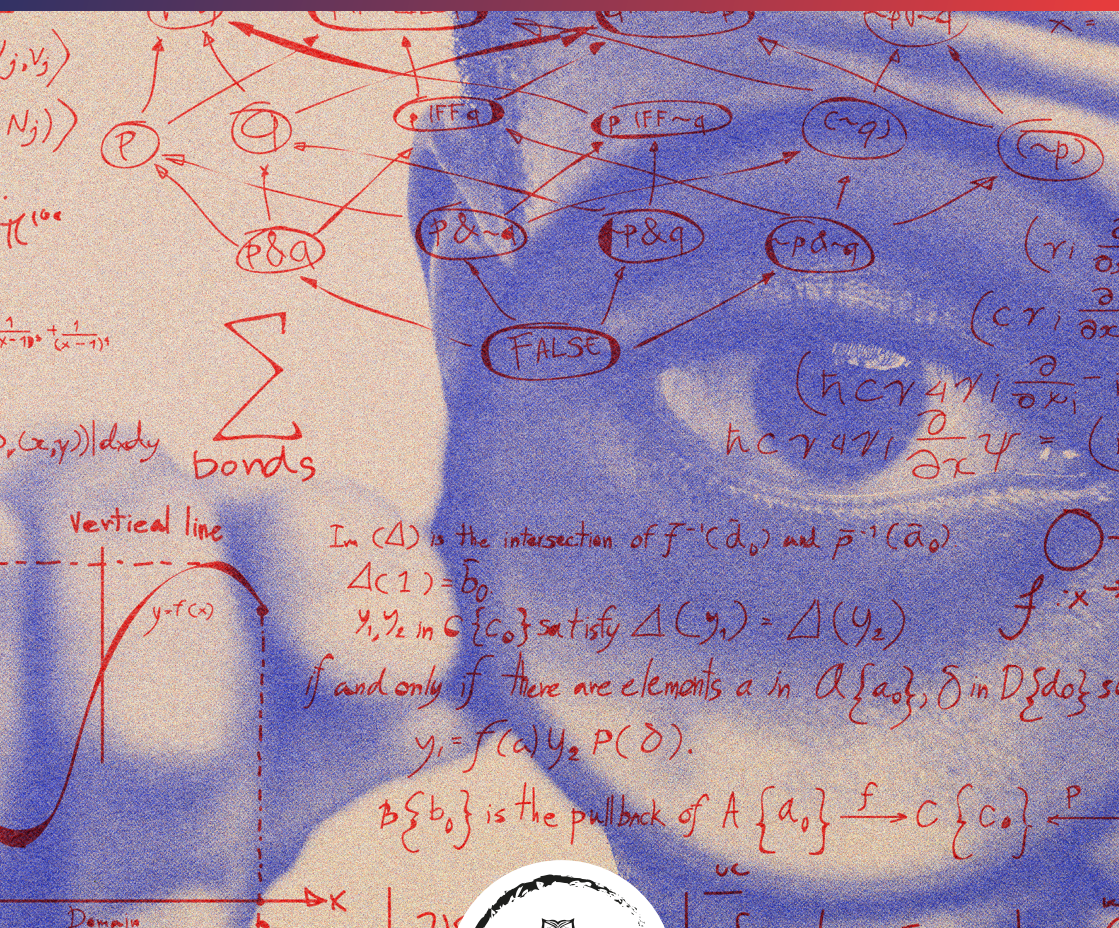


ECUACIONES DIFERENCIALES

VOL. VII



**Compendio de Matemáticas Volumen VII,
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Segunda Edición**

Edwin Dimitri Nieto Guerrero
Ambar Jamaly Guerrero Ochoa

Enero, 2026

ECUACIONES DIFERENCIALES

VOL. VII

AUTORES

INVESTIGADORES

Edwin Dimitri Nieto Guerrero

Máster Ingeniero de la Industria Textil

Universidad Central del Ecuador;

Quito, Ecuador;

✉ ednieto@uce.edu.ec

🆔 <https://orcid.org/0009-0000-8819-3393>

Ambar Jamaly Guerrero Ochoa

Magíster en Dirección de Empresas,

Mención en Gestión de Empresas de Servicios

Ingeniera de Petróleos

Universidad Central del Ecuador;

Quito, Ecuador;

🆔 <https://orcid.org/0000-0002-6872-1344>

ECUACIONES DIFERENCIALES

VOL. VII

REVISORES ACADÉMICOS

Alberto Rodríguez Rodríguez

Doctor en Ciencias Pedagógicas;
Doctorando en Docencia e Investigación;
Magíster en Ciencias de la Educación;
Licenciado en Matemáticas;
Docente de la carrera de Educación de la
Facultad de Ciencias Sociales;
Humanísticas y de la Educación de la
Universidad Estatal del Sur de Manabí;
Jipijapa, Ecuador

 <https://orcid.org/0000-0002-1238-0106>

Pedro Roberto Valdés Tamayo

Licenciado en Matemática;
Doctor en Ciencias Pedagógicas;
Docente de la Universidad Estatal del Sur de Manabí;
Jipijapa, Ecuador

 pvaldestamayo@gmail.com
 <https://orcid.org/0000-0002-7264-0440>

AUTORES:

Edwin Dimitri Nieto Guerrero
Ambar Jamaly Guerrero Ochoa

Título: Compendio de Matemáticas Volumen VII. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Descriptores: Lógica matemática; Teoría de conjuntos; Análisis matemático; Topología.

Código UNESCO: 1202 Análisis y Análisis Funcional

Clasificación Decimal Dewey/Cutter: 510/N558

Área: Matemáticas

Edición: 1^{era}

ISBN: 978-9942-579-22-5

Editorial: Mawil Publicaciones de Ecuador, 2026

Ciudad, País: Quito, Ecuador

Formato: 148 x 210 mm.

Páginas: 152

DOI: <https://doi.org/10.26820/978-9942-579-22-5>

URL: <https://mawil.us/repositorio/index.php/academico/catalog/book/240>

Texto para docentes y estudiantes universitarios

El proyecto didáctico **Compendio de Matemáticas Volumen VII. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**, es una obra colectiva escrita por varios autores y publicada por MAWIL; publicación revisada por el equipo profesional y editorial siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento de publicaciones de MAWIL de New Jersey.

© Reservados todos los derechos. La reproducción parcial o total queda estrictamente prohibida, sin la autorización expresa de los autores, bajo sanciones establecidas en las leyes, por cualquier medio o procedimiento.



Usted es libre de:
Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.
Adaptar — remezclar, transformar y construir a partir del material para cualquier propósito, incluso comercialmente.

Director Académico: PhD. Lenin Suasnabas Pacheco

Dirección Central MAWIL: Office 18 Center Avenue Caldwell; New Jersey # 07006

Gerencia Editorial MAWIL-Ecuador: Mg. Vanessa Pamela Quishpe Morocho

Dirección de corrección: Mg. Ayamara Galanton.

Editor de Arte y Diseño: Leslie Letizia Plua Proaño

Corrector de estilo: Lic. Marcelo Acuña Cifuentes

Prefacio

Presentar esta segunda edición es, para nosotros, un gran motivo de orgullo y profunda satisfacción. Desde la publicación de la primera edición, el objetivo ha sido claro: presentar conceptos matemáticos con claridad, así como también fomentar el pensamiento crítico y el gusto por el razonamiento lógico, además de ofrecer un material de estudio que conjugue rigor matemático, claridad expositiva y un camino guía-conductor que permita al lector avanzar con confianza desde los fundamentos hasta los conceptos más avanzados. También, se han incluido un nuevo capítulo y secciones que abordan temas contemporáneos y enfoques pedagógicos actualizados, respondiendo a las necesidades de un aprendizaje más interactivo y contextualizado. En aquella primera versión, concebida con dedicación y paciencia, se buscó que cada capítulo tuviera una estructura coherente: introducción teórica, ejemplos resueltos paso a paso y una selección de ejercicios cuidadosamente graduados. A lo largo de los años desde su publicación se ha recibido una valiosa retroalimentación de profesores, estudiantes y colegas de diversas instituciones, más la experiencia en el aula, revelaron que siempre se debe mejorar, enriquecer y actualizar. Los comentarios, observaciones y sugerencias han sido una guía fundamental para esta nueva edición, porque se ha podido detectar puntos que podían explicarse con mayor detalle, ejercicios que requerían ajustes y ejemplos que pueden enriquecer las aplicaciones más cercanas a la realidad del lector.

El objetivo sigue siendo el mismo: ofrecer un recurso sólido y comprensible, que sirva tanto para el estudio autónomo como para el trabajo en el aula. Estas mejoras harán de esta segunda edición una herramienta aún más útil para todos aquellos que, por vocación, curiosidad o exigencia académica, se adentran en el fascinante mundo de la matemática.

Por otro lado, no solo se ha limitado a corregir errores tipográficos o aclarar ciertos pasajes, sino que se también se realizó una revisión exhaustiva de todo el libro de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, con la reestructuración de capítulos para mejorar la progresión lógica de los temas, ampliado las explicaciones en conceptos clave y se incorporó nuevos ejemplos resueltos paso a paso, con el fin de facilitar el aprendizaje autónomo. Asimismo, se ha añadido ejercicios de aplicación que vinculan la teoría con problemas reales de ingeniería, ciencias naturales y tecnología, con la finalidad de mostrar la utilidad práctica de la matemática en distintos campos del conocimiento.

Uno de los cambios más significativos ha sido la incorporación del capítulo de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden, el cual fomenta el razonamiento crítico y la resolución creativa de problemas. Porque, aprender matemática no consiste únicamente en memorizar fórmulas, sino en desarrollar la capacidad de analizar, deducir y encontrar caminos alternativos para llegar a una solución.

Agradecemos profundamente, a todos los docentes que han confiado en este libro como herramienta de enseñanza, a los estudiantes que lo han estudiado con perseverancia y a los colegas que han compartido observaciones valiosas. Cada sugerencia,

cada corrección y cada comentario han dejado huella en estas páginas. Esta obra no solo es el fruto de los autores, sino el resultado de un diálogo constante con quienes viven y enseñan la matemática día a día. Esperamos que a medida que el lector recorra estas páginas, no solo se encuentra frente a un simple manual, sino frente a un compañero de estudio que guía, reta y motiva. Porque la matemática, más allá de los números y símbolos, son un lenguaje que permite comprender el mundo, resolver problemas complejos y desarrollar un pensamiento preciso y creativo. Deseamos que esta segunda edición logre que más personas se acerquen a la matemática con interés, confianza y admiración, así habremos cumplido con creces nuestro propósito.

Los Autores

Índice general

1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	7
1.1. Características Básicas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.	8
1.2. Ecuaciones diferenciales de Variables Separables	9
1.2.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones diferenciales de Variables Separables.	10
1.2.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Variables separables	13
1.3. Ecuaciones diferenciales Homogéneas de Forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	16
1.3.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones diferenciales Homogéneas de Forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	17
1.3.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	21
1.4. Ecuaciones diferenciales de Forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$	22
1.4.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de la forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$	23
1.4.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de la Forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$	29
1.5. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden	30
1.5.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales lineales de Primer Orden	33
1.5.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	46
1.6. Ecuaciones Diferenciales No-lineales de Primer Orden. Ecuación de Bernoulli	48
1.6.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones diferenciales de Bernoulli	49
1.6.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales. Ecuación Bernoulli	55
1.7. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden. Ecuación Exacta	57
1.7.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones diferenciales Exactas	58

1.7.2.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales. Ecuación Exacta	60
1.8.	Ecuaciones Diferenciales con Factor Integrador.	61
1.8.1.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales con un Factor Integrador.	63
1.8.2.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales. Ecuación con factor Integrador	67
1.9.	Ecuaciones Diferenciales de Clairaut	69
1.9.1.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales De Clairaut.	70
1.9.2.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales De Clairaut.	71
1.10.	Ecuaciones Diferenciales de Riccati	72
1.10.1.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Riccati.	73
1.10.2.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales De Riccati.	76
1.11.	Ciertas Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.	77
1.11.1.	Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.	103
2.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden	107
2.1.	Características Básicas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden.	108
2.2.	Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden que se pueden transformar a Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	111
2.2.1.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden que se Transforman a Ecuaciones de Primer Orden.	112
2.2.2.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden que se Transforman a Ecuaciones de Primer Orden.	123
2.3.	Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes	127
2.3.1.	Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas.	127
2.3.2.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden Homogéneas.	129
2.3.3.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas.	132
2.4.	Ecuaciones Diferenciales de n Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas	133
2.4.1.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales Lineales de n Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas.	135
2.4.2.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de n Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas.	138
2.5.	Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo y n Orden con Coeficientes Constantes no-Homogéneas	140
2.5.1.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales Lineales de segundo y n Orden con Coeficientes Constantes No-Homogéneas.	145
2.5.2.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de segundo orden y de n Orden con Coeficientes Constantes No-homogéneas.	160
2.6.	Ecuaciones Diferenciales Lineales de Euler	162

2.6.1.	Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo Orden	165
2.6.2.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo y 'n' Orden Homogéneas	165
2.6.3.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Euler de segundo orden Homogéneas	173
2.6.4.	Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo y 'n' Orden No-homogéneas	173
2.6.5.	Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo y 'n' Orden No-homogéneas	178
2.7.	Ciertas Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.	178
2.7.1.	Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.	196
3.	Sistema de Ecuaciones Lineales Diferenciales Ordinarias	199
3.1.	Características Básicas de los Sistemas de 'n' Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	200
3.2.	Método de Transformar el Sistema de Ecuaciones Diferenciales a una Sola Ecuación Diferencial	202
3.3.	Características Básicas de los Sistemas de Dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	203
3.4.	Ejercicios Resueltos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Transformados a una Ecuación Diferencial	204
3.4.1.	Ejercicios Propuestos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Transformados a una Ecuación	210
3.5.	Método de las Primeras Integrales	214
3.5.1.	Ejercicios Resueltos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Método de la Primera Integral	215
3.5.2.	Ejercicios Propuestos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Método de la Primera Integral	220
3.6.	Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes	222
3.6.1.	Ejercicios Resueltos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes	225
3.6.2.	Ejercicios Propuestos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes	239
4.	Transformada Laplace	241
4.1.	Características Básicas de la Transformada Laplace	242
4.2.	Propiedades de la Transformación Laplace	244
4.3.	Propiedades de la Transformada Laplace	246
4.4.	Ejercicios Resueltos de la Transformada Laplace.	253
4.5.	Ejercicios Propuestos de la Transformada de Laplace.	271

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

1. Características Básicas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.
2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Variables Separables
3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Homogéneas de la forma: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de la forma: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.
5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.
6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden Bernoulli.
7. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden Exactas.
8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden con Factor Integrante.
9. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Clairaut.
10. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Riccati.
11. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

1.1. Características Básicas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

Una ecuación diferencial ordinaria de n-orden es toda aquella ecuación, en la cual, se tiene una relación entre la variable independiente, la variable dependiente y las derivadas hasta n-orden, se lo escribe:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Por lo tanto, una ecuación diferencial de primer orden, se lo representa:

$$F(x, y, y') = 0$$

Donde: F es una función definida y continua de las tres variables x , y , y' en un dominio dado $\mathbb{V}$ de tres variables. Además, y' es el elemento que debe estar en la ecuación diferencial, los otros dos elementos x e y pueden estar como no, en la ecuación diferencial de primer orden.

Toda función $y = \varphi(x)$, que cumpla con la ecuación diferencial, se denomina solución específica de la ecuación diferencial, también se la puede denominar como la integral específica de la ecuación diferencial.

Si la función esta definida en la forma $y = \varphi(x, C)$ se la conoce como, la solución general de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y debe cumplir con:

1. Para todo valor definido de C , que pertenece a un dominio $\mathbb{V}$, cumple con la ecuación diferencial.
2. Todo gráfico de $y = \varphi(x, C)$, donde: $a \leq x \leq b$ pertenece al dominio $\mathbb{V}$.

Para todo par (x, y) del plano cartesiano OXY, que sea parte de la solución de la ecuación diferencial, se lo denomina gráfico integral de la ecuación diferencial.

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, también se la puede representar en la forma:

$$\Theta(x, y, C) = 0$$

Que en ese caso, se lo denomina como la solución general de una ecuación diferencial de primer orden en su forma implícita.

El paso de la forma $\Theta(x, y, C) = 0$ a la forma $\Theta(x, y) = 0$, que es pasar de la solución general a la solución específica de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, se requiere de la condición de frontera, un punto, (x_0, y_0) o también conocidas, como condiciones iniciales del proceso que se investiga.

Para estar seguros, que la solución de una ecuación diferencial de primer orden, pase por el punto (x_0, y_0) se aplica el teorema de existencia de una solución de Cuachy, el cual indica:

Si el lado derecho de $y' = f(x, y)$, es función continua en un dominio $\mathbb{V}$ y además, tiene en este dominio, su derivada parcial $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, por cada punto (x_0, y_0) de este dominio, pasa exactamente un solo gráfico integral de la ecuación diferencial de primer orden.

1.2. Ecuaciones diferenciales de Variables Separables

La ecuación diferencial de variables separables son aquellas ecuaciones que tienen la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Donde: la función $f(x)$ y $g(y)$ son definidas, continuas y en su estructura consta de una sola variable, en los intervalos $a < x < b$ y $c < y < d$. respectivamente.

Las ecuaciones diferenciales de variables separables, se las resuelve separando las variables, para que, cada variable este por un lado de la igualdad; es decir:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

La última igualdad se la integra en función de cada una de las variables, que aparece, con la condición de que, $g(y) \neq 0$. Por lo tanto:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C$$

Donde: C es la constante de integración.

Las ecuaciones diferenciales de variables separables se pueden presentar de diferente forma, pero son una combinación posible de las funciones que, intervengan en la ecuación diferencial, como:

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \rightarrow g(y) \cdot dy = f(x) \cdot dx \rightarrow \int g(y) \cdot dy = \int f(x) \cdot dx + C$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}, \rightarrow \frac{dy}{g(y)} = \frac{dx}{f(x)}; \quad g(y) \neq 0; f(x) \neq 0 \rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dx}{f(x)} + C$$

Las funciones son definidas, continuas y constan en su estructura de una sola variable, en sus respectivos intervalos.

3. En la practica también, en muchas ocasiones, aparece en la forma:

$$f(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + g(y) \cdot f_1(x) \cdot dy = 0$$

En estos casos, se multiplica a ambos lados de la igual por el elemento:

$$u(x, y) = \frac{1}{f_1(x)g_1(y)}$$

Con lo cual se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} dx + \frac{g(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

La última expresión, ya es una ecuación diferencial de variables separables.

1.2.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones diferenciales de Variables Separables.

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Como se puede observar, es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables; ya que, fácilmente se logra separar las variables y en ese caso se obtiene:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = -y \longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2} \quad (1.1)$$

Se integral a ambos lados de la ecuación (1.1):

$$\ln(y) = \frac{1}{x} + C$$

Donde: C, es una constante cualquiera; por lo que, también, se lo puede escribir:

$$\ln(y) = \frac{1}{x} + C \longrightarrow \ln(y) = \frac{1}{x} + \ln(C) \longrightarrow \ln(y) - \ln(C) = \frac{1}{x} \longrightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = \frac{1}{x}$$

Al aplicar la definición de una función logarítmica, se obtiene:

$$\frac{y}{C} = e^{\frac{1}{x}} \longrightarrow y = C \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Donde: C es la constante de integración. La solución representa la solución general del ejercicio.

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$$

La ecuación a simple vista, no permite definir que tipo de ecuación diferencial es, por lo que, se realiza transformaciones:

$$(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0 \longrightarrow y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0 \quad (1.2)$$

Se multiplica a la identidad (1.2) por: $u(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$ con lo que, se obtiene:

$$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0 \longrightarrow \frac{y^2(x+1)}{x^2y^2}dx + \frac{x^2(1-y)}{x^2y^2}dy = 0$$

$$\frac{(x+1)}{x^2}dx + \frac{(1-y)}{y^2}dy = 0 \quad (1.3)$$

Integrando a ambos lados de la identidad (1.3) se obtiene:

$$\int \frac{(x+1)}{x^2}dx + \int \frac{(1-y)}{y^2}dy = C$$

$$\int \frac{(x)}{x^2}dx + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{(dy)}{y^2} - \int \frac{ydy}{y^2} = C$$

$$\ln(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln(y) = C$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x+y}{xy} = C$$

Donde : C es la constante de la integración. La solución obtenida es la solución general de la ecuación diferencial de variables separables.

3. Resolver la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y^2}$; donde: $y \neq 0$

Se observa que los elementos de la ecuación, se los puede separar; por lo tanto, es una ecuación diferencial de variables separables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y^2} \rightarrow y^2 dy = (x-1)dx \rightarrow \int y^2 dy = \int (x-1)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{(x-1)^2}{2} + C \rightarrow 2y^3 - 3(x-1)^2 = 6C$$

Donde: C es la constante de integración. La solución obtenida es la solución general implícita de la ecuación diferencial.

4. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 1) = y - 3$$

Se observa que los elementos de la ecuación se los puede separar; por lo tanto, es una ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{dy}{y-3} = \frac{dx}{x^2+1} \quad \text{Donde : } y \neq 3$$

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int \frac{dx}{x^2+1} \rightarrow \ln(y-3) = \arctan(x) + C$$

$$\ln(y-3) = \arctan(x) + \ln(C) \rightarrow \ln(y-3) - \ln(C) = \arctan(x)$$

$$\ln\left(\frac{y-3}{C}\right) = \arctan(x) \rightarrow \frac{y-3}{C} = e^{\arctan(x)}$$

$$y-3 = Ce^{\arctan(x)} \rightarrow y = 3 + Ce^{\arctan(x)}$$

Donde: C es la constante de integración. La solución obtenida es la solución general de la ecuación diferencial. Esta solución esta en la forma explicita.

5. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \quad \text{si } y(0) = 0$$

Primero se encuentre la solución general de la ecuación diferencial, además se observa que, se puede separar sus variables:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \rightarrow dy = e^{2x+y} dx$$

$$dy = e^{2x} e^y dx \rightarrow \frac{dy}{e^y} = e^{2x} dx \quad (1.4)$$

Integrando ambos lados de la ecuación (1.4):

$$\int e^{-y} dy = \int e^{2x} dx \rightarrow -e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

Se ha obtenido la solución general de la ecuación diferencial, en este momento se puede reemplazar la condición inicial, $y(x=0)=0$.

$$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + C \rightarrow -e^{-0} = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} + C$$

$$-e^{-0} = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} + C \rightarrow -1 = \frac{1}{2} + C$$

$$C = -\frac{3}{2}$$

Se reemplaza el valor de C en la solución general de la ecuación diferencial.

$$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + C \rightarrow -e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} \rightarrow e^{-y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$e^{-y} = \frac{3 - e^{2x}}{2} \rightarrow -y = \ln\left(\frac{3 - e^{2x}}{2}\right)$$

$$y = -\ln\left(\frac{3 - e^{2x}}{2}\right)$$

La ha obtenido la solución específica de la ecuación diferencial.

6. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0; \quad \text{Si } y(0) = 1$$

Primero se encuentre la solución general de la ecuación diferencial, se puede observar que, se puede separar sus variables:

$$-\frac{dy}{y^2} = dx; \quad \text{Donde : } y \neq 0 \quad (1.5)$$

Se integra a ambos lados de la igualdad (1.5):

$$\int -\frac{dy}{y^2} = \int dx \rightarrow \frac{1}{y} = x + C \rightarrow y = \frac{1}{x + C}$$

Se ha obtenido la solución general de la ecuación diferencial, en este momento se puede reemplazar la condición inicial, $y(x=0)=1$.

$$y = \frac{1}{x + C} \rightarrow 1 = \frac{1}{0 + C} \rightarrow C = 1$$

Se reemplaza el valor de C en la solución general de la ecuación diferencial, con lo cual se obtiene:

$$y = \frac{1}{x + 1}$$

Que es la solución específica de la ecuación diferencial.

1.2.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Variables separables

1. Resolver las ecuaciones diferenciales:

a) $(2y - 1)dx + dy = 0$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

c) $\frac{dy}{dx} = xy$

d) $ydx - (x^2 - 1)dy = 0$

e) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

f) $(1 + x)y\frac{dy}{dx} + x(1 + y) = 0$

g) $\sin(x)\sin(y)dx + \cos(x)\cos(y)dy = 0$

h) $xy(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

i) $(x^4 - y^2)dx + xydy = 0$

j) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$

k) $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$

l) $\frac{dy}{dx} + \frac{x \sin(x)}{y \cos(y)} = 0$

1. $1 + \frac{dy}{dx} = e^y$

2. $x^3 \frac{dy}{dx} = 2y$

3. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

4. $x \frac{dy}{dx} + y(1 - y) = 0$

5. $(x^2 + x) \frac{dy}{dx} = 2y + 1$

6. $\frac{dy}{dx} + \frac{e^x y}{1 + e^x} = 0$

7. $xy \frac{dy}{dx} + (1 + y^2) = 0$

8. $\frac{dy}{dx} = y \tan(x)$

2. Encontrar la integral general y la integral especifica de las ecuaciones diferenciales si la condición inicial es dada:

a) $\frac{dy}{dx} \cos(y) + 2x \sin(y) = 0; \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$ 1. $y \frac{dy}{dx} = x - 1; \quad y(1) = 0$

b) $(1 + y^2)dx - xydy = 0; \quad y(2) = 1$ 2. $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}; \quad y(0) = 1$

c) $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \ln(x); \quad y(e) = 1$ 3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}; \quad y(0) = 1$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x}{1 + e^x}; \quad y(0) = 2$ 4. $\frac{dy}{dx} = (y - 1)(y - 2); \quad y(0) = 0$

e) $\frac{dy}{\sqrt{4 + y^2}} = dx; \quad y(0) = 0$ 5. $\frac{x}{1 + y} - \frac{y}{1 + x} \frac{dy}{dx} = 0; \quad y(1) = 1$

f) $\sin(x) \frac{dy}{dx} = y \ln(y); \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ 6. $x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} \frac{dy}{dx} = 0; y(0) = 1$

g) $\frac{dy}{dx} + y \tan(x) = 0; \quad y(\pi) = 2$ 7. $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y^3}; \quad y(0) = 1$

3. Encuentre la integral general:

a) $3e^x \tan(y) dx + (2 - e^y) \sec^2(y) = 0$

b) $y' \sin(x) = y \ln(y)$

c) $y \ln(dx) + x dy = 0$

d) $(1 + y^2) dx + x y dy = 0$

e) $(1 + y^2)(e^{2xdx} - e^y dy) - (1 + y) dy = 0$

f) $(1 + y^2) dx = x dy$

g) $(1 + e^y) y \frac{dy}{dx} = e^x$

h) $\sqrt{1 + y'} = e^y$

i) $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$

j) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$

k) $y' = a^{x+y} (a > 0, a \neq 1)$

l) $x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$

m) $e^y \sqrt{1 + x^2} \frac{dy}{dx} + 1 = 0$

n) $\frac{dy}{dx} = y\sqrt{1 - y^2}$

ñ) $x dy = (y^3 + y) dx$

o) $\frac{dy}{dx} = \cos(x + y)$

p) $\frac{dy}{dx} \sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$

q) $2e^x \tan(y) dx + \frac{(1 + e^x)}{\cos^2(y)} dy = 0$

r) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\sqrt{1 + x^2}}$

s) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 5x + 6}$

t) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + 5x + 6}$

u) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$

1. $2x^2 \frac{dy}{dx} = y$

2. $x^3 \frac{dy}{dx} + y - a = 0$

3. $xy = (a + x)(b + y) \frac{dy}{dx}$

4. $x - y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$

5. $x \frac{dy}{dx} + 1 = x^3 - \frac{dy}{dx}$

6. $\frac{dy}{dx} = xy + ax + by + ab$

7. $x^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

8. $x \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] = 1$

9. $\frac{dy}{dx} - x = 1 - x^2 \frac{dy}{dx}$

10. $(1 + x)y + (1 - y)x \frac{dy}{dx} = 0$

11. $ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0$

12. $(xy^2 + x) dy + (x^2 y - y) dx = 0$

13. $\frac{dy}{dx} \tan(x) = y$

14. $\frac{dy}{dx} = e^{x+2y}$

15. $x^2 \frac{dy}{dx} + y + a = 0$

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 y}{x^2 + x - 12}$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + e^x}{1 - e^{2x}}$

18. $y' = \frac{y^2 + 1}{x} \sqrt{1 + x^2}$

19. $\frac{dy}{dx} \sin(x) = y$

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1+x}{1+y}$$

$$b) \frac{dy}{dx} = \frac{\tan(y)}{x}$$

$$c) \frac{dy}{dx} = \cos(y)$$

$$d) \frac{dy}{dx} = \sin(y)$$

$$e) \sin(x) \sin(y) \frac{dy}{dx} = \cos(x) \cos(y)$$

$$f) \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y) \frac{dy}{dx}$$

$$g) x(1+e^y) - e^y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$h) \frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$i) \frac{dy}{dx} = y\sqrt{1-y^2}$$

$$j) y^2 = x \frac{dy}{dx} + y$$

$$k) y(x^2-1) \frac{dy}{dx} + x(y^2-1) = 0$$

$$l) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1+x^2y^2}{2}$$

$$m) y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{x}$$

$$n) e^{-\frac{1}{x}} y^3 + x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\tilde{n}) y - x \frac{dy}{dx} = 1 + x^2 \frac{dy}{dx}$$

$$o) (1-x^2) \frac{dy}{dx} + 1 - y^2 = 0$$

$$p) \frac{dy}{dx} - x = 1 - x^2 \frac{dy}{dx}$$

$$q) 1 - x^2 - xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$r) xy^2 dx + (y - x^2 y) dy = 0$$

$$1. e^y \sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$2. 2x\sqrt{ax-x^2} \frac{dy}{dx} = a^2 + y^2$$

$$3. 1 - x^2 - xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4. 1 + y^2 + xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$5. x^2 \left(\frac{dy}{dx} + y^2 \right) = a(xy - 1)$$

$$6. (y-x) \sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+y^2)^3}$$

$$7. y^2 + xy^2 + (x^2 y x^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$8. \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{x(y^2+2)}$$

$$9. x(1+y^2) + y(1+x^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$10. (2+y) \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2} \frac{dy}{dx}$$

$$11. x \frac{dy}{dx} - y = \frac{dy}{dx} \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}$$

$$12. \sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0$$

$$13. xy(1+x^2) \frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$14. \tan(x) \sin^2(y) + \cos^2(x) \cot(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$15. \frac{dy}{dx} = \cos(x)$$

$$16. \frac{dy}{dx} = \sin(x)$$

$$17. \frac{dy}{dx} = \cot(x)$$

$$18. \frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{1-x^2}$$

$$19. \tan(x) dy = y \ln(y) dx$$

1.3. Ecuaciones diferenciales Homogéneas de Forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Las ecuaciones diferenciales homogéneas son aquellas que se las llama a las ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{Donde : } x \neq 0$$

La función $f\left(\frac{y}{x}\right)$ es una función continua en un intervalo dado y depende de la relación $\frac{y}{x}$.

A la ecuación diferencial homogénea, se la resuelve introduciendo una variable de la forma $\frac{y}{x} = u(x)$, esta variable permite transformar la ecuación diferencial homogénea a una ecuación diferencial de variables separables. La cual, el estudiante ya esta en capacidad de resolver.

$$\frac{y}{x} = u(x) \longrightarrow y = x \cdot u(x)$$

La expresión obtenida nos indica, que se tiene el producto de dos elementos en función de x. A esta expresión se la deriva con respecto a x; por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = u(x) + x \cdot \frac{du}{dx}$$

Esta última expresión, se la reemplaza en la ecuación diferencial homogénea:

$$u(x) + x \cdot \frac{du}{dx} = f(u)$$

Lo cual, permite obtener una ecuación diferencial de variables separables:

$$x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u(x)}{x}$$

$$\frac{du}{f(u) - u(x)} = \frac{dx}{x} \quad \text{Donde : } f(u) - u(x) \neq 0$$

Al integrar la última identidad, se obtiene la solución general de la ecuación diferencial de variables separables con respecto a u(x), lo cual, se puede escribir:

$$\theta(x, u(x), C) = 0$$

Al reemplazar $u(x) = \frac{y}{x}$ se obtiene:

$$\theta\left(x, \frac{y}{x}, C\right) = 0$$

La expresión obtenida representa la solución general de la ecuación diferencial homogénea de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

En el caso de que: $f(u) - u(x) = 0$ la ecuación diferencial toma la forma :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

1.3.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones diferenciales Homogéneas de Forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

1. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad (1.6)$$

El lado derecho de la ecuación diferencial dada (1.6), se la multiplica y divide para x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

Se reemplaza: $\frac{y}{x} = u \rightarrow y = x \cdot u$. Se debe tener en mente que, ' u ' esta en función de ' x ', y al derivar con respecto a ' x ' se obtiene:

$$y = x \cdot u \rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial (1.6) en función de la nueva variable ' u ':

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{u} \\ x \frac{du}{dx} &= \frac{1 + u^2}{u} - u \rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{u} - u \\ x \frac{du}{dx} &= \frac{1}{u} \rightarrow u \cdot du = \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Se integra a ambos lados de la identidad (1.7):

$$\int u du = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln(x) + C$$

Se regresa a las variables de iniciales:

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln(x) + C \rightarrow y^2 = 2x^2(\ln(x) + C)$$

La expresión obtenida representa la solución general de la ecuación diferencial homogénea.

2. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{3x - y} \quad (1.8)$$

El lado derecho de la ecuación diferencial dada (1.8), se la multiplica y divide para x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{3x-y}{x}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{3 - \frac{y}{x}}$$

Se reemplaza: $\frac{y}{x} = u \rightarrow y = x \cdot u$. Se debe tener en mente que, u esta en función de x, y al derivar con respecto a x se obtiene:

$$y = x \cdot u \rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial, para que la ecuación diferencial este en función de 'u':

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1 + \frac{y}{x}}{3 - \frac{y}{x}} \rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u}{3 - u} \\ x \frac{du}{dx} &= \frac{1 + u}{3 - u} - u \rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u - u(3 - u)}{3 - u} \\ x \frac{du}{dx} &= \frac{1 + u - 3u + u^2}{3 - u} \rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1 - 2u + u^2}{3 - u} \\ x \frac{du}{dx} &= \frac{(u - 1)^2}{3 - u} \rightarrow \frac{(3 - u)du}{(u - 1)^2} = \frac{dx}{x} \quad u \neq 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se integra a ambos lados de la identidad (1.9):

$$\begin{aligned} \int \frac{(3 - u)du}{(u - 1)^2} &= \int \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{2du}{(u - 1)^2} - \int \frac{du}{u - 1} = \int \frac{dx}{x} \\ -\frac{2}{u - 1} - \ln(u - 1) &= \ln(x) + C \end{aligned}$$

Reemplazando u, se tiene:

$$\frac{2x}{y - x} + \ln(y - x) = C \quad \text{Donde : } x \neq y$$

La expresión obtenida representa la solución general de la ecuación diferencial homogénea.

3. Resuelva la ecuación diferencial:

$$x \frac{dy}{dx} = y \left(1 + \ln \left(\frac{y}{x} \right) \right) \quad \text{Si } y(1) = e^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.10)$$

Se transforma la ecuación diferencial (1.20), en una ecuación diferencial homogénea, y además, se debe encontrar la solución general de la ecuación diferencial:

$$x \frac{dy}{dx} = y \left(1 + \ln \left(\frac{y}{x} \right) \right) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)$$

Se reemplaza: $\frac{y}{x} = u \rightarrow y = x \cdot u$. Se debe tener en mente que, 'u' esta en función de 'x', y al derivar con respecto a 'x' se obtiene:

$$y = x \cdot u \rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial, para que la ecuación diferencial este en función de u:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right) \right) \rightarrow u + x \frac{du}{dx} = u(1 + \ln(u)) \\ x \frac{du}{dx} &= u(1 + \ln(u)) - u \rightarrow x \frac{du}{dx} = u + u \ln(u) - u \\ x \frac{du}{dx} &= u \ln(u) \rightarrow \frac{du}{u \ln(u)} = \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Se integra a ambos lados de la igualdad (1.11):

$$\int \frac{du}{u \ln(u)} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln(\ln(u)) = \ln(x) + C$$

$$\ln(\ln(u)) = \ln(x) + \ln(C)$$

Aplicando propiedades de una función logarítmica se obtiene:

$$\ln(\ln(u)) = \ln(x) + \ln(C) \rightarrow \ln(\ln(u)) = \ln(xC)$$

$$\ln(u) = Cx \rightarrow u = e^{Cx}$$

Se regresa a las variables iniciales:

$$u = e^{Cx} \rightarrow \frac{y}{x} = e^{Cx} \rightarrow y = x e^{Cx}$$

La expresión obtenida representa la solución general de la ecuación diferencial homogénea. En este momento se reemplaza la condición inicial (o de frontera) del ejercicio, para obtener el valor de C:

$$y = x e^{Cx} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = 1 e^{C \cdot 1} \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Se reemplaza el valor de C, en la solución general de la ecuación diferencial homogénea:

$$y = x e^{Cx} \rightarrow y = x e^{-\frac{1}{2}x}$$

La expresión obtenida representa la solución específica de la ecuación diferencial homogénea.

4. Resolver la ecuación diferencial:

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \quad \text{si: } y(1) = \sqrt{3} \quad (1.12)$$

Primero, se encuentra la solución general de la ecuación diferencial; por lo tanto, se realiza transformaciones en la ecuación para obtener una ecuación diferencial homogénea:

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2 - x^2}{xy} \right) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right)$$

Donde: $x \neq 0, y \neq 0$

Se reemplaza: $\frac{y}{x} = u \rightarrow y = x \cdot u$. Se debe tener en mente, que 'u' esta en función de 'x' y al derivar con respecto a 'x' se obtiene:

$$y = x \cdot u \rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial, para que, la ecuación diferencial este en función de 'u':

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2 - 1}{u} \right) - u$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{2u} \rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{-1 - u^2}{2u}$$

$$\frac{2u du}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{2u du}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln(x) + C \rightarrow \ln(u^2 + 1) + \ln(x) = \ln(C)$$

$$\ln[(u^2 + 1)x] = \ln(C) \rightarrow (u^2 + 1)x = C$$

Se regresa a las variables iniciales:

$$\left[\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right] x = C \rightarrow \frac{y^2 + x^2}{x^2} x = C \rightarrow y^2 + x^2 = Cx$$

La expresión obtenida representa la solución general de la ecuación diferencial homogénea (1.12). En este momento, se reemplaza la condición inicial (o de frontera) del ejercicio, para obtener el valor de C:

$$y^2 + x^2 = Cx \rightarrow (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = C(1) \rightarrow 3 + 1 = C \rightarrow C = 4$$

Se reemplaza el valor de C, en la solución general de la ecuación diferencial homogénea:

$$x^2 + y^2 = 4x$$

La expresión obtenida, representa la solución específica de la ecuación diferencial homogénea.

1.3.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Forma

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)$$

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$

$$1. y \frac{dy}{dx} = 2y - x$$

$$b) \frac{dy}{dx} \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - 1$$

$$2. \frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$c) x \frac{dy}{dx} = y \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$d) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1$$

$$4. \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x}$$

$$e) \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x^2}$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - 2\sqrt{xy}}$$

$$f) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left[\frac{x-y}{x-2y} \right]$$

$$6. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$g) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} (\ln(y) - \ln(x) + 1)$$

$$7. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(y-x)}$$

$$h) \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 3xy + y^2}{4y^2 + 3xy + x^2}$$

$$8. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

$$i) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$j) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

$$10. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

2. Encontrar la solución de la ecuación diferencial si se conoce su condición inicial:

$$a) \left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} \right) \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 1 \quad y(1) = 0$$

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} \quad y(1) = 2$$

$$b) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad y(1) = \sqrt{2}$$

$$2. y^3 dy + (3xy^2 + 2x^3) dx = 0; y(1) = \sqrt{3}$$

$$c) \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \quad y(1) = 1$$

$$3. x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = xy \frac{dy}{dx} \quad y(3) = 4$$

$$d) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left(\ln\left(\frac{y}{x}\right) + 1 \right) \quad y(1) = e$$

$$4. \frac{dy}{dx} \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - 1 \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

3. Resolver la ecuación diferencial dada:

a) $x \frac{dy}{dx} = x + y$

b) $x + y + x \frac{dy}{dx} = 0$

c) $(y - 2x) \frac{dy}{dx} = 2y + x$

d) $8y + 10x + (5y + 7x) \frac{dy}{dx} = 0$

e) $(x + y) \frac{dy}{dx} + y = 0$

f) $(x + y) \frac{dy}{dx} - y = 0$

g) $(x + y) \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

h) $(x + y) \frac{dy}{dx} + x - y = 0$

i) $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

j) $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

k) $2\sqrt{xy} - y + x \frac{dy}{dx} = 0$

l) $y + (2\sqrt{xy} - x) \frac{dy}{dx} = 0$

m) $x - \sqrt{xy} - y + \sqrt{xy} \frac{dy}{dx} = 0$

n) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - xy}{x^2 - xy + y^2}$

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$

2. $x \frac{dy}{dx} - y = x \tan\left(\frac{y}{x}\right)$

3. $x \frac{dy}{dx} = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

4. $(x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} - 2xy = 0$

5. $(3x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} - 2xy = 0$

6. $(x^2 - xy) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

7. $(x^2 + 2xy) \frac{dy}{dx} = y^2$

8. $xy \frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$

9. $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

10. $y^3 \frac{dy}{dx} + 3xy^2 + 2x^3 = 0$

11. $xy e^{\frac{x}{y}} + y^2 - x^2 e^{\frac{x}{y}} \frac{dy}{dx} = 0$

12. $xy \frac{dy}{dx} = y^2 + (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}$

13. $xy + y^2 - (2x^2 + xy) \frac{dy}{dx} = 0$

14. $x - y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

1.4. Ecuaciones diferenciales de Forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

La ecuación diferencial de forma: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, donde f es una función continua en todo su dominio. El método de solución de este tipo de ecuación diferencial consiste en aplicar un cambio de variable, que permita obtener una ecuación diferencial de tipo homogéneo o del tipo de ecuación diferencial de variables separables, son tres casos posibles y que dependen del valor del determinante de la matriz de segundo orden:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

1. Todos los determinantes, que se puede obtener de la matriz son diferente de cero,
2. Uno de los determinantes, es igual a cero,
3. Todos los determinantes, son igual a cero.

1. Primer caso:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Se realiza el cambio:

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases}$$

Donde: α y β son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones escrito, se lo obtiene rápidamente al reemplazar las variables x, y por α y β , en la ecuación diferencial analizada y se lo iguala a cero.

2. Segundo caso:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

Y por lo menos, uno de los determinantes de la matriz de segundo orden es diferente de cero, en ese caso se realiza el reemplazo:

$$ax + by = u(x) \quad \text{o} \quad a_1x + b_1y = u(x)$$

Cada uno de estos reemplazos permite cambiar la ecuación diferencial a una ecuación diferencial de variables separables.

3. Tercer caso: Si todos los determinantes de la matriz son igual a cero, en ese caso se reemplaza $ax + by + c = V$ o $ax_1 + by_1 + c_1 = V$

1.4.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

1. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 5y + 11}{3x - 4y + 7} \quad (1.13)$$

Primero se debe encontrar el valor del determinante, conocido como determinante básico:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 15 = -1 \neq 0$$

Se utiliza el cambio de variable:

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta$$

Los valores de α, β se la obtiene del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4\alpha - 5\beta + 11 = 0 \\ 3\alpha - 4\beta + 7 = 0 \end{cases}$$

La solución al sistema es:

$$\alpha = -9, \quad \beta = -5$$

El método de resolver el sistema se deja al lector, quien debe resolverlo, pero se aconseja que aplique el método de Cramer.

Se reemplaza en las ecuaciones:

$$x = \xi - 9, \quad y = \eta - 5$$

Por lo cual, se puede obtener:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

Las dos ultimas expresiones , se reemplaza en la ecuación diferencial (1.13):

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4\xi - 5\eta}{3\xi - 4\eta}$$

El lado derecho de la igualdad se multiplica y dividi para ξ :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4 - 5\frac{\eta}{\xi}}{3 - 4\frac{\eta}{\xi}} \quad \text{Donde : } \xi \neq 0$$

Esta expresión es una ecuación diferencial homogénea, la cual se esta en condiciones de resolverla.

$$\frac{\eta}{\xi} = u(\xi) \quad \longrightarrow \quad \eta = \xi \cdot u$$

Se deriva ambos lados de la ecuación en función de ξ :

$$\eta = \xi \cdot u \quad \longrightarrow \quad \frac{d\eta}{d\xi} = u + \xi \frac{du}{d\xi}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4 - 5\frac{\eta}{\xi}}{3 - 4\frac{\eta}{\xi}} \quad \longrightarrow \quad u + \xi \frac{du}{d\xi} = \frac{4 - 5u}{3 - 4u}$$

$$\xi \frac{du}{d\xi} = \frac{4 - 5u}{3 - 4u} - u \quad \longrightarrow \quad \xi \frac{du}{d\xi} = \frac{4 - 5u - u(3 - 4u)}{3 - 4u}$$

$$\xi \frac{du}{d\xi} = \frac{4 - 8u + 4u^2}{3 - 4u} \quad \longrightarrow \quad \frac{3 - 4u}{4 - 8u + 4u^2} du = \frac{d\xi}{\xi} \quad (1.14)$$

Se integra a ambos lados de la identidad (1.14):

$$\int \frac{3 - 4u}{4 - 8u + 4u^2} du = \int \frac{d\xi}{\xi} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{4} \int \frac{3 - 4u}{(u^2 - 2u + 1)} du = \int \frac{d\xi}{\xi} + C$$

En este tipo de integrales se analiza el discriminante del polinomio de segundo orden, que se encuentra en el denominar de la fracción:

$$\Delta = b^2 - 4ac \longrightarrow \Delta = 64 - 4(4)(4) = 0$$

Por lo tanto, el polinomio de segundo orden tiene una raíz doble real, idénticas. Se encuentra sus raíces aplicando cualquiera de los métodos conocidos por el estudiante:

$$4u^2 - 8u + 4 = 4(u - 1)^2$$

Con esta información, se descompone a la fracción propia en sus fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{3-4u}{u^2-2u+1} &= \frac{3-4u}{(u-1)^2} = \frac{A}{(u-1)^2} + \frac{B}{u-1} \\ \frac{3-4u}{u^2-2u+1} &= \frac{A+B(u-1)}{(u-1)^2} \\ 3-4u &= A+B(u-1) \end{aligned}$$

Si $u = 1$:

$$3 - 4(1) = A + B(1 - 1) \longrightarrow A = -1$$

Si $u = 0$:

$$3 - 4(0) = A + B(0 - 1) \longrightarrow 3 = A - B \longrightarrow B = -4$$

Se reemplazan los valores de A y B. Por lo tanto:

$$\frac{3-4u}{u^2-2u+1} = \frac{3-4u}{(u-1)^2} = \frac{A}{(u-1)^2} + \frac{B}{u-1} = \frac{-1}{(u-1)^2} + \frac{-4}{u-1} \quad (1.15)$$

Se integra a ambos lados de la igualdad (1.15):

$$\int \frac{3-4u}{u^2-2u+1} du = \int \left(\frac{-1}{(u-1)^2} + \frac{-4}{u-1} \right) du = \int \frac{-1}{(u-1)^2} du + \int \frac{-4}{u-1} du$$

Se integra cada una de las integrales:

$$\int \frac{-1}{(u-1)^2} du \longrightarrow u-1 = t \longrightarrow du = dt \longrightarrow - \int \frac{dt}{t^2} = - \left(-\frac{1}{t} \right) = \frac{1}{u-1}$$

$$\int \frac{-4}{u-1} du \longrightarrow u-1 = t \longrightarrow du = dt \longrightarrow -4 \int \frac{dt}{t} = -4 \ln(t) = -4 \ln(u-1)$$

Después de integrar se obtiene:

$$\frac{1}{4} \int \frac{3-4u}{(u^2-2u+1)} du = \int \frac{d\xi}{\xi} + C \longrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u-1} - 4 \ln(u-1) \right) = \ln(\xi) + C$$

Se regresa a las variables η, ξ :

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\frac{\eta}{\xi} - 1} - 4 \ln \left(\frac{\eta}{\xi} - 1 \right) \right) = \ln(\xi) + C$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{\xi}{\eta - \xi} - 4 \ln \left(\frac{\eta - \xi}{\xi} \right) \right) &= \ln(\xi) + C \\ \left(\frac{\xi}{4(\eta - \xi)} - 4 \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\eta - \xi}{\xi} \right) \right) &= \ln(\xi) + C \\ \left(\frac{\xi}{4(\eta - \xi)} - (\ln(\eta - \xi)) + \ln(\xi) \right) &= \ln(\xi) + C \\ \frac{\xi}{4(\eta - \xi)} - (\ln(\eta - \xi)) + \ln(\xi) &= \ln(\xi) + C \\ \frac{\xi}{4(\eta - \xi)} - (\ln(\eta - \xi)) + \ln(\xi) - \ln(\xi) &= C \\ \frac{\xi}{4(\eta - \xi)} - (\ln(\eta - \xi)) &= C \end{aligned}$$

Se regresa a las variables x,y:

$$\begin{aligned} x &= \xi - 9 \longrightarrow \xi = x + 9 \\ y &= \eta - 5 \longrightarrow \eta = y + 5 \\ \frac{\xi}{4(\eta - \xi)} - (\ln(\eta - \xi)) &= C \longrightarrow \frac{x + 9}{4(y + 5 - (x + 9))} - (\ln(y + 5 - (x + 9))) = C \\ \frac{x + 9}{4(y + 5 - x - 9))} - (\ln(y + 5 - x - 9)) &= C \\ \frac{x + 9}{4(y - x - 4))} - \ln(y - x - 4) &= C \end{aligned}$$

La expresión es la solución implícita general de la ecuación diferencial.

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 9}{3x - 6y + 19} \quad (1.16)$$

Primero, se calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Se verifica el valor para otro determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} = 19 - 27 \neq 0$$

Se aplica el cambio de variable:

$$x - 2y = u$$

Se deriva la identidad:

$$1 - 2 \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Se despeja $\frac{dy}{dx}$:

$$1 - 2\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \longrightarrow -2\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - 1}{-2} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{du}{dx}}{2}$$

Además, se observa que:

$$3x - 6y = 3(x - 2y) = 3u$$

Todos estos elementos se reemplaza en la ecuación diferencial (1.16); por lo que, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 9}{3x - 6y + 19} \longrightarrow \frac{1 - \frac{du}{dx}}{2} = \frac{u + 9}{3u + 19}$$

$$1 - \frac{du}{dx} = \frac{2(u + 9)}{3u + 19} \longrightarrow -\frac{du}{dx} = \frac{2(u + 9)}{3u + 19} - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{2(u + 9)}{3u + 19} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3u + 9 - 2(u + 9)}{3u + 19}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u + 19 - 2u - 18}{3u + 19} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u + 1}{3u + 19}$$

Se separa las variables:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u + 1}{3u + 19} \longrightarrow \frac{3u + 19}{u + 1} du = dx \quad (1.17)$$

Se integra a ambos lados de la identidad (1.17):

$$\int \frac{3u + 19}{u + 1} du = \int dx + C \quad \text{Donde : } u \neq 1$$

Se integra la integral:

$$\int \frac{3u + 19}{u + 1} du = \int \left(3 + \frac{16}{u + 1} \right) du \longrightarrow 3u + 16\ln(u + 1)$$

Se reemplaza:

$$3u + 16\ln(u + 1) = x + C$$

Se regresa a las variables x,y:

$$3u + 16\ln(u + 1) = x + C \longrightarrow 3(x - 2y) + 16\ln(x - 2y + 1) = C$$

La expresión obtenida es la solución implícita general de la ecuación diferencial.

3. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y + 2}{3x - y + 1} \quad (1.18)$$

Se calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Se verifica el valor para otro determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 \neq 0$$

Los demás determinantes de la matriz también tiene el valor cero; por lo tanto:

$$3x - y + 1 = u$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial (1.18):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y + 2}{3x - y + 1} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2(3x - y + 2)}{3x - y + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(u)}{u} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \longrightarrow dy = 2dx$$

Se integra:

$$y = 2x + C$$

Se ha obtenido la solución implícita general de la ecuación diferencial.

4. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + y - 1} \quad \text{si } y(-1) = 2 \quad (1.19)$$

Se calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Se verifica el valor para otro determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 \neq 0$$

Se aplica el cambio de variable:

$$x + y = u$$

Se deriva ambos lados de la identidad con respecto a x:

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial (1.19):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + y - 1} \longrightarrow \frac{du}{dx} - 1 = \frac{u + 1}{u - 1} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u + 1}{u - 1} + 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u+1+u-1}{u-1} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2u}{u-1} \rightarrow \frac{u-1}{2u} du = dx \quad (1.20)$$

Se integra ambos lados de la igualdad (1.20):

$$\int \frac{u-1}{2u} du = \int dx + C$$

Se integra el lado izquierdo de la identidad:

$$\int \frac{u-1}{2u} du = \frac{1}{2} \left(\int du - \int \frac{du}{u} \right) = \frac{1}{2} (u - \ln(u))$$

Se tiene:

$$\frac{u}{2} - \frac{\ln(u)}{2} = x + C$$

Se reemplaza en la expresión, para que este en función de x, y:

$$\frac{x+y}{2} - \frac{\ln(x+y)}{2} = x + C$$

$$\frac{x+y}{2} - \frac{\ln(x+y)}{2} - x = C$$

$$\frac{x+y-2x}{2} - \frac{\ln(x+y)}{2} = C$$

$$\frac{y-x}{2} - \frac{\ln(x+y)}{2} = C$$

Esto representa la solución general de la ecuación diferencial. En este momento, se reemplaza la condición inicial, para obtener la solución específica:

$$\frac{y-x}{2} - \frac{\ln(x+y)}{2} = C \rightarrow \frac{2-(-1)}{2} - \frac{\ln(-1+2)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{y-x}{2} - \frac{\ln(x+y)}{2} = \frac{3}{2}$$

La expresión obtenida es la solución específica de la ecuación diferencial.

1.4.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de la Forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

1. Resolver las ecuaciones diferenciales:

$$a) \frac{dy}{dx} = -\frac{x+3y+7}{2x+y+3}$$

$$b) \frac{dy}{dx} = \frac{-7x+3y+4}{3x-7y-7}$$

$$c) \frac{dy}{dx} = \frac{x-2y-4}{2x-4y+5}$$

$$d) \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$$

$$e) \frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$$

$$f) \frac{dy}{dx} = \frac{2x-2y-8}{3x+5y+7}$$

$$g) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)^2$$

$$h) \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(x+y)^2} \quad a \neq 0$$

$$i) \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y-2}{x-y+4}$$

$$1. \frac{dy}{dx} = -\frac{2(x+y-2)}{5x-y-4}$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{-3x+7y-7}{7y-3x+3}$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{-x+3y-2}{3x-y-2}$$

$$4. x-2y+9-(3x-6y+19)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{-2x+y-1}{2y-x+1}$$

$$6. (2x-y-1)\frac{dy}{dx} = x-2y+1$$

$$7. 3x+3y-1+(x+y+1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$8. (2x+2y-1)\frac{dy}{dx} = -x-y-1$$

$$9. x+y-2-(x-y+4)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$10. x-2y+5+(2x-y+4)\frac{dy}{dx} = 0$$

1.5. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden, se llama a una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \quad (1.21)$$

Donde: $p(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un intervalo común (a,b) , de tal forma que, por cada punto de su dominio:

$$D = \left\{ (a,b) : \begin{array}{l} a < x < b \\ -\infty < y < \infty \end{array} \right\}$$

Pasa exactamente una curva integral de la ecuación diferencial. En el caso de que: $g(x) = 0$, la ecuación diferencial toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

A esta ecuación, se la conoce como: ecuación diferencial lineal homogénea (1.21), que es parte de la ecuación diferencial lineal de primer orden, en el caso de que: $g(x) \neq 0$ es la parte no-homogénea de la ecuación diferencial lineal de primer orden (1.21). Lo que permite definir que:

La solución general de la ecuación diferencial lineal (1.21) es suma de dos soluciones

1. La solución general de la ecuación diferencial de su parte homogénea (y^h),
2. La solución específica de la ecuación diferencial de su parte no-homogénea ($y^{\sim h}$).

La solución general homogénea, se la encuentra fácilmente; ya que, es una ecuación diferencial de variables separables:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= 0 \longrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \\ \ln(y) &= -\int p(x)dx + C \longrightarrow \ln(y) = -\int p(x)dx + \ln(C) \\ \ln(y) - \ln(C) &= -\int p(x)dx \longrightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = -\int p(x) \\ y &= y^h = Ce^{-\int p(x)dx}\end{aligned}$$

De la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea, se puede observar que: si $y = 0$, esto nos indica que $C = 0$.

Para encontrar la solución a la ecuación diferencial no-homogénea, existe dos métodos:

1. Primer Método: A este método, se lo conoce como: el método de la variación de la constante. Consta de los siguientes fases:

- a) Se encuentra la solución general de la ecuación diferencial homogénea:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad \text{Donde: } C \text{ es la constante de integración.}$$

- b) Se considera que: C es función de x ; por lo tanto, $C(x)$:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

- c) Por el momento, $C(x)$ no es conocida y se supone que cumple la ecuación diferencial lineal de primer orden. Se la calcula derivando la identidad en función de x :

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)} \cdot p(x)$$

Se reemplaza estas identidades en la ecuación diferencial de primer orden (1.21):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= g(x) \\ C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)} \cdot p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} &= g(x) \\ C'(x)e^{-\int p(x)dx} &= g(x) \\ C'(x) &= g(x)e^{\int p(x)dx}\end{aligned}$$

Se integra la última identidad:

$$C(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx$$

Se reemplaza la función $C(x)$ en la solución general de la ecuación diferencial homogénea; con lo cual, se obtiene la solución específica de la ecuación no-homogénea:

$$y_1(x) = y^{\sim h} = e^{-\int p(x)dx} \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx$$

La solución a la ecuación diferencial lineal de primer orden (1.21), es la suma de las dos soluciones; es decir, la solución general de la ecuación diferencial homogénea más la solución específica de la ecuación diferencial no-homogénea ($y = y^h + y^{\sim h}$).

2. Segundo Método: A este método, se lo conoce como: el método de la adivinanza, al inicio de su aplicación, o error acierto actualmente. Este método se lo puede aplicar, cuando:

- El elemento de la ecuación diferencial lineal de primer orden $p(x)$ es una constante,
- Cuando se puede visualizar la forma de la ecuación específica de la ecuación diferencial no-homogénea.

Los casos en los cuales se identifica fácilmente, la forma de la ecuación diferencial no-homogénea son:

- Si el lado derecho de la ecuación diferencial de primer orden, $g(x)$, es un polinomio de n -orden; entonces, la forma de la ecuación no-homogénea sera un polinomio del mismo orden, donde se debe calcular sus coeficientes.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \longrightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$y_1 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

- Si, $g(x) = e^{ax}P(x)$, donde: $P(x)$ es un polinomio de n -orden, la parte no-homogénea y_1 tendría la forma de:

$$y_1(x) = \begin{cases} e^{ax}Q_n(x) & \text{cuando las raices } p \neq a \\ xe^{ax}Q_n(x) & \text{cuando las raices } p = a \end{cases}$$

Donde los coeficiente del polinomio $Q(x)$, hay que calcularlos.

- Si $g(x) = ke^{ax}$, entonces $y_1(x)$, tiene la forma:

$$y_1(x) = \begin{cases} me^{ax} & \text{cuando las raices } p \neq a \\ mxe^{ax} & \text{cuando las raices } p = a \end{cases}$$

Donde: m se lo debe calcular.

- Si $g(x) = k \cos(bx) + l \sin(bx)$, se adivina que, la parte no-homogénea tendría la forma:

$$y_1(x) = m \cos(bx) + n \sin(bx)$$

Donde los coeficientes m y n se debe calcular.

- Si $g(x) = e^{ax}(k \cos(bx) + l \sin(bx))$ la parte no-homogénea $y_1(x)$ tiene la forma:

$$y_1(x) = e^{ax}(m \cos(bx) + n \sin(bx))$$

Donde: m y n son coeficientes que se debe calcular.

- f) Si $g(x) = P_n(x) \cos(bx) + Q_n(x) \sin(bx)$. Donde: $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son polinomios donde uno de ellos es por lo menos de n-orden, y el otro es a lo mucho de n-orden, la parte no-homogénea $y_1(x)$ tiene la forma:

$$y_1(x) = R_n(x) \cos(bx) + S_n(x) \sin(bx)$$

Donde: los polinomios $R_n(x)$ y $S_n(x)$ tienen las mismas propiedades de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ y sus coeficientes se deben calcular.

El método de la adivinanza; aunque, se lo debe aplicar cumpliendo ciertas características, es un método, que se utiliza bastante en la ingeniería, además, se elimina la integración; lo cual, en muchos casos facilita la resolución de la ecuación diferencial. En la búsqueda de la solución específica de una ecuación diferencial lineal, donde su lado derecho es complicada, es bueno tener en mente, el método de la adivinanza:

1. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son la parte no-homogénea de las ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g_1(x) \quad y \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = g_2(x)$$

La función $y = y_1(x) + y_2(x)$, es la parte no-homogénea de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g_1(x) + g_2(x)$$

2. Algunas veces, la ecuación diferencial lineal de primer orden, es mucho mas agradable expresarla, en función de y:

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$$

1.5.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales lineales de Primer Orden

1. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x^2 e^{-x^2} \tag{1.22}$$

La ecuación, es una ecuación diferencial lineal no-homogénea. Su solución, es la suma de la parte homogénea y de su parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2xy \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2x dx$$

Se integra ambos lados:

$$\frac{dy}{y} = -2x dx \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int -2x dx + C$$

$$\begin{aligned} \ln(y) &= -2\frac{x^2}{2} + C \longrightarrow \ln(y) = -x^2 + \ln(C) \\ \ln(y) - \ln(C) &= -x^2 \longrightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = -x^2 \\ y &= y^h = Ce^{-x^2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Se ha obtenido la solución general de la ecuación homogénea.

Su parte no-homogénea:

Se parte, de la solución general de la parte homogénea; en la cual, se considera a la constante, como una función en x:

$$y = C(x)e^{-x^2} \quad (1.24)$$

Se deriva ambos lados en función de x:

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} \quad (1.25)$$

Los dos últimos elementos, (1. 23) y (1.24) se reemplaza en la ecuación diferencial lineal (1.22):

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} &= 2x^2e^{-x^2} \\ C'(x)e^{-x^2} &= 2x^2e^{-x^2} \\ C'(x) &= 2x^2 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Se integra a ambos lados de la identidad (1.26):

$$C'(x) = 2x^2 \longrightarrow C(x) = \frac{2}{3}x^3$$

Se reemplaza en la parte no-homogénea, lo que permite obtener, es la ecuación específica de la parte no-homogénea de la ecuación diferencial lineal:

$$y_1(x) = y^{\sim h} = \frac{2}{3}x^3e^{-x^2}$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal tiene la forma ($y = y^h + y^{\sim h}$):

$$y = Ce^{-x^2} + \frac{2}{3}x^3e^{-x^2} \longrightarrow y = e^{-x^2} \left(C + \frac{2}{3}x^3 \right)$$

Donde: C es una constante cualquiera.

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x, \quad \text{Si } y(1) = 1 \quad (1.27)$$

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Se integra ambos lados de identidad:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} + C \rightarrow \ln(y) = -\ln(x) + \ln(C) \rightarrow \ln(y) = \ln\left(\frac{C}{x}\right)$$

$$y = y^h = \frac{C}{x}$$

Que representa, la solución general de la parte homogénea.

Su parte no-homogénea:

El coeficiente $p(x) = \frac{1}{x}$, en la ecuación diferencial, es diferente a una constante; por lo tanto, el método a aplicar, es la variación de la constante.

$$y = \frac{C(x)}{x} \quad (1.28)$$

Derivamos, la identidad en función de x:

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)\frac{1}{x} - C(x)\frac{1}{x^2} \quad (1.29)$$

Se reemplaza (1.28) y (1.29) en la ecuación diferencial lineal (1.27):

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x \rightarrow C'(x)\frac{1}{x} - C(x)\frac{1}{x^2} + \frac{C(x)}{x}\frac{1}{x} = e^x \rightarrow C'(x)\frac{1}{x} = e^x$$

Se integra la ambos lados de la identidad:

$$C(x) = \int xe^x$$

Se realiza la integración por partes de:

$$\int xe^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

Se reemplaza:

$$y_1(x) = y^{\sim h} = \frac{C(x)}{x} \rightarrow y_1(x) = y^{\sim h} = \frac{e^x(x-1)}{x}$$

La parte homogénea y la parte no-homogénea, se reemplaza en la ecuación diferencial lineal, $y = y^h + y^{\sim h}$:

$$y = y^h + y^{\sim h} = \frac{C}{x} + \frac{e^x(x-1)}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x}(C + (x-1)e^x)$$

Se reemplaza la condición inicial o de frontera en la solución general de la ecuación diferencial lineal:

$$y = \frac{1}{x}(C + (x-1)e^x) \rightarrow 1 = \frac{1}{1}(C + (1-1)e^1) \rightarrow C = 1$$

Se reemplaza en la solución general:

$$y = \frac{1}{x}(C + (x-1)e^x) \rightarrow y = \frac{1}{x}(1 + (x-1)e^x)$$

Se ha obtenido la solución específica de la ecuación diferencial lineal, que además, cumple con la condición inicial dada.

3. Resuelva la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos(y) + a \sin(2y)}$$

La ecuación dada no es una ecuación diferencial con respecto a ' y ' ; ya que, la variable, se encuentra en el argumento trigonométrico de las funciones trigonométricas, pero, se la puede tratar como una ecuación en función de ' x ', si se la transforma:

$$\frac{dx}{dy} = x \cos(y) + a \sin(2y) \rightarrow \frac{dx}{dy} - x \cos(y) = a \sin(2y) \quad (1.30)$$

Su parte homogénea:

$$\frac{dx}{dy} - x \cos(y) = 0 \rightarrow \frac{dx}{dy} = x \cos(y) \rightarrow \frac{dx}{x} = dy \cos(y)$$

Se integra ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \cos(y) dy + C \rightarrow \ln(x) = \sin(y) + C \rightarrow \ln(x) = \sin(y) + \ln(C)$$

$$\ln(x) - \ln(C) = \sin(y) \rightarrow \ln\left(\frac{x}{C}\right) = \sin(y) \rightarrow x = x^h = C e^{\sin(y)}$$

Se encontró la solución general de la parte homogénea.

Su parte no-homogénea:

$$x = C e^{\sin(y)} \rightarrow x = C(y) e^{\sin(y)}$$

Se deriva ambos lados en función de y:

$$\frac{dx}{dy} = C'(y) e^{\sin(y)} + C(y) e^{\sin(y)} \cos(y) \quad (1.31)$$

Se reemplaza (1.31) y (1.32) en la ecuación diferencial lineal (1.30):

$$\frac{dx}{dy} - x \cos(y) = a \sin(2y) \rightarrow C'(y) e^{\sin(y)} + C(y) e^{\sin(y)} \cos(y) - C(y) e^{\sin(y)} \cos(y) = a \sin(2y)$$

$$C'(y) e^{\sin(y)} = a \sin(2y) \rightarrow C'(y) = a \sin(2y) e^{-\sin(y)}$$

Se integra a ambos lados de la identidad con respecto a y:

$$C(y) = \int a \sin(2y) e^{-\sin(y)} dy \rightarrow C(y) = 2a \int \sin y \cos y \cdot e^{-\sin(y)} dy$$

Se integra, la integral del lado derecho:

$$\int \sin y \cos y \cdot e^{-\sin(y)} dy \rightarrow \text{si } \sin(y) = t \rightarrow \int t e^{-t} dt$$

$$\int t e^{-t} dt = -t e^{-t} - \int (-e^{-t} dt) = -t e^{-t} - e^{-t} = -e^{-t}(t + 1) = -e^{-\sin(y)}(\sin(y) + 1)$$

Finalmente:

$$C(y) = -2ae^{-\sin(y)}(\sin(y) + 1)$$

Se reemplaza:

$$x_1(y) = x = C(y)e^{\sin(y)} \longrightarrow x_1(y) = -2ae^{-\sin(y)}(\sin(y) + 1)e^{\sin(y)}$$

$$x_1(y) = x^h = -2a(\sin(y) + 1)$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal es:

$$x = x^h + x^{\sim h} = Ce^{\sin(y)} - 2a(\sin(y) + 1)$$

4. Resuelva la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 15x^2 + 4x + 4 \quad (1.32)$$

La solución a esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución a la parte homogénea y la solución a la parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = -3y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int 3dx + C \longrightarrow \ln(y) = -3x + \ln(C) \longrightarrow \ln(y) - \ln(C) = -3x$$

$$\ln\left(\frac{y}{C}\right) = -3x \longrightarrow y = y^h = Ce^{-3x} \quad (1.33)$$

La última expresión es la solución general a la parte homogénea de la ecuación diferencial.

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que, el elemento $p(x) = 3$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene un polinomio de segundo orden; por lo que, la forma de la parte no-homogénea sera un polinomio de segundo orden, donde sus coeficientes, se debe calcular.

$$y_1(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{Donde } a, b \text{ y } c \text{ se debe encontrar.} \quad (1.34)$$

Esta forma, se reemplaza (1.35) en la ecuación diferencial (1.33):

$$y_1(x) = ax^2 + bx + c \longrightarrow \frac{dy_1}{dx} = 2ax + b$$

Se reemplaza en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 15x^2 + 4x + 4 \longrightarrow 2ax + b + 3(ax^2 + bx + c) = 15x^2 + 4x + 4$$

Se simplifica, se ordena el lado izquierdo de la ecuación:

$$2ax + b + 3(ax^2 + bx + c) = 15x^2 + 4x + 4$$

$$3ax^2 + x(3b + 2a) + (b + 3c) = 15x^2 + 4x + 4$$

Lo que se tiene, es una identidad compuesta de dos polinomios de segundo orden, pero uno de cada lado de la identidad; por lo que, para que cumpla la identidad, los coeficientes del polinomio del lado derecho, tiene que ser iguales a los coeficientes del polinomio del lado izquierdo, con lo cual, se forma ecuaciones simples, que permiten el calculo de los coeficientes:

$$3a = 15 \rightarrow a = 5 \quad \text{Coeficientes de } x^2$$

$$3b + 2a = 4 \rightarrow 3b + 2 \cdot 5 = 4 \rightarrow 3b = 4 - 10 \rightarrow b = -2$$

$$b + 3c = 4 \rightarrow -2 + 3c = 4 \rightarrow 3c = 6 \rightarrow c = 2$$

Por lo tanto, la forma no-homogénea es:

$$y_1(x) = y^{\sim h} = ax^2 + bx + c \rightarrow y_1(x) = 5x^2 - 2x + 2 \quad (1.35)$$

La solución general de la ecuación diferencial es la suma de las soluciones (1.34 y 1.35):

$$y = y^h + y^{\sim h} = Ce^{-3x} + 5x^2 - 2x + 2$$

5. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}(x + 1) \quad (1.36)$$

La solución a esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución a la parte homogénea y la solución a la parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2y \rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx$$

Se integral a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int dx + C \rightarrow \ln(y) = 2x + \ln(C) \rightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = 2x \rightarrow y = y^h = Ce^{2x} \quad (1.37)$$

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que, el elemento $p(x) = 2$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene un producto de una función de base e y un polinomio de primer orden; por lo que, la forma de la parte no-homogénea, sera un polinomio de primer orden multiplicada por e^{3x} , donde sus coeficientes se debe calcular. Además, $p \neq a$ ($p = -2$; $a = 3$).

$$y = e^{3x}(ax + b) \rightarrow \frac{dy}{dx} = ae^{3x} + (ax + b)e^{3x}3$$

Se reemplaza en el ecuación diferencial:

$$ae^{3x} + (ax + b)e^{3x}3 - 2e^{3x}(ax + b) = e^{3x}(x + 1)$$

Se simplifica e^{3x} :

$$a + (ax + b)3 - 2(ax + b) = (x + 1)$$

Se simplifica y ordena ambos lados de la identidad:

$$a + 3(ax + b) - 2(ax + b) = (x + 1) \longrightarrow ax + b + a = x + 1$$

Igualemos los coeficientes de los polinomios de ambos lados de la identidad:

$$a = 1 \longrightarrow a + b = 1 \longrightarrow b = 0$$

Por lo tanto, la forma no-homogénea es:

$$y_1(x) = y^{\sim h} = e^{3x}(ax + b) \longrightarrow y_1(x) = e^{3x}x \quad (1.38)$$

La solución general de la ecuación diferencial es la suma de las soluciones 1.37 y 1.38:

$$y = y^h + y^{\sim h} = Ce^{2x} + e^{3x}x$$

6. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - 4y = e^{4x}(2x^2 + 1) \quad (1.39)$$

La solución a esta ecuación diferencial será la suma de la solución a la parte homogénea y la solución a la parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 4y \longrightarrow \frac{dy}{y} = 4dx$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int dx + C \longrightarrow \ln(y) = 4x + \ln(C) \longrightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = 4x \longrightarrow y = y^h = Ce^{4x} \quad (1.40)$$

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = 4$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene un producto de una función de base e y un polinomio de segundo orden; por lo que, la forma de la parte no-homogénea, será un polinomio de segundo orden multiplicada por e^{4x} , donde sus coeficientes se debe calcular. Además, $p = -a$. ($p = -4$; $a = 4$).

$$y = e^{4x}x(ax^2 + bx + c) \longrightarrow y = e^{4x}(ax^3 + bx^2 + cx)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4e^{4x}(ax^3 + bx^2 + cx) + (3ax^2 + 2bx + c)e^{4x}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - 4y = e^{4x}(2x^2 + 1)$$

$$4e^{4x}(ax^3 + bx^2 + cx) + (2ax^2 + bx + c)e^{4x} - 4(e^{4x}(ax^3 + bx^2 + cx)) = e^{4x}(2x^2 + 1)$$

Se simplifica el elemento e^{4x} :

$$4(ax^3 + bx^2 + cx) + (3ax^2 + 2bx + c) - 4(ax^3 + bx^2 + cx) = (2x^2 + 1)$$

Se simplifica y ordena con respecto a x:

$$4ax^3 + 4bx^2 + 4cx + 3ax^2 + 2bx + c - 4ax^3 - 4bx^2 - 4cx = 2x^2 + 1$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 2x^2 + 1$$

Para que, estos polinomios mantengan la identidad, los coeficientes de las variables respectivas tienen que ser identidades:

$$3a = 2; 2b = 0; c = 1 \rightarrow a = \frac{2}{3}; b = 0; c = 1$$

Los valores de a, b y c se reemplazan en la solución no-homogénea l:

$$y = xe^{4x}(ax^2 + bx + c) \rightarrow y = xe^{4x}\left(\frac{2}{3}x^2 + 0x + 1\right) \rightarrow y = y^{simh} = xe^{4x}\left(\frac{2}{3}x^2 + 1\right) \quad (1.41)$$

La solución general de la ecuación diferencial es la suma de las soluciones 1.40 y 1.41:

$$y = y^h + y^{\sim h} = Ce^{4x} + xe^{4x}\left(\frac{2}{3}x^2 + 1\right)$$

7. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 3e^{4x} \quad (1.42)$$

La solución a esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución a la parte homogénea y la solución a la parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \rightarrow \frac{dy}{y} = 5dx$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dy}{y} = 5 \int dx + C \rightarrow \ln(y) = 5x + \ln(C) \rightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = 5x \rightarrow y = y^h = Ce^{5x} \quad (1.43)$$

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = -5$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene un producto de una función de base e y una constante; por lo que, la forma de la parte no-homogénea, sera una constante multiplicada por e^{4x} , donde sus coeficientes, se debe calcular. Además, $p \neq -a$ ($p = -5$; $a = 4$).

$$y = me^{4x} \quad \text{Donde : } m \text{ hay que calcularlo.}$$

Se deriva con respecto a x, ambos lados de la identidad:

$$y = me^{4x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 4me^{4x}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 3e^{4x} \longrightarrow 4me^{4x} - 5me^{4x} = 3e^{4x}$$

Se simplifica e^{4x} :

$$4m - 5m = 3 \longrightarrow -m = 3 \longrightarrow m = -3$$

La solución específica a la parte no-homogénea es:

$$y = y^{\sim h} = me^{4x} \longrightarrow y = -3e^{4x} \quad (1.44)$$

La solución a la ecuación diferencial, es la suma de las dos partes: homogénea (1.43) y no-homogénea (1.44):

$$y = y^h + y^{\sim h} = Ce^{5x} - 3e^{4x}$$

8. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 6e^{3x} \quad (1.45)$$

La solución a esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución a la parte homogénea y la solución a la parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 3y \longrightarrow \frac{dy}{y} = 3dx$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dy}{y} = 3 \int dx + C \longrightarrow \ln(y) = 3x + \ln(C) \longrightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = 3x \longrightarrow y = y^h = Ce^{3x} \quad (1.46)$$

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = -3$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene un producto de una función de base e y una constante; por lo que, la forma de la parte no-homogénea sera una constante multiplicada por e^{3x} , donde sus coeficientes se debe calcular. Además, $p = -a$ ($p = -3$; $a = 3$).

$$y = mxe^{3x} \text{ Donde : } m \text{ hay que obtenerlo.}$$

Se deriva con respecto a x, ambos lados de la identidad:

$$y = mxe^{3x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 3mxe^{3x} + me^{3x}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 6e^{3x} \longrightarrow 3mxe^{3x} + me^{3x} - 3mxe^{3x} = 6e^{3x}$$

Se simplifica e^{3x} :

$$3mx + m - 3mx = 6 \longrightarrow m = 6$$

La solución específica a la parte no-homogénea es:

$$y = y^h = me^{3x} \longrightarrow y = y^h = 6xe^{3x} \quad (1.47)$$

La solución a la ecuación diferencial, es la suma de las dos partes: homogénea (1.46) y no-homogénea (1.47):

$$y = y^h + y^h = Ce^{3x} + 6xe^{3x}$$

9. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - y = 5\cos(x) - 3\sin(x) \quad (1.48)$$

La solución a esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución a la parte homogénea y la solución a la parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = y \longrightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + C \longrightarrow \ln(y) = x + \ln(C) \longrightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = x \longrightarrow y = y^h = Ce^x \quad (1.49)$$

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = -1$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene funciones trigonométricas; por lo que, la forma de la parte no-homogénea sera una función trigonométrica, donde sus coeficientes se debe calcular.

$$y = m\cos(x) + n\sin(x) \quad \text{Donde : } m, n \text{ se debe calcular.}$$

Se deriva la identidad con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = -m\sin(x) + n\cos(x)$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - y = 5\cos(x) - 3\sin(x)$$

$$-m \sin(x) + n \cos(x) - (m \cos(x) + n \sin(x)) = 5 \cos(x) - 3 \sin(x)$$

Se aplica propiedades de álgebra al lado derecho de la identidad: Asociativa y distributiva:

$$(n - m) \cos(x) - (n + m) \sin(x) = 5 \cos(x) - 3 \sin(x)$$

Para que la identidad se mantenga, los coeficientes de las funciones trigonométricas del lado derecho tienen que ser iguales a los coeficientes del lado izquierdo de las mismas funciones trigonométricas:

$$n - m = 5 \quad n + m = -3$$

Se resuelve el sistema y se obtiene los valores de n, m, que son: $n = 4$ y $m = -1$.

Se reemplaza en la ecuación de la parte no-homogénea:

$$y = y^h = m \cos(x) + n \sin(x) \rightarrow y = y^h = -\cos(x) + 4 \sin(x) \quad (1.50)$$

Que representa la solución específica de la parte no-homogénea.

Ahora se reemplaza en la ecuación diferencial que es la parte homogénea (1.49) y la no-homogénea (1.50):

$$y = y^h + y^{\sim h} = Ce^x - \cos(x) + 4 \sin(x)$$

Que es la solución general de la ecuación diferencial.

10. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}(\cos(x) + 2 \sin(x)) \quad (1.51)$$

La solución a esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución a la parte homogénea y la solución a la parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -2y \rightarrow \frac{dy}{y} = -2dx$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx + C \rightarrow \ln(y) = -2x + \ln(C) \rightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = -2x \rightarrow y = y^h = Ce^{-2x} \quad (1.52)$$

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = 2$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene dos funciones: funciones trigonométricas y una función exponencial. Por lo que, la forma de la parte no-homogénea, sera una función trigonométrica y una función exponencial, donde sus coeficientes se debe calcular.

$$y = e^{3x}(m \cos(x) + n \sin(x))$$

Donde: m,n se debe calcular.

Se deriva la identidad con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}(m \cos(x) + n \sin(x)) + e^{3x}(-m \sin(x) + n \cos(x))$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}(\cos(x) + 2 \sin(x))$$

$$\begin{aligned} 3e^{3x}(m \cos(x) + n \sin(x)) + e^{3x}(-m \sin(x) + n \cos(x)) + 2(e^{3x}(m \cos(x) + n \sin(x))) = \\ = e^{3x}(\cos(x) + 2 \sin(x)) \end{aligned}$$

Se aplica propiedades de álgebra al lado derecho de la identidad: Asociativa, distributiva. Se ordena y se simplifica el polinomio:

$$\begin{aligned} 3(m \cos(x) + n \sin(x)) + (-m \sin(x) + n \cos(x)) + 2((m \cos(x) + n \sin(x))) = (\cos(x) + 2 \sin(x)) \\ \cos(x)(3m + n + 2m) + \sin(x)(3n - m + 2n) = (\cos(x) + 2 \sin(x)) \end{aligned}$$

Para que la identidad, de los polinomios, se mantenga, los coeficientes de las funciones trigonométricas del lado derecho tienen que ser iguales a los coeficientes del lado izquierdo de las mismas funciones trigonométricas:

$$5m + n = 1; \quad 5n - m = 2$$

Se ha obtenido un sistema de 2×2 aplicando cualquiera de los métodos conocidos por el lector, se obtiene: $m = \frac{3}{26}; \quad n = \frac{11}{26}$

Se reemplaza estos valores en la parte no-homogénea:

$$y = y^{\sim h} = e^{3x}(m \cos(x) + n \sin(x)) \longrightarrow y = y^{\sim h} = e^{3x}\left(\frac{3}{26} \cos(x) + \frac{11}{26} \sin(x)\right) \quad (1.53)$$

Que representa la solución específica de la parte no-homogénea.

Ahora, con la parte homogénea (1.52) y la no-homogénea (1.53), que es la solución a la ecuación diferencial:

$$y = y^h + y^{\sim h} = Ce^{-2x} + e^{3x}\left(\frac{3}{26} \cos(x) + \frac{11}{26} \sin(x)\right)$$

Que es la solución general de la ecuación diferencial.

11. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + y = (x+1)\cos(x) + (2x+3)\sin(x) \quad (1.54)$$

La solución a esta ecuación diferencial, sera la suma de la solución a la parte homogénea y la solución a la parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = -y \longrightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx + C \rightarrow \ln(y) = -x + \ln(C) \rightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = -x \rightarrow y = y^h = Ce^{-x} \quad (1.55)$$

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = 1$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene dos funciones: funciones trigonométricas y una función de polinomios. Por lo que, la forma de la parte no-homogénea, sera el producto de una función trigonométrica y una función polinomial, donde sus coeficientes se deben calcular.

$$y = (a_1x + b_1)\cos(x) + (a_2x + b_2)\sin(x)$$

Donde : los coeficientes a_1, a_2, b_1 y b_2 . son constantes. Se deriva la identidad con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = a_1(\cos(x)) - (a_1x + b_1)\sin(x) + a_2\sin(x) + (a_2x + b_2)\cos(x)$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + y = (x+1)\cos(x) + (2x+3)\sin(x)$$

$$\begin{aligned} a_1(\cos(x)) - (a_1x + b_1)\sin(x) + a_2\sin(x) + (a_2x + b_2)\cos(x) + (a_1x + b_1)\cos(x) + (a_2x + b_2)\sin(x) = \\ = (x+1)\cos(x) + (2x+3)\sin(x) \end{aligned}$$

Se aplica propiedades de álgebra al lado derecho de la identidad: Asociativa, distributiva. Se ordena y se simplifica el polinomio:

$$\begin{aligned} \cos(x)[a_1 + b_2 + b_1] + x\cos(x)[a_2 + a_1] + \sin(x)[a_2 + b_2 - b_1] + x\sin(x)[a_2 - a_1] = \\ = x\cos(x) + \cos(x) + 2x\sin(x) + 3\sin(x) \end{aligned}$$

Para que la identidad se mantenga, los coeficientes de las funciones trigonométricas del lado derecho tienen que ser iguales a los coeficientes del lado izquierdo de las mismas funciones trigonométricas; por lo tanto, se obtiene las ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1 + b_2 + b_1 = 1 \\ a_2 + b_2 - b_1 = 3 \\ a_2 - a_1 = 2 \\ a_2 + a_1 = 1 \end{cases}$$

De la tercera y cuarta ecuación, se obtiene:

$$a_2 = \frac{3}{2}; \quad a_1 = -\frac{1}{2}$$

Con estos dos valores se reemplaza en la primera y segunda ecuación:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + b_2 + b_1 = 1 \\ \frac{3}{2} + b_2 - b_1 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b_2 + b_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ b_2 - b_1 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Del último sistema, se obtiene:

$$b_1 = 0 \text{ y } b_2 = \frac{3}{2}$$

Los valores calculados, se reemplaza en la parte no-homogénea de la ecuación diferencial:

$$y = y^{\sim h} = -\frac{1}{2}x \cos(x) + \frac{3}{2}(x+1) \sin(x) \quad (1.56)$$

Lo que representa, la solución específica de la parte no-homogénea de la ecuación diferencial. Con lo cual, se obtiene:

$$y = y^h + y^{\sim h} = Ce^{-x} - \frac{1}{2}x \cos(x) + \frac{3}{2}(x+1) \sin(x)$$

Que representa la solución general de la ecuación diferencial, que es la suma de su parte homogénea (1.55) y la no-homogénea (1.56).

1.5.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1. Encuentre la integral general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

b) $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = 2x$

2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = (x)^2$

c) $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = \sqrt{(x+1)^5}$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

d) $\frac{dy}{dx} + xy = x^3$

4. $\frac{dy}{dx} - y \tan(x) = 2 \sin(x)$

e) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x \sin(x)$

5. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = 3x+3$

f) $\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2} \sin(x)$

6. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = x$

g) $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} = 1+x^2$

7. $\frac{dy}{dx} + y \cos(x) = e^{-\sin(x)}$

h) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = e^{-x^2}$

8. $\frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin(x)$

i) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$

9. $\frac{dy}{dx} + y \tan(x) = \sin(2x)$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a) \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$$

$$a) 2x \frac{dy}{dx} - y = 3x^2$$

$$b) \frac{dy}{dx} - y = x \sin(x)$$

$$b) x(x-1) \frac{dy}{dx} + y = x^2(2x-1)$$

$$c) \frac{dy}{dx} - y = e^x$$

$$c) (1-x^2) \frac{dy}{dx} + xy = a$$

$$d) \frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$$

$$d) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3$$

$$e) \frac{dy}{dx} - \frac{5}{2}y = \frac{5}{2} \sin(x) + 2 \cos(x)$$

$$e) \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

$$f) \frac{dy}{dx} + 2y = 25x^2 e^{3x}$$

$$f) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2$$

$$g) \frac{dy}{dx} - 4y = (x+1)e^{4x}$$

$$g) \frac{dy}{dx} - y \tan(x) = 2 \cos^2(x)$$

$$h) \frac{dy}{dx} - y = e^x(\cos(x) + 3 \sin(x))$$

$$h) \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x^2+1} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

$$i) \frac{dy}{dx} + ay = ce^{bx}$$

$$i) \frac{dy}{dx} + \frac{ay}{x^2+1} = \frac{b}{(1+x^2)}$$

$$j) \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}$$

$$j) \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x^2+a^2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}$$

$$k) (x^2+1) \frac{dy}{dx} + xy = 1$$

$$k) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$l) (x^2+1) \frac{dy}{dx} + 2xy = 2x^2$$

$$l) \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x^2+1} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$m) x^2 \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}$$

$$m) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y$$

$$n) (x^2+1) \frac{dy}{dx} + xy = (x^2+1)x$$

$$n) 2x \frac{dy}{dx} - y = \frac{3}{2}x^2$$

$$\tilde{n}) (y^2-6x) \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\tilde{n}) x \frac{dy}{dx} - 2y = xe^{-\frac{1}{x}}$$

$$o) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+y^2} = 0$$

$$o) (1-x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 4$$

$$p) (2xy^3+y) \frac{dy}{dx} + 2y^2 - 4 = 0$$

$$p) \frac{dy}{dx} \cot(x) - y = 2 \cos^2(x) \cot(x)$$

$$q) x \ln(x) \frac{dy}{dx} - y = x^3(3 \ln(x) - 1)$$

$$q) \frac{dy}{dx} \cos(x) - y \sin(x) = \sin(2x)$$

3. Encontrar la integral general y la especifica de las ecuaciones diferenciales:

$$a) \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 3 \quad y(0) = 0$$

$$b) \frac{dy}{dx} + y \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2} \quad y(0) = 1$$

$$c) \frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2 \quad y(2) = 1$$

$$d) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2x^2 \quad y(1) = 3$$

$$e) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x \sin(x) \quad y(1) = 3$$

$$f) \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2} y = x \quad y(0) = \frac{1}{3}$$

$$g) \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} \quad y(0) = 1$$

$$h) \frac{dy}{dx} + y = \sin(x) \quad y(\pi) = \frac{1}{2}$$

$$i) \frac{dy}{dx} + y = 2x \quad y(1) = e^3$$

$$j) \frac{dy}{dx} - 3y = 6e^{3x} \quad y(1) = e^3$$

$$k) \frac{dy}{dx} - 5y = e^{5x} \quad y\left(\frac{1}{5}\right) = e$$

$$l) \frac{dy}{dx} - y = 5 \cos(x) - 3 \sin(x) \quad y(0) = 1$$

1.6. Ecuaciones Diferenciales No-lineales de Primer Orden. Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial de Bernoulli, se la conoce a la ecuación que tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

Donde: las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas, que tienen un intervalo común (a, b) , y ($\alpha \in \mathbb{R}$). Se observa que, si $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$ es respectivamente, la ecuación diferencial homogénea y la no-homogénea de una ecuación diferencial de primer orden. Por lo tanto, el análisis se lo realiza para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$.

La solución de una ecuación diferencial de Bernoulli, se lo hace por medio de un cambio de variable, para transformarle a una ecuación diferencial lineal de primer orden.

El cambio de variable tiene la forma:

$$u = y^{1-\alpha} \quad (1.57)$$

A la ecuación diferencial lineal se multiplica por $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \longrightarrow (1 - \alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + (1 - \alpha)p(x)y y^{-\alpha} = q(x)y^{\alpha}(1 - \alpha)y^{-\alpha}$$

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + (1 - \alpha)p(x)y^{1-\alpha} = q(x)(1 - \alpha)$$

Se tiene:

$$u = y^{1-\alpha}$$

Se deriva con respecto a x:

$$\frac{du}{dx} = (1 - \alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} \quad (1.58)$$

Se reemplaza las ecuaciones 1,57 y 1.58 en la ecuación diferencial de Bernoulli:

$$\frac{du}{dx} + (1 - \alpha)p(x)u = (1 - \alpha)g(x)$$

Si: $(1 - \alpha)p(x) = h(x)$ y $(1 - \alpha)g(x) = k(x)$ se puede escribir:

$$\frac{du}{dx} + h(x)u = k(x)$$

Por lo tanto, lo que se ha obtenido es una ecuación diferencial lineal de primer orden entre las variables u y x.

1.6.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - xy = -y^3 e^{-x^2}$$

El elemento y^{-3} del lado derecho de la ecuación diferencial permite concluir que, es una ecuación de Bernoulli. Donde: $p(x) = -x$; $q(x) = -e^{-x^2}$ y $\alpha = 3$

Primero, se la transforma a su forma lineal, para lo cual, la ecuación se divide para y^{-3} :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - xy = -y^3 e^{-x^2} &\longrightarrow \frac{\frac{dy}{dx} - xy}{y^3} = \frac{-y^3 e^{-x^2}}{y^3} \\ y^{-3} \left(\frac{dy}{dx} - xy \right) &= -e^{-x^2} \longrightarrow y^{-3} \frac{dy}{dx} - xy^{-2} = -e^{-x^2} \end{aligned}$$

La nueva variable : $u = y^{1-\alpha} \longrightarrow u = y^{1-3} \longrightarrow u = y^{-2}$.

Se deriva la ecuación con respecto a x y recordando que y esta en función de x:

$$u = y^{-2} \longrightarrow \frac{du}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx} \longrightarrow -\frac{1}{2} \frac{du}{dx} = y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

reemplazando en la ecuación diferencial con respecto a u:

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - xy^{-2} = -e^{-x^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \frac{du}{dx} - xu = -e^{-x^2} \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{du}{dx} + xu = e^{-x^2}$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial lineal y se la resuelve por uno de los métodos conocidos.

La ecuación es una ecuación diferencial lineal no-homogénea. Su solución es la suma de la parte homogénea y de su parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dx} + ux = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{du}{dx} = -xu \rightarrow \frac{du}{u} = -2xdx$$

Se integra ambos lados:

$$\frac{du}{u} = -2xdx \rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -2xdx + C \rightarrow \ln(u) = -2\frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln(u) = -x^2 + \ln(C) \rightarrow \ln(u) - \ln(C) = -x^2$$

$$\ln\left(\frac{u}{C}\right) = -x^2 \rightarrow u = u^h = Ce^{-x^2}$$

Se ha obtenido la solución general de la ecuación diferencial, en su parte homogénea.

Su parte no-homogénea:

Se parte de la solución general de la parte homogénea, en la cual, se considera a la constante como, un función en x:

$$u = C(x)e^{-x^2}$$

Se deriva ambos lados en función de x:

$$\frac{du}{dx} = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$$

Los dos últimos elementos se reemplaza en la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{1}{2} [C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}] + xC(x)e^{-x^2} = e^{-x^2}$$

$$C'(x)e^{-x^2} = 2e^{-x^2} \rightarrow C'(x) = 2 \rightarrow \int C'(x) = 2 \int dx \rightarrow C(x) = 2x$$

Se reemplaza en su parte no-homogénea:

$$u = u^h = C(x)e^{-x^2} \rightarrow u = 2xe^{-x^2}$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal es:

$$u = u^h + u^h = Ce^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \rightarrow u = e^{-x^2}(C + 2x)$$

Se regresa en función de y:

$$u = y^{-2} \rightarrow e^{-x^2}(C + 2x) = y^{-2} \rightarrow \frac{(C + 2x)}{e^{x^2}} = \frac{1}{y^2} \rightarrow y^2(C + 2x) = e^{x^2}$$

Que represente la solución general de la ecuación diferencial.

2. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}y = xy^{-\frac{1}{2}} \quad (1.59)$$

El elemento $y^{-\frac{1}{2}}$ del lado derecho de la ecuación diferencial permite concluir que, es una ecuación de Bernoulli. Donde: $p(x) = \frac{2}{3}$; $q(x) = x$ y $\alpha = -\frac{1}{2}$

Primero se la transforma a su forma lineal, para lo cual la ecuación se divide para $y^{-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}y}{y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{xy^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}} \rightarrow y^{\frac{1}{2}} \left[\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}y \right] = x \rightarrow y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = x$$

La nueva variable :

$$u = y^{1-\alpha} \rightarrow u = y^{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow u = y^{\frac{3}{2}} \quad (1.60)$$

Se deriva la ecuación con respecto a x, recordando que y esta en función de x:

$$u = y^{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{2}{3} \frac{du}{dx} = y^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (1.61)$$

Se reemplaza 1.60 y 1.61 en la ecuación diferencial de bernoulli 1.59 y se obtiene otra ecuación diferencial lineal con respecto a u:

$$y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = x \rightarrow \frac{2}{3} \frac{du}{dx} + \frac{2}{3}u = x \rightarrow \frac{du}{dx} + u = \frac{3}{2}x$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial lineal y se la resuelve por uno de los métodos conocidos, en este caso, como $p(x) = 1$; es decir una constante, se aplicará el método de la adivinanza.

La ecuación es una ecuación diferencial lineal no-homogénea. Su solución es la suma de la parte homogénea y de su parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{du}{dx} + u = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = -u \rightarrow \frac{du}{u} = -dx \rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int dx + C$$

$$\ln(u) = -x + \ln(C) \rightarrow \ln\left(\frac{u}{C}\right) = -x \rightarrow u = u^h = Ce^{-x}$$

Se ha obtenido la solución general de la ecuación diferencial en su parte homogénea.

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = 1$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene una función polinomial.

Por lo que, la forma de la parte no-homogénea, sera el producto de una función polinomial, donde sus coeficientes se deben calcular.

$$u = Ax + B \longrightarrow \frac{du}{dx} = A$$

$$\frac{du}{dx} + u = \frac{3}{2}x \longrightarrow A + Ax + B = \frac{3}{2}x$$

$$A = \frac{3}{2}; \quad A + B = 0 \longrightarrow B = -\frac{3}{2}$$

Los valores calculados, se reemplaza en la parte no-homogénea de la ecuación diferencial:

$$u = u^{\sim h} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$u = u^h + u^{\sim h} = Ce^{-x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

Se regresa a la variable:

$$u = y^{\frac{3}{2}} \longrightarrow Ce^{-x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = y^{\frac{3}{2}} \longrightarrow y^3 = \left(Ce^{-x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2$$

La última expresión represente la solución general de la ecuación diferencial.

3. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^2 \tag{1.62}$$

El elemento y^2 del lado derecho de la ecuación diferencial permite concluir que, es una ecuación de Bernoulli. Donde: $p(x) = 1$; $q(x) = x$ y $\alpha = 2$.

Primero, la ecuación se la transforma a su forma lineal, para lo cual la ecuación se divide para y^2 :

$$\frac{\frac{dy}{dx} + y}{y^2} = \frac{xy^2}{y^2} \longrightarrow y^{-2} \left[\frac{dy}{dx} + y \right] = x \longrightarrow y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} = x$$

La nueva variable :

$$u = y^{1-\alpha} \longrightarrow u = y^{1-2} \longrightarrow u = y^{-1} \tag{1.63}$$

Se deriva la ecuación con respecto a x, recordando que y esta en función de x:

$$u = y^{-1} \longrightarrow \frac{du}{dx} = (-1) \cdot y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} \longrightarrow \frac{du}{dx} = -y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{1.64}$$

Se reemplaza las ecuaciones 1.63 y 1.64 en la ecuación diferencial 1.62 y se obtiene una ecuación con respecto a u:

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} = x \longrightarrow -\frac{du}{dx} + u = x \longrightarrow \frac{du}{dx} - u = -x$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial lineal y se la resuelve por uno de los métodos conocidos, en este caso, como $p(x) = 1$; es decir, una constante, se aplicara el método de la adivinanza.

La ecuación es una ecuación diferencial lineal no-homogénea. Su solución es la suma de la parte homogénea y de su parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{du}{dx} - u = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = u \rightarrow \frac{du}{u} = dx \rightarrow \int \frac{du}{u} = \int dx + C$$

$$\ln(u) = x + \ln(C) \rightarrow \ln\left(\frac{u}{C}\right) = x \rightarrow u = u^h = Ce^x$$

Se ha obtenido la solución general de la ecuación diferencial en su parte homogénea.

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = 1$, es una constante; por lo que, permite utilizar el método de la adivinanza ó error/acierto. Al aplicar este método, se debe poner mucha atención a la estructura de la parte derecha de la ecuación diferencial. En este caso, se tiene una función polinomial. Por lo que, la forma de la parte no-homogénea, sera el producto de una función polinomial, donde sus coeficientes se deben calcular.

$$u = Ax + B \rightarrow \frac{du}{dx} = A$$

$$\frac{du}{dx} - u = -x \rightarrow A - (Ax + B) = -x$$

$$A = 1; \quad A - B = 0 \rightarrow B = 1$$

Los valores calculados se reemplaza en la parte no-homogénea de la ecuación diferencial:

$$u = u^{\sim h} = x + 1$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$u = u^h + u^{\sim h} = Ce^x + x + 1$$

Se regresa a la variable:

$$u = y^{-1} \rightarrow y^{-1} = Ce^x + x + 1 \rightarrow y = (Ce^{-x} + x + 1)^{-1}$$

La última expresión represente la solución general de la ecuación diferencial.

4. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2 \frac{\ln(x)}{x} \quad (1.65)$$

Con la condición inicial: $y(1) = 4$.

El elemento y^2 del lado derecho de la ecuación diferencial permite concluir que, es una ecuación de Bernoulli. Donde: $p(x) = \frac{1}{x}$; $q(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ y $\alpha = 2$

Primero, la ecuación se la transforma a su forma lineal, para lo cual la ecuación se divide para y^2 :

$$\frac{\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y}{y^2} = \frac{y^2 \frac{\ln(x)}{x}}{y^2} \rightarrow y^{-2} \left[\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y \right] = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln(x)}{x}$$

La nueva variable :

$$u = y^{1-\alpha} \rightarrow u = y^{1-2} \rightarrow u = y^{-1} \quad (1.66)$$

Se deriva la ecuación con respecto a x, recordando que y esta en función de x:

$$u = y^{-1} \rightarrow \frac{du}{dx} = (-1) \cdot y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (1.67)$$

$$\frac{du}{dx} = -y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Se reemplaza las ecuaciones 1.66 y 1.67 en la ecuación diferencial de Bernoulli (1.65)y se obtiene una ecuación diferencial con respecto a u:

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln(x)}{x} \rightarrow -\frac{du}{dx} + \frac{1}{x} u = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} u = -\frac{\ln(x)}{x}$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial lineal y se la resuelve por uno de los métodos conocidos, en este caso, como $p(x) = \frac{1}{x}$; es decir, una variable, se aplicara el método de la constante.

La ecuación es una ecuación diferencial lineal no-homogénea. Su solución es la suma de la parte homogénea y de su parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} u = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\ln(u) = \ln(x) + \ln(C) \rightarrow \ln\left(\frac{u}{C}\right) = \ln(x) \rightarrow u = u^h = C \cdot x$$

Se ha obtenido la solución general de la ecuación diferencial en su parte homogénea.

Su parte no-homogénea:

En la ecuación diferencial, se debe observar que el elemento $p(x) = \frac{1}{x}$, es una variable; por lo que, permite utilizar el método de la constante. Se parte de la solución general de la parte homogénea, pero ahora, se considera que la constante esta en función de x:

$$u = C(x) \cdot x$$

Se deriva la identidad con respecto a x:

$$u = C(x) \cdot x \rightarrow \frac{du}{dx} = C'(x) \cdot x + C(x)$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = -\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow C'(x) \cdot x = -\frac{\ln(x)}{x}$$

$$C'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2} \rightarrow \int C'(x) = \int -\frac{\ln(x)}{x^2} dx + C \rightarrow C(x) = -\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Se integra :

$$-\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}$$

Se reemplaza en la identidad:

$$u = C(x) \cdot x \rightarrow u = \left[\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \right] x \rightarrow u = u^h = \ln(x) + 1$$

Se obtuvo la solución general de la ecuación diferencial en su parte no-homogénea:
La solución de la ecuación diferencial es la suma de su parte homogénea más su parte no-homogénea:

$$u = u^h + u^{\sim h} = C \cdot x + \ln(x) + 1$$

Se regresa a la variable inicial:

$$u = y^{-1} \rightarrow y = \frac{1}{C \cdot x + \ln(x) + 1}$$

La última expresión representa la solución general de la ecuación diferencial.

1.6.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales. Ecuación Bernoulli

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$

1. $\frac{dy}{dx} + 2y \tan(x) = ay^2 \cot(x)$

b) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x^3y^3$

2. $\frac{dy}{dx} - (\frac{1}{2} - y^3)y \sin(x) = 0$

c) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ay^2 \ln(x)$

d) $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \sqrt{y}$

4. $(1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy = axy^2$

e) $x \frac{dy}{dx} - y = y^2$

5. $2xy \frac{dy}{dx} + x = y^2$

f) $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln(x)$

6. $x^2y^2 \frac{dy}{dx} + xy^3 = a^2$

g) $x \frac{dy}{dx} + y = xy^2 \ln(x)$

7. $(x - 2xy - y^2) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

2. Encontrar la integral general de las siguientes ecuaciones diferenciales y si el ejercicio esta acompañado de su condición inicial su integral especifica:

$$a) (x^2y^3 + xy)\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$b) \frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = -x^3y^2$$

$$c) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = -\frac{(x+1)^3}{2}y^3$$

$$d) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{3}y\sin(x) = -y^4\sin(x)$$

$$e) (1+x^2)\frac{dy}{dx} - xy = x^2y^2$$

$$f) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} + \frac{y^3}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$g) 2y\frac{dy}{dx} - x - y^2 = 0$$

$$h) \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)\frac{dy}{dx} = x$$

$$i) \frac{y'}{\sqrt{y}} + 4\sqrt{yx} = 2xe^{-x^2}$$

$$j) \frac{dy}{dx} - 9x^2y + 3(x^5 - x^2)\sqrt[3]{y^2} = 0$$

$$k) \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+a^2}y = \frac{2\sqrt{y}}{x^3}$$

$$l) \frac{dy}{dx} + y = -xy^2$$

$$m) \frac{dy}{dx} - xy = x^3y^2$$

$$n) \frac{dy}{dx} - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$$

$$\tilde{n}) x\frac{dy}{dx} + y = y^2\ln(x)$$

$$o) \frac{dy}{dx} + 2xy = 2x^3y^3$$

$$p) (1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2$$

$$q) x\frac{dy}{dx} + y = y^2\ln(x)$$

$$1. 3y^2\frac{dy}{dx} - ay^3 = x+1$$

$$2. x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$$

$$3. \frac{dy}{dx} - y = x\sqrt{y}$$

$$4. \frac{dy}{dx} - y\tan(x) = \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{y^2}$$

$$5. \frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2$$

$$6. \frac{dy}{dx} - y = -xy^2$$

$$7. 3x\frac{dy}{dx} - y = (3x\ln(x))y^4$$

$$8. \frac{dy}{dx}\cos(x) - y\sin(x) = y^4$$

$$9. \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2\frac{\ln(x)}{x} \quad y(1) = 1$$

$$10. \frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{xy^2}{1-x^2} \quad y(0) = 1$$

$$11. \frac{dy}{dx} - \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^2} \quad y(0) = 1$$

$$12. \frac{dy}{dx} + xy = xy^3 \quad y(0) = 2$$

$$13. 3x\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{x^2}{y^2} \quad y(1) = 2$$

$$14. x^2\frac{dy}{dx} + 2x^3y = y^2(1+2x^2) \quad y(1) = 2$$

$$15. 3x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3y^{-2} \quad y(0) = 1$$

$$16. x^2\frac{dy}{dx} + 2x^3y = y^2(1+2x^2) \quad y(1) = 1$$

$$17. (1+x^2)\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^2 \quad y(1) = 1$$

$$18. 8x\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}} \quad y(0) = 1$$

1.7. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden. Ecuación Exacta

La ecuación diferencial exacta tiene la forma:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.68)$$

El lado izquierdo de la ecuación (1.68), se la compara con un diferencial de una función de dos variables $F(x, y)$, el cual tiene la forma:

$$f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = \Delta z \quad (1.69)$$

La ecuación (1.69) se la puede comparar con la ecuación (1.68), en el momento en el cual, $\Delta = 0$. Esto es posible ya que, las ecuaciones diferenciales ordinarias, se encuentran en el plano Oxy, lo que significa que, en el eje ' z ' no se tiene resultado alguno de una ecuación diferencial ordinaria. De lo escrito se puede obtener:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = 0 \quad (1.70)$$

La solución general de esta ecuación (1.70), que es una función primitiva $F(x, y)$ y sería igual a una constante, ya que al derivarla daría igual a cero; es decir:

$$F(x, y) = C \quad (1.71)$$

Donde C es una constante cualquiera. La función $F(x, y)$ es cualquier función primitiva del sistema de dos funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$. Lo que permite igualar las dos ecuaciones y se tiene; es decir:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad y \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

De la teoría de integrales de superficie, se conoce que, la condición suficiente y necesaria para la existencia de la función primitiva $F(x, y)$ del sistema de funciones $P(x, y)$ o $Q(x, y)$ es la condición de continuidad de las funciones $P(x, y)$, $Q(x, y)$. Si $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ están en un plano uniforme esta condición se lo define con la ecuación:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

Para encontrar la integral general de la ecuación exacta, es suficiente encontrar una función primitiva cualquiera del sistema de funciones $P(x, y)$ o $Q(x, y)$ integrando cualquiera de ellas y su constante, esta en función del diferencial de la otra variable.. La función primitiva $F(x, y)$ se encuentra del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad y \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

Este sistema se lo encuentra al igualar la forma de una ecuación diferencial exacta con el diferencial de una función de dos variables $F(x, y)$; es decir:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy$$

Para que esta identidad se cumpla, los elementos de los mismos diferenciales de la identidad se igualan:

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad y \quad Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

1.7.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones diferenciales Exactas

1. Resuelva la ecuación diferencial:

$$e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$$

En la ecuación se tiene que:

$$P(x, y) = e^{-y} \quad y \quad Q(x, y) = 1 - xe^y$$

Se obtiene las derivadas parciales de:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Lo que nos indica que, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial exacta y además, significa que existe una función primitiva $F(x, y)$; tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-y} \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - xe^{-y}$$

De estas ecuaciones se obtiene $F(x, y)$. Para lo cual, se integra una de ellas, se trata de escoger la mas simple en su estructura, por ejemplo, la de la izquierda, la cual se integra con respecto x y se mantiene constante y :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-y} \rightarrow \int \frac{\partial F}{\partial x} = - \int e^{-y} + \varphi(y) \rightarrow F(x, y) = xe^{-y} + \varphi(y)$$

Donde: $\varphi(y)$ es una función derivable, que juega como una constante de integración, ahora derivamos la última ecuación con respecto a y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -xe^{-y} + \varphi'(y)$$

Se tiene dos elementos idénticos de $\frac{\partial F}{\partial y}$ los cuales igualamos:

$$1 - xe^{-y} = -xe^{-y} + \varphi'(y) \rightarrow 1 = \varphi'(y) \rightarrow \varphi(y) = y + C_1$$

Se reemplaza en $F(x, y)$:

$$F(x, y) = xe^{-y} + \varphi(y) \rightarrow F(x, y) = xe^{-y} + y + C_1$$

En consecuencia, la integral general de la ecuación diferencial exacta tiene la forma:

$$xe^{-y} + y + C_1 = C_2 \longrightarrow xe^{-y} + y = C_2 - C_1 \longrightarrow xe^{-y} + y = C$$

Donde: $C = C_2 - C_1$ es una constante cualquiera.

2. Resuelva la ecuación diferencial:

$$2x \cos^2(y) dx + (2y - x^2) \sin(2y) dy = 0 \quad \text{si } y(0) = 1$$

En la ecuación se tiene que:

$$P(x, y) = 2x \cos^2(y) \quad y \quad Q(x, y) = (2y - x^2) \sin(2y)$$

Se obtiene las derivadas parciales de:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4x \cos(y) \sin(y) = -2x \sin(2y); \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \sin(2y)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Lo que nos indica que, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial exacta y además, significa que existe una función primitiva $F(x, y)$; tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \cos^2(y) \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = (2y - x^2) \sin(2y)$$

De estas ecuaciones se obtiene $F(x, y)$. Para lo cual, se integra una de ellas, se trata de escoger la mas simple en su estructura, por ejemplo, la de la izquierda, la cual se integra con respecto a x y se mantiene constante y :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \cos^2(y) \longrightarrow \int \frac{\partial F}{\partial x} = \int 2x \cos^2(y) + \varphi(y) \longrightarrow F(x, y) = x^2 \cos^2(y) + \varphi(y)$$

Donde: $\varphi(y)$ es una función derivable, que juega como una constante de integración, ahora derivamos la última ecuación con respecto a y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2 \cos(y) \sin(y) + \varphi'(y)$$

Se tiene dos elementos idénticos de $\frac{\partial F}{\partial y}$ los cuales igualamos:

$$(2y - x^2) \sin(2y) = -2x^2 \cos(y) \sin(y) + \varphi'(y) \longrightarrow 2y = \varphi'(y) \longrightarrow \varphi(y) = y^2 + C_1$$

Se reemplaza en $F(x, y)$:

$$F(x, y) = x^2 \cos^2(y) + \varphi(y) \longrightarrow F(x, y) = x^2 \cos^2(y) + y^2 + C_1$$

En consecuencia, la integral general de la ecuación diferencial exacta tiene la forma:

$$x^2 \cos^2(y) + y^2 + C_1 = C_2 \longrightarrow x^2 \cos^2(y) + y^2 = C_2 - C_1 \longrightarrow x^2 \cos^2(y) + y^2 = C$$

Donde: $C = C_2 - C_1$ es una constante cualquiera.

En este momento, se puede reemplazar la condición, se tiene que:

$$0^2 \cos^2(1) + 1 = C \longrightarrow C = 1$$

Se reemplaza en la integral (solución) general de la ecuación diferencial para obtener la solución (integral) específica de la ecuación diferencial:

$$x^2 \cos^2(y) + y^2 = 1$$

1.7.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales. Ecuación Exacta

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x - y + (2y - x) \frac{dy}{dx} = 0$

a) $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3) \frac{dy}{dx} = 0$

b) $x + y + (2y + x) \frac{dy}{dx} = 0$

b) $x^2 - 4xy^2 - 2y^2 + (y^2 - 4xy - 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0$

c) $x^2 + y + (x - 2y) \frac{dy}{dx} = 0$

c) $xy^2 + (2y^3 + 3y^2 - 8y + x^2y - 9) \frac{dy}{dx} = 0$

d) $3x^2 + y^2 + 2y(x - 1) \frac{dy}{dx} = 0$

d) $e^x(1 + e^y) + e^y(1 + e^y) \frac{dy}{dx} = 0$

e) $2x - y + (4y - x) \frac{dy}{dx} = 0$

e) $y^3 + 2xy^2 + (2x^2y + 3xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$

f) $x + y + (x - y) \frac{dy}{dx} = 0$

f) $\frac{x - y}{x^2 + y^2} + \frac{x + y}{x^2 + y^2} \frac{dy}{dx} = 0$

g) $3x^2 - 2y + (3y^2 - 2x) \frac{dy}{dx} = 0$

g) $\frac{1}{y} + x - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0$

h) $\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0$

h) $2xy + 3y^2 + (x^2 + 6xy - 3y^2) \frac{dy}{dx} = 0$

i) $e^y - (2y - xe^y) \frac{dy}{dx} = 0$

i) $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)dy = 0$

j) $\frac{x + 2y}{(x + y)^2} + \frac{y}{(x + y)^2} \frac{dy}{dx} = 0$

j) $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0$

k) $(x^3 - xy^2)dx - x^2ydy = 0$

k) $(6x - 2y)dx + (3y^2 - 2x)dy = 0$

l) $yx^{y-1}dx + x^y \ln(x)dy = 0$

l) $(3x^2 + y^2)dx + (2xy - y)dy = 0$

1. $\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \frac{dy}{dx} = 0$
2. $\ln(y) - 2x + \left(\frac{x}{y} - 2y\right) \frac{dy}{dx} = 0$
3. $1 + e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$
4. $\frac{x dx}{x^2 + y^2} + \left(\frac{y}{x^2 + y^2 - 1}\right) dy = 0$
5. $\frac{dx}{y} + \frac{e^y(y-1) - x}{y^2} dy = 0$
6. $(3x^2 - e^y)dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$
7. $(\ln(y) - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$
1. $(4x^3 + 2xy^2 + 1)dx + (2x^2y - 1)dy = 0$
2. $(3xy^2 - x^2)dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)dy = 0$
3. $\frac{x}{x^2 + y^2} + y + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x\right) \frac{dy}{dx} = 0$
4. $\left(\frac{\sin(2x)}{y} + x\right) + \left(y - \frac{\sin^2(x)}{y^2}\right) \frac{dy}{dx} = 0$
5. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 - y + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{dy}{dx} = 0$
6. $x((x^2 + y^2) - 4) + y((x^2 + y^2) + 4) \frac{dy}{dx} = 0$

1.8. Ecuaciones Diferenciales con Factor Integrador.

Si dada es la ecuación:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.72)$$

La cual, no es una ecuación diferencial exacta, pero sus funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son definidas i continuas en un dominio D , se puede aplicar la definición:

Definición: Si se considera una función $\mu(x, y)$ continua y diferente de cero en el dominio D , se llama factor integrador de la ecuación diferencial no-exacta, cuando a la ecuación (1.72) se lo multiplica por la función $\mu(x, y)$, es decir:

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad (1.73)$$

La ecuación diferencial no-exacta (1.73) se transforma en una ecuación diferencial exacta (1.72); por lo tanto, esta ecuación debe cumplir las características de una ecuación diferencial exacta, que son:

$$\frac{\partial(\mu(x, y) \cdot P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x, y) \cdot Q(x, y))}{\partial x} \quad (1.74)$$

Lo que indica la ecuación (1.74), es que, para transformar y resolver de la ecuación diferencial no-exacta a una ecuación diferencial exacta es encontrar de alguna forma el $\mu(x, y)$. En la practica el encontrar el $\mu(x, y)$ de dos variables es bastante complicado y tedioso, esto es, por el dominio de la ecuación. El calculo de $\mu(x, y)$ se lo hará para tres casos:

1. Primer caso: El μ depende exclusivamente de una variable, en este caso de ' x ', sera $\mu(x)$. Se parte de la ecuación (1.74), todos sus elementos están en función de dos variables y presentan el producto entre dos de ellas; por lo cual, se aplica el teorema del producto:

$$\frac{\partial(\mu(x))}{\partial y} \cdot P(x, y) + \mu(x) \cdot \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x))}{\partial x} \cdot Q(x, y) + \mu(x) \cdot \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (1.75)$$

Donde $\frac{\partial(\mu(x,y))}{\partial y}$ esta solo en función ' x ' ; por lo tanto, es igual a cero y después aplicar distributiva, asociativa y pasa al otro elemento, se tiene:

$$\mu(x) \cdot \left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right] = \frac{\partial(\mu(x))}{\partial x} \cdot Q(x,y) \quad (1.76)$$

Por lo tanto:

$$\mu(x) \frac{\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right]}{Q(x,y)} = \frac{\partial(\mu(x))}{\partial x}$$

Finalmente, se puede escribir:

$$\frac{\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right]}{Q(x,y)} \partial x = \frac{\partial(\mu(x))}{\mu(x)}$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial parcial de variables separables, al integrar se obtiene:

$$\ln \mu(x) = \int \left[\frac{\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right]}{Q(x,y)} \right] dx \quad (1.77)$$

De la ecuación 1.76, se puede obtener una formula para el calculo de $\mu(x)$ que seria:

$$\mu(x) = e^{\int \left[\frac{\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right]}{Q(x,y)} \right] dx} \quad (1.78)$$

2. Segundo caso: El μ depende exclusivamente de una variable, en este caso de ' y ' y ' , sera $\mu(y)$. Se parte de la ecuación (1.74), todos sus elementos están en función de dos variables y presentan el producto entre dos de ellas; por lo cual, se aplica el teorema del producto:

$$\frac{\partial(\mu(y))}{\partial y} \cdot P(x,y) + \mu(y) \cdot \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(y))}{\partial x} \cdot Q(x,y) + \mu(y) \cdot \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad (1.79)$$

Donde $\frac{\partial(\mu(y))}{\partial x}$ esta solo en función ' y ' ; por lo tanto, es igual a cero y después aplicar distributiva, asociativa y pasa al otro elemento, se tiene:

$$\mu(y) \cdot \left[- \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial(\mu(y))}{\partial y} \cdot P(x,y) \quad (1.80)$$

Por lo tanto:

$$\mu(y) \frac{\left[- \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) \right]}{P(x,y)} = \frac{\partial(\mu(y))}{\partial y}$$

Finalmente, se puede escribir:

$$\left[- \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) \right] \frac{dy}{P(x,y)} = \frac{\partial(\mu(y))}{\mu(y)}$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial parcial de variables separables, al integrar se obtiene:

$$\ln \mu(y) = \int \left[- \frac{\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right]}{P(x,y)} \right] dy \quad (1.81)$$

De la ecuación 1.81, se puede obtener una formula para el calculo de $\mu(x)$ que seria:

$$\mu(y) = e^{\int \left[- \frac{\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right]}{Q(x,y)} \right] dy} \quad (1.82)$$

Las ecuaciones (1.78 y 1.82) permite calcular $\mu(x)$ o $\mu(y)$ cuando solo están en función de una sola variable.

3. Tercer caso: El análisis de $\mu(x,y)$ en la practica es complicado, en este libro se realiza un análisis, que si aparece en al practica y ademas, facilita el calculo de $\mu(x,y)$ según la relación:

$$\mu(x,y) = e^{\int f(x)dx} \cdot e^{\int g(y)dy} \quad (1.83)$$

Donde $f(x)$, $g(y)$ son funciones básicas, lo mas simple posible y este es, el paso en que nos facilita el calculo de $\mu(x,y)$. Para el calculo de $f(x)$ y $g(y)$, se utiliza:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = Q(x,y)f(x) - P(x,y)g(y) \quad (1.84)$$

Como se ha indicado las funciones $f(x)$ o $g(y)$, son funciones básicas; pero además, son elementos que hay que adivinar, para lo cual, se realiza un análisis basado en la observación de la estructura de la ecuación del lado izquierdo y ver con que función se podría igualar para obtener una identidad. Los ejercicios presentados, dará una mejor idea de la forma como se calcula $\mu(x,y)$

1.8.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales con un Factor Integrador.

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$(3x^4y + x^2y^3 + 6xy)dx + 3(x^2 + y^2)dy = 0$$

En este caso se tiene:

$$P(x, y) = 3x^4y + x^2y^3 + 6xy \quad Q(x, y) = 3(x^2 + y^2)$$

Se obtiene las derivadas parciales:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^4 + 3x^2y^2 + 6x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x$$

Fácilmente se concluye que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por lo que, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial no-exacta, se debe encontrar el factor integrante para transformarla a una ecuación diferencial exacta, para lo cual:

$$A(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \rightarrow A(x) = \frac{3x^4 + 3x^2y^2 + 6x - 6x}{3(x^2 + y^2)} = \frac{3x^2(x^2 + y^2)}{3(x^2 + y^2)} = x^2$$

Como se puede ver $A(x)$ depende únicamente de x . En ese caso, el factor integrante de la ecuación diferencial depende únicamente de la variable x y se lo expresa de acuerdo a la siguiente forma:

$$\mu(x) = e^{\int A(x)dx} \rightarrow \mu(x) = e^{\int x^2 dx} \rightarrow \mu(x) = e^{\frac{x^3}{3}}$$

Ahora se multiplica ambos lados de la ecuación diferencial no-exacta:

$$(3x^4 + x^2y^3 + 6xy)e^{\frac{x^3}{3}}dx + 3(x^2 + y^2)e^{\frac{x^3}{3}}dy = 0$$

Esta ecuación diferencial es una ecuación diferencial exacta. Se la resuelve por el método conocido. En la ecuación se tiene que:

$$P(x, y) = (3x^4y + x^2y^3 + 6xy)e^{\frac{x^3}{3}} \quad y \quad Q(x, y) = 3(x^2 + y^2)e^{\frac{x^3}{3}}$$

Se obtiene las derivadas parciales de:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^4e^{\frac{x^3}{3}} + 6xe^{\frac{x^3}{3}} + 3x^2y^2e^{\frac{x^3}{3}}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^4e^{\frac{x^3}{3}} + 6xe^{\frac{x^3}{3}} + 3x^2y^2e^{\frac{x^3}{3}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Lo que nos indica que, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial exacta y además, significa que, existe una función primitiva $F(x, y)$; tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (3x^4y + x^2y^3 + 6xy)e^{\frac{x^3}{3}} \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)e^{\frac{x^3}{3}}$$

De estas ecuaciones se obtiene $F(x,y)$. Para lo cual, se integra una de ellas, se trata de escoger la mas simple en su estructura, por ejemplo, la de la derecha, la cual se integra con respecto y , se mantiene constante x : $\frac{\partial F}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)e^{\frac{x^3}{3}} \rightarrow F(x,y) =$

$$\int 3(x^2 + y^2)e^{\frac{x^3}{3}} dy = \int 3x^2e^{\frac{x^3}{3}} dy + \int 3y^2e^{\frac{x^3}{3}} dy$$

$$F(x,y) = 3x^2e^{\frac{x^3}{3}}y + y^3e^{\frac{x^3}{3}} + \varphi(x)$$

Donde: $\varphi(x)$ es una función derivable, que juega como una constante de integración, ahora derivamos la última ecuación con respecto a x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6xye^{\frac{x^3}{3}} + 3x^2ye^{\frac{x^3}{3}}\frac{3x^2}{3} + 3y^3e^{\frac{x^3}{3}}\frac{3x^2}{3} + \varphi'(x) \rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6xye^{\frac{x^3}{3}} + 3x^4ye^{\frac{x^3}{3}} + y^3e^{\frac{x^3}{3}}x^2 + \varphi'(x)$$

Se tiene dos elementos idénticos de $\frac{\partial F}{\partial y}$ los cuales igualamos:

$$(3x^4y + x^2y^3 + 6xy)e^{\frac{x^3}{3}} = 6xye^{\frac{x^3}{3}} + 3x^4ye^{\frac{x^3}{3}} + y^3e^{\frac{x^3}{3}}x^2 + \varphi'(y)$$

$$3x^4ye^{\frac{x^3}{3}} + x^2y^3e^{\frac{x^3}{3}} + 6xye^{\frac{x^3}{3}} = 6xye^{\frac{x^3}{3}} + 3x^4ye^{\frac{x^3}{3}} + y^3e^{\frac{x^3}{3}}x^2 + \varphi'(y)$$

Se simplifica y queda:

$$\varphi'(x) = 0$$

$$\varphi(x) = C_1$$

$$F(x,y) = 3x^2e^{\frac{x^3}{3}}y + y^3e^{\frac{x^3}{3}} + \varphi(x) \rightarrow F(x,y) = 3x^2e^{\frac{x^3}{3}}y + y^3e^{\frac{x^3}{3}} + C_1$$

$$F(x,y) = 3x^2e^{\frac{x^3}{3}}y + y^3e^{\frac{x^3}{3}} + C_1 = C \rightarrow F(x,y) = ye^{\frac{x^3}{3}}(3x^2 + y^2) = C_2 - C_1 = C$$

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$2x \tan(y) dx + (x^2 - 2 \sin(y)) dy = 0$$

En la ecuación se tiene que:

$$P(x,y) = 2x \tan(y) \quad y \quad Q(x,y) = (x^2 - 2 \sin(y))$$

Se obtiene las derivadas parciales de:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{\cos^2(y)}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Lo que nos indica que, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial no-exacta, se debe encontrar el factor integrante, para transformarla a una ecuación diferencial exacta, para lo cual:

$$B(y) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P(x, y)} \rightarrow B(y) = -\frac{\left(\frac{2x}{\cos^2(y)}\right) - 2x}{2x \tan(y)} \rightarrow B(y) = -\frac{\tan^2(y)}{\tan(y)} = -\tan(y)$$

Como se puede ver, $B(y)$ depende únicamente de y . En ese caso, el factor integrante de la ecuación diferencial depende únicamente de la variable y , se lo expresa de acuerdo a la siguiente forma:

$$\mu(x) = e^{\int B(y) dy} \rightarrow \mu(x) = e^{-\int \tan(y) dy} \rightarrow \mu(x) = e^{\ln(\cos(y))} \rightarrow \mu(x) = \cos(y)$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación no-exacta por $\cos(y)$, se obtiene:

$$2x \tan(y) \cos(y) dx + (x^2 - 2 \sin(y)) \cos(y) dy = 0$$

$$2x \sin(y) dx + (x^2 \cos(y) - 2 \sin(y) \cos(y)) dy = 0$$

$$2x \sin(y) dx + (x^2 \cos(y) - \sin(2y)) dy = 0$$

La última ecuación diferencial, ya es una ecuación diferencial exacta. Por el método conocido, se la puede resolver.

La ecuación diferencial a resolver:

$$2x \sin(y) dx + (x^2 \cos(y) - \sin(2y)) dy = 0$$

$$P(x, y) = 2x \sin(y); \quad Q(x, y) = (x^2 \cos(y) - \sin(2y))$$

Se obtiene las derivadas parciales de $P(x, y)$ con respecto a y , $Q(x, y)$ con respecto a x :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos(y) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cos(y)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Lo que nos indica que, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial exacta y además, significa que, existe una función primitiva $F(x, y)$; tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \sin(y) \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 \cos(y) - \sin(2y))$$

De estas ecuaciones se obtiene $F(x,y)$. Para lo cual, se integra una de ellas, se trata de escoger la mas simple en su estructura, por ejemplo, la de la izquierda, la cual se integra con respecto x y se mantiene constante y :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \sin(y) \longrightarrow \int \frac{\partial F}{\partial x} = \int 2x \sin(y) + \varphi(y) \longrightarrow F(x,y) = x^2 \sin(y) + \varphi(y)$$

Donde: $\varphi(y)$ es una función derivable, que juega como una constante de integración, ahora derivamos la última ecuación con respecto a y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \cos(y) + \varphi'(y)$$

Se tiene dos elementos idénticos de $\frac{\partial F}{\partial y}$ los cuales igualamos:

$$\begin{aligned} x^2 \cos(y) - \sin(2y) &= x^2 \cos(y) + \varphi'(y) \longrightarrow -\sin(2y) = \varphi'(y) \\ \varphi(y) &= \frac{1}{2} \cos(2y) + C_1 \end{aligned}$$

Se reemplaza en la ecuación $F(x,y)$:

$$F(x,y) = x^2 \sin(y) + \varphi(y) \longrightarrow F(x,y) = x^2 \sin(y) + \frac{1}{2} \cos(2y) + C_1$$

La solución sera:

$$x^2 \sin(y) + \frac{1}{2} \cos(2y) + C_1 = C_2 \longrightarrow x^2 \sin(y) + \frac{1}{2} \cos(2y) = C_2 - C_1 = C$$

Donde: $C_2 - C_1 = C$ Es una consta cualquiera.

1.8.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales. Ecuación con factor Integrador

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$

b) $y^2dx + (xy + 1)dy = 0$

c) $(x - y^2)dx + 2xydy = 0$

d) $xydx + (x^2 - y^2 + 1)dy = 0$

e) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$

f) $2xy \ln(y)dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1})dy = 0$

g) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

1. $(x^4 \ln(x) - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$

2. $(x + \sin(x) + \sin(y))dx + \cos(y)dy = 0$

3. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

4. $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2y)dy = 0$

5. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

6. $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$

7. $(x \cos(y) - y \sin(y))dy + (x \sin(y) + y \cos(y))dx = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a) x^2 + y - x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$b) x^2 - y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$c) xy^2 + y - x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$d) x^2 + y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$e) e^{2x} - y^2 + y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$f) x^2 - 3y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$g) y^2 + (xy - 1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$h) y^2 + (x^2 - 2xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$i) 2xy^2 - y + (y^2 + x + y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$j) y(2 + xy^2) + x(1 + xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$k) 2x \tan(y) + (x^2 - 2 \sin(y)) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$l) 1 + 3x^2 \sin(y) - x \cot(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$m) \sin(x) + e^y + \cos(x) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$n) x \sin(y) + y + (x^2 \cos(y) + x \ln(x)) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\tilde{n}) \left(\frac{x}{y} + \frac{2}{3x} \right) + \left(\frac{2}{3y} - \frac{1}{xy} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$o) \left(\frac{2x}{y^2} - \frac{1}{2x} \right) + \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$p) \left(\frac{y}{x} + \frac{2}{3y} \right) + \left(\frac{2}{3y} - \frac{1}{xy} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$q) \left(\frac{x}{y} - \frac{2}{3x} \right) + \left(\frac{2}{3y} + \frac{1}{xy} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1. \left(\frac{2y}{x^2} - \frac{1}{2y} \right) + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2. 3 + \left(x - \frac{1}{x^2 e^y} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3. \frac{x^2}{y} + 3y + \left(\frac{y^2}{x} + 3x \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4. \frac{xy}{e^y} + \left(xy - \frac{x^2 y}{e^y} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$5. \frac{1}{x} + \left(1 - \frac{2y}{x e^y} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$6. y^2 + x - y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$7. y^2 - x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$8. yx^2 + x - y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$9. yx^2 - x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$10. \frac{1}{y} + \left(1 - \frac{2x}{y e^x} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$11. \frac{x}{e^y} + \left(x - \frac{x^2}{e^y} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$12. \frac{2x(1 + e^y)}{e^y(1 + x^2)} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$13. \frac{2y(1 + e^x)}{e^x(1 + y^2)} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$14. \cos(y) + \left(\frac{y}{x \cos(y)} - x \sin(y) \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$15. \left(\sin(4y) + \frac{2}{x} \sin(2y) \right) - 2x \sin^2(2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$16. (2x^2 + 3xy - 4x) \frac{dy}{dx} + 3y - 2xy - 3y^2 = 0$$

$$17. (xy - y^2)dx - (x^2 2xy)dy = 0$$

$$18. 1 + (x \tan(y) - \frac{1}{\cos(y)}) \frac{dy}{dx} = 0$$

1.9. Ecuaciones Diferenciales de Clairaut

La ecuación diferencial de Clairaut, se llama a la ecuación de la forma:

$$y = xy' + f(y') \quad (1.85)$$

Donde: f es una función continua, derivable y diferente de la constante en un determinado intervalo. La ecuación de Clairaut, se la resuelve utilizando el método de la derivada. Es decir, derivando la ecuación de Clairaut a ambos lados con respecto a x :

$$y = xy' + f(y') \longrightarrow y' = y' + xy'' + f'(y')y'' \quad (1.86)$$

De donde, simplificando y ordenando la ecuación:

$$y''(x + f'(y')) = 0 \quad (1.87)$$

El lado izquierdo (1.87) esta formado por dos factores, por lo tanto, se tiene:

1. **Primer caso:** $y'' = 0$, al integrar esta identidad se obtiene: $y' = C$. Si se considera, que la función f' es continua derivable y cumple con la ecuación de Clairaut (1.85) en consecuencia $y' = C$ en este caso, se tendría:

$$y = Cx + f(C) \quad (1.88)$$

Esta ecuación (1.88), presenta la integral general de la ecuación de Clairaut (1.85). La integral (solución) general de la ecuación de Clairaut, se obtiene al reemplazar en la ecuación $y' = C$. Desde el punto de vista de la geometría, la integral general de la ecuación Clairaut, se presenta como un conjunto de rectas de una sola variable que es C .

2. **Segundo caso:**

$$(x + f'(y')) = 0 \quad (1.89)$$

de donde se obtiene:

$$x = -f'(y') \quad (1.90)$$

Se reemplaza, esta ecuación (1.90) en la ecuación de Clairaut (1.85), y se obtiene:

$$y = -y'f'(y') + f(y')$$

Si se reemplaza $y' = p$ en estas ecuaciones, tratando a p como un parámetro, se obtiene un sistema de ecuaciones para-métricas de alguna función:

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

Lo cual, es la solución de la ecuación diferencial de Clairaut (1.85) y lleva el nombre de integral singular de la ecuación diferencial. Esta solución, no se la puede obtener por medio de la integral general, al trabajar con la constante C . Al simplificar el parámetro p del sistema de ecuaciones, se puede escribir la integral singular de la ecuación diferencial de Clairaut en la forma:

$$\Phi(x, y) = 0$$

Teorema:: La integral singular de la ecuación de Clairaut (1.85) es un conjunto de rectas que permiten obtener la integral general de la ecuación de Clairaut. Este teorema indica que es una forma fácil y cómoda de encontrar la integral singular de la ecuación de Clairaut.

1.9.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales De Clairaut.

1. Encontrar la integral general y singular de la ecuación:

$$y = xy' + (y')^2 \quad (1.91)$$

Lo primero que se debe observar es que: es una ecuación diferencial de Clairaut. Por lo tanto, la integral general de la ecuación se obtiene cuando se reemplaza $y' = C$ en la ecuación (1.91). La integral general tiene la forma:

$$y = Cx + C^2$$

Para obtener la integral singular de la ecuación diferencial de Clairaut, se indica dos métodos de resolución del ejercicio.

- a) **Primer Método:** Se deriva ambos lados de la ecuación con respecto a x , recordando que y es función de x . Por lo tanto:

$$y' = y' + xy'' + 2y'y''$$

Es decir:

$$y''(x + 2y') = 0$$

Se iguala a cero el segundo factor del lado izquierdo:

$$x + 2y' = 0 \longrightarrow x = -2y'$$

el ultimo valor se reemplaza en la ecuación de Clairaut del ejercicio:

$$y = -2(y')^2 + (y')^2 \longrightarrow y = -(y')^2$$

Se escribe el sistema paramétrico en función de los datos obtenidos y recordando de $y' = p$:

$$\begin{cases} x = -2p \\ y = -p^2 \end{cases}$$

Se simplifica el parámetro p del sistema y se obtiene:

$$y = -\frac{1}{4}x^2$$

Que representa la integral singular de la ecuación diferencial es su forma explícita.

- b) **Segundo Método:** Se parte de la integral general, la cual tiene la forma:

$$y = Cx + C^2 \quad (1.92)$$

Se aplica la derivada parcial a ambos lados de la ecuación con respecto a C , se tiene:

$$0 = x + 2C \longrightarrow x = -2C$$

Simplificando el parámetro C de estas ecuaciones, se obtiene la integral singular:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 \longrightarrow y = -\frac{1}{4}x^2$$

Que es la integral singular del ejercicio.

2. Encontrar la integral general y la integral singular de la ecuación diferencial:

$$y = xy' + \frac{2y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

La ecuación(1.93) es una ecuación diferencial de Clairaut; por lo que, la integral general se obtiene si se reemplaza $y' = C$:

$$y = xC + \frac{2C}{\sqrt{1+C^2}}$$

Se aplica el método de la derivada; por lo tanto, se deriva con respecto a C:

$$0 = x + \frac{2\sqrt{1+C^2} - 2C \frac{2C}{2\sqrt{1+C^2}}}{1+C^2} \rightarrow x + \frac{2(1+C^2) - 2C^2}{(1+C^2)\sqrt{1+C^2}} = 0$$

$$x + \frac{2}{(1+C^2)\sqrt{1+C^2}} = 0$$

Se despeja x de esta ecuación y se la reemplaza en la integral general(1.94):

$$y = xC + \frac{2C}{\sqrt{1+C^2}} \rightarrow y = -\frac{2C}{\sqrt{(1+C^2)^3}} + \frac{2C}{\sqrt{1+C^2}} = \frac{2C^3}{\sqrt{(1+C^2)^3}}$$

Se tiene dos identidades: una para x y otra para y:

$$x + \frac{2}{(1+C^2)\sqrt{1+C^2}} = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{(1+C^2)\sqrt{1+C^2}}; \quad y = \frac{2C^3}{\sqrt{(1+C^2)^3}}$$

Se eleva al exponente $\frac{2}{3}$ y se suma las dos identidades:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}C^2}{1+C^2} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{1+C^2} = \frac{2^{\frac{2}{3}}(1+C^2)}{1+C^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

Finalmente:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

Representa la integral singular e la ecuación diferencial.

1.9.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales De Clairaut.

1. Encuentre la integral general y singular de las ecuaciones:

a) $y = xy' + y'^2$

a) $y = xy' + \sqrt{1 + y'}$

b) $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$

c) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

d) $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$

e) $y = xy' + 2\sqrt{-y'}$

f) $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$

g) $y = xy' - \sqrt{1 + y'}$

h) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

i) $y = xy' - \frac{1}{2y'}$

j) $y = xy' + \frac{1}{2y'^2}$

k) $y = xy' + \frac{1}{2y'}$

a) $y = 2xy' + y^2y'^3$

1. $y = xy' + \frac{2}{y'}$

2. $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$

3. $y = xy' - 2y'^2$

4. $y = xy' + a\sqrt{1 - y'^2}$

5. $y = xy' + \frac{ay}{\sqrt{1 + y'^2}}$

6. $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$

7. $y = xy' + y' + y'^2$

8. $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$

9. $y = xy' + y' - y'^2$

10. $y = xy' - y'^2$

1.10. Ecuaciones Diferenciales de Riccati

La ecuación diferencial de Riccati, se llama a la ecuación diferencial de tipo:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \quad (1.93)$$

Donde: las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en un determinado dominio (α, β) .

El lado derecho de la identidad (1.93), es un polinomio de segundo orden. La ecuación de Riccati en forma general, no se la puede resolver por el método de la cuadratura. Para su resolución se aplica el siguiente teorema:

Teorema. Si se conoce una integral específica (y_1) de la ecuación diferencial de Riccati (1.93) en un determinado intervalo (α, β) se realiza un cambio de variable:

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad (1.94)$$

Este cambio (1.94), permite transformar la ecuación diferencial Riccati (1.93) a una ecuación diferencial lineal con respecto a $u(x)$.

$$\frac{du}{dx} + [2p(x)y_1(x) + q(x)]u = -p(x)$$

1.10.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Riccati.

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - (4x + 1)y + 4x^2 + 2x + 2 \quad \text{Si } y_1 = 2x, \text{ es una integral específica.} \quad (1.95)$$

Se debe observar, que la estructura de la ecuación diferencial es estructura de una ecuación diferencial de Riccati. Por lo tanto, se aplica un cambio de variable en la forma:

$$y = 2x + \frac{1}{u} \quad (1.96)$$

Se deriva con respecto a x , y se tiene en mente que, u esta en función de x :

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{\frac{du}{dx}}{u^2} = 2 - \frac{du}{u^2 dx} \quad (1.97)$$

Las dos ecuaciones (1.96, 1.97), se reemplazan en la ecuación diferencial (1.95):

$$2 - \frac{\frac{du}{dx}}{u^2} = \left(2x + \frac{1}{u}\right)^2 - (4x + 1)\left(2x + \frac{1}{u}\right) + 4x^2 + 2x + 2$$

Se realiza las operaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{\frac{du}{dx}}{u^2} &= 4x^2 + \frac{4x}{u} + \frac{1}{u^2} - \left(8x^2 + \frac{4x}{u} + 2x + \frac{1}{u}\right) + 4x^2 + 2x + 2 \\ 2 - \frac{\frac{du}{dx}}{u^2} &= 4x^2 + \frac{4x}{u} + \frac{1}{u^2} - 8x^2 - \frac{4x}{u} - 2x - \frac{1}{u} + 4x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

Se simplifica:

$$\begin{aligned} -\frac{\frac{du}{dx}}{u^2} &= \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} \rightarrow -\frac{\frac{du}{dx}}{u^2} = \frac{1-u}{u^2} \rightarrow -\frac{du}{dx} = 1-u \\ \frac{du}{dx} &= u-1 \rightarrow \frac{du}{dx} - u = -1 \end{aligned} \quad (1.98)$$

Lo obtenido, es una ecuación diferencial lineal. Se lo resuelve por uno de los métodos conocidos. Como el elemento que acompaña a u , en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, es una constante; por lo tanto, se puede aplicar el método de error acierto.

$$u = u^h + u^{\sim h}$$

Su parte homogénea: Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} - u &= 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = u \rightarrow \frac{du}{u} = dx \rightarrow \int \frac{du}{u} = \int dx + C \\ \ln(u) &= x + \ln(C) \rightarrow \ln(u) - \ln(C) = x \rightarrow \ln\left(\frac{u}{C}\right) = x \rightarrow u = Ce^x \end{aligned}$$

Su parte no-homogénea: El método error acierto, se aplica:

$$u^{\sim h} = u = M \rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \quad (1.99)$$

Las dos identidades (1.99) se reemplaza en la ecuación diferencial (1.98):

$$\frac{du}{dx} - u = -1 \rightarrow 0 - M = -1 \rightarrow M = 1$$

$$u = u^h + u^{\sim h} \rightarrow u = Ce^x + 1$$

Se ha obtenido la solución de la ecuación diferencial con respecto a u.

$$y = 2x + \frac{1}{u} \rightarrow y = 2x + \frac{1}{Ce^x + 1}$$

Se ha obtenido la solución de la ecuación diferencial con respecto a x.

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - 1 = x^2 \quad \text{Si } y_1 = x \quad (1.100)$$

Se debe observar que la estructura de la ecuación diferencial es estructura de una ecuación diferencial de Riccati. Por lo tanto, se aplica cambio de variable en la forma:

$$y = x + \frac{1}{u} \quad (1.101)$$

Se deriva con respecto a x y se tiene en mente que, u esta en función de x:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{\frac{du}{dx}}{u^2} = 1 - \frac{du}{u^2 dx} \quad (1.102)$$

Las dos ecuaciones (1.102, 1.101), se reemplazan en la ecuación diferencial (1.100):

$$1 - \frac{du}{dx u^2} + \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - 1 = x^2 \rightarrow -\frac{du}{dx u^2} + x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2} = x^2$$

$$-\frac{du}{dx u^2} + \frac{2x}{u} = -\frac{1}{u^2} \rightarrow \frac{du}{u^2 dx} - \frac{2x}{u} = \frac{1}{u^2}$$

En la parte final de lo desarrollado se multiplica por u^2 a ambos lados de la ecuación diferencial.

$$\frac{du}{u^2 dx} - \frac{2x}{u} = \frac{1}{u^2} \rightarrow u^2 \frac{du}{u^2 dx} - u^2 \frac{2x}{u} = u^2 \frac{1}{u^2} \rightarrow \frac{du}{dx} - 2ux = 1$$

Lo obtenido representa una ecuación diferencial lineal, para su solución se debe encontrar su parte homogénea y su parte no-homogénea.

Su parte homogénea:

$$\frac{du}{dx} - 2ux = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2ux$$

$$\int \frac{du}{u} = 2 \int x dx + C \rightarrow \ln(u) = 2 \frac{x^2}{2} + \ln(C)$$

$$\ln(u) - \ln(C) = x^2 \rightarrow \ln\left(\frac{u}{C}\right) = x^2 \rightarrow u = Ce^{x^2}$$

Su parte no-homogénea:

El lado derecho de la variable de u , en su segundo miembro es una variable, $2x$; por lo tanto, se aplica el método de la constante:

$$u^{\sim h} = u = C(x)e^{x^2} \longrightarrow \frac{du}{dx} = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2}$$

Estos dos elementos obtenidos, se reemplazan en la ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dx} - 2ux = 1 \longrightarrow C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = 1$$

Se simplifica la expresión y se integra:

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = 1$$

$$C'(x)e^{x^2} = 1 \longrightarrow C'(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$$

$$\int C'(x)dx = \int \frac{dx}{e^{x^2}} \longrightarrow C(x) = \int e^{-x^2} dx$$

La solución a la parte no-homogénea es:

$$u^h = u = C(x)e^{x^2} \longrightarrow u = e^{x^2} \int e^{-x^2} dx$$

La solución de la ecuación diferencial con respecto a u es:

$$u = u^h + u^{\sim h} = Ce^{x^2} + e^{x^2} \int e^{-x^2} dx \longrightarrow u = e^{x^2} \left(C + \int e^{-x^2} dx \right)$$

La solución de la ecuación diferencial con respecto a y es:

$$y = x + \frac{1}{u} \longrightarrow y = x + \frac{1}{e^{x^2} \left(C + \int e^{-x^2} dx \right)}$$

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{\left(C + \int e^{-x^2} dx \right)}$$

En este ejercicio, no se ha integrado la expresión $\int e^{-x^2} dx$, ya que, esta integral está fuera de los objetivos de este libro. Motivo por el cual, la respuesta del ejercicio quedo expresada como la integral.

1.10.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales De Riccati.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a) \frac{dy}{dx} = y^2 - xy - x \quad \text{si } y = ax + b$$

$$b) \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{4} - \frac{1}{x^2} \quad \text{si } y = \frac{a}{x}$$

$$c) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \quad \text{si } y = \frac{a}{x}$$

$$d) \frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{si } y = -\frac{1}{x}$$

$$e) \frac{dy}{dx} = -y^2 + \frac{2}{x^2} \quad \text{si } y = \frac{a}{x}$$

$$f) \frac{dy}{dx} = -y^2 - \frac{y}{x} + \frac{4}{x^2} \quad \text{si } y = \frac{a}{x}$$

$$g) \frac{dy}{dx} = xy^2 - \frac{2x^2 + 1}{x}y + \frac{x^2 + 1}{x} \quad \text{si } y = 1$$

$$h) \frac{dy}{dx} = -(y - x^2) - \frac{2(y - x)}{x} + 1 \quad \text{si } y = x$$

$$i) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{3} + \frac{2}{3x^2} \quad \text{si } y = \frac{a}{x}$$

$$j) x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 y^2 + xy + 1 \quad \text{si } y = \frac{a}{x}$$

$$k) x^2 \frac{dy}{dx} + (xy - 2)^2 = 0 \quad \text{si } y = \frac{a}{x}$$

$$l) \frac{dy}{dx} = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + x + 1 \quad \text{si } y = x$$

$$m) x \frac{dy}{dx} = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x = 0 \quad \text{si } y = ax + b$$

$$n) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1 - 2x)}y^2 + \frac{4x + 1}{x(2x - 1)}y - \frac{4x}{x(2x - 1)} \quad \text{si } y = 1$$

$$\tilde{n}) \frac{dy}{dx} = y^2 - (x + 1)y + x^2 + x + 1 \quad \text{si } y = x$$

$$o) \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{si } y = \frac{2}{x}$$

$$p) \frac{dy}{dx} = -y^2 - \frac{2}{4x}y \quad \text{si } y = -\frac{1}{x}$$

1.11. Ciertas Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.

1. Ley de Calentamiento (Enfriamiento) Newton

Se conoce que la velocidad de enfriamiento de un cuerpo, es directamente proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo y del medio ambiente. Encontrar una formula que defina la relación de la temperatura del cuerpo con el tiempo. Si se conoce que, en el transcurso de 10 minutos la temperatura del el cuerpo paso de 100° a 60° y la temperatura del medio ambiente era de 20° .

Se define: $\frac{dT}{dt}$ como la velocidad de enfriamiento del cuerpo y según el enunciado:

$$\frac{dT}{dt} \propto (T_c - T_a)$$

Donde: T_c : temperatura del cuerpo, T_a temperatura de medio ambiente ($T_a = 20^\circ$). Por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_c - T_a)$$

Que representa una ecuación diferencial de variables separables, por lo tanto:

$$\frac{dT}{(T_c - T_a)} = k dt$$

Se integra la identidad:

$$\int \frac{dT}{(T_c - T_a)} = \int k dt + C \longrightarrow \ln(T_c - T_a) = kt + C$$

El elemento C es una constante y se la puede escribir en diferentes formas; en este caso, lo mas cómodo es escribirlo como una función logarítmica:

$$\ln(T_c - T_a) = kt + \ln(C)$$

De la identidad obtenida, se despeja T_c :

$$\ln(T_c - T_a) = kt + \ln(C) \longrightarrow \ln(T_c - T_a) - \ln(C) = kt$$

$$\ln\left(\frac{T_c - T_a}{C}\right) = kt \longrightarrow \frac{T_c - T_a}{C} = e^{kt}$$

$$T_c - T_a = Ce^{kt} \longrightarrow T_c = T_a + Ce^{kt}$$

La última expresión obtenida, es la integral general de la ecuación diferencial del ejercicio. Esta expresión, tiene todavía dos elementos desconocidos; es decir: k , C .

Para obtener los valores de k y C se utiliza las condiciones iniciales:

si t (tiempo) = 0, $T_c = 100^\circ$, se reemplaza:

$$T_c = T_a + Ce^{kt} \longrightarrow 100^\circ = 20^\circ + Ce^{k0}$$

$$100^\circ = 20^\circ + Ce^0 \quad 100^\circ - 20^\circ = C = 80^\circ$$

Valor que se lo reemplaza en la formula:

$$T_c = T_a + Ce^{kt} \longrightarrow T_c = T_a + 80^\circ e^{kt}$$

Falta obtener el valor de k , se utiliza la otra información:

$$t(\text{tiempo}) = 10; T_c = 60^\circ$$

Esta información se reemplaza en la expresión:

$$T_c = T_a + 80^\circ e^{kt} \longrightarrow 60^\circ = 20^\circ + 80^\circ e^{10k}$$

$$60^\circ - 20^\circ = 80^\circ e^{10k} \longrightarrow \frac{40^\circ}{80^\circ} = e^{10k}$$

$$\frac{1}{2} = e^{kt} \longrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 10k \longrightarrow \frac{\ln(0.5)}{10} = k$$

Se reemplaza en la formula:

$$T_c = T_a + 80^\circ e^{kt} \longrightarrow T_c = T_a + 80^\circ e^{\frac{\ln(0.5)}{10}t}$$

La formula que define el proceso de enfriamiento del cuerpo con respecto al tiempo es:

$$T_c = T_a + 80^\circ e^{\frac{\ln(0.5)}{10}t} \longrightarrow T_c = 20^\circ + 80^\circ e^{\frac{\ln(0.5)}{10}t}$$

Se ha obtenido una relación entre la temperatura del cuerpo y el tiempo del proceso; por lo tanto, se puede calcular el valor de la temperatura del cuerpo en cualquier instante. Además, se puede calcular el tiempo que demora el cuerpo en llegar a la temperatura T_{c2}

$$T_{c2} = 20^\circ + 80^\circ e^{\frac{\ln(0.5)}{10}t} \longrightarrow T_{c2} - 20^\circ = 80^\circ e^{\frac{\ln(0.5)}{10}t}$$

$$\frac{T_{c2} - 20^\circ}{80^\circ} = e^{\frac{\ln(0.5)}{10}t} \longrightarrow \ln\left(\frac{T_{c2} - 20^\circ}{80^\circ}\right) = \frac{\ln(0.5)}{10}t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{T_{c2} - 20^\circ}{80^\circ}\right)}{\left(\frac{\ln(0.5)}{10}\right)} \longrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{T_{c2} - 20^\circ}{T_c - T_a}\right)}{\left(\frac{\ln(0.5)}{10}\right)}$$

2. Encontrar la figura que pasa por el punto A(3,2) y su subnormal es en cada punto igual a dos. Subnormal es la proyección de la perpendicular a la tangente, en la figura 1.0 es el segmento BN. en el triángulo ABN se puede determinar:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BN}}{y} \rightarrow \overline{BN} = y \tan(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$$2 = y \frac{dy}{dx}$$

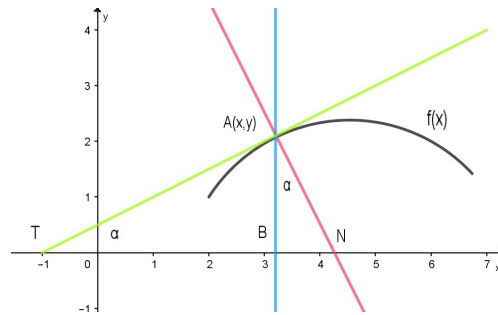


Figura 1.0

Una ecuación diferencial de variables separables:

El $\angle$ ATB es igual al $\angle$ BAN
 $\overline{BN} = 2$

$$y dy = 2 dx \rightarrow \int y dy = 2 \int dx \text{ se obtiene: } x = \frac{y^2}{4} + C$$

Se calcula C con el punto (3,2):

$$x = \frac{y^2}{4} + C \rightarrow 3 = \frac{2^2}{4} + C \rightarrow C = 2$$

$$x = \frac{y^2}{4} + C \rightarrow x = \frac{y^2}{4} + 2$$

Se despeja y:

$$x = \frac{y^2}{4} + 2 \rightarrow y^2 = 4(x - 2)$$

La figura buscada es una parábola de vértice (2,0).

3. Encontrar el conjunto de curvas que cortan con un ángulo α con la recta $y = cx$.
 En la figura 1.1 se puede obtener las funciones trigonométricas, en este caso, las tangentes que:

$$\tan(\delta) = \frac{y}{x}; \quad \tan(\beta) = \frac{dy}{dx}$$

En todo triángulo, el ángulo externo de uno de sus catetos es igual a la suma de los ángulos no adjuntos a ese ángulo externo:

$$\beta = \delta + \alpha$$

Se toma la función trigonométrica tangente a ambos lados de la identidad:

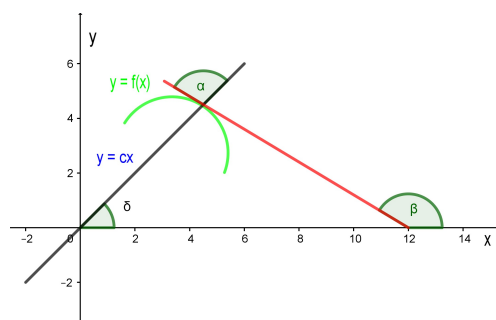


Figura 1.1

Se

$$\beta = \delta + \alpha$$

Se señala que:

$$\tan(\beta) = \tan(\delta + \alpha)$$

$$\tan(\alpha) = m$$

$$\tan(\beta) = \frac{\tan(\delta) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\delta)\tan(\alpha)}$$

El ángulo δ esta entre la reta $y = cx$ y el eje x .

El ángulo β es el ángulo tangente a la función buscada, $y = f(x)$ y el eje x .

$$\tan(\beta) = f'(x) = \frac{\frac{y}{x} + m}{1 - \frac{y}{x}m}$$

ha obtenido una ecuación diferencial de segundo orden de la forma $f\left(\frac{y}{x}\right)$; por lo tanto, $\frac{y}{x} = z$ donde z esta en función de x .

$$\frac{y}{x} = z \rightarrow y = xz \rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{y}{x} + m}{1 - \frac{y}{x}m} \rightarrow z + x \frac{dz}{dx} = \frac{z + m}{1 - mz} \rightarrow x \frac{dz}{dx} = \frac{z + m}{1 - mz} - z \\ x \frac{dz}{dx} &= \frac{z + m - z(1 - mz)}{1 - mz} \rightarrow x \frac{dz}{dx} = \frac{m + mz^2}{1 - mz} \rightarrow \frac{(1 - mz)dz}{m(1 + z^2)} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Se integra a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - mz)dz}{m(1 + z^2)} &= \int \frac{dx}{x} + C \\ \int \frac{(1 - mz)dz}{m(1 + z^2)} &= \int \frac{dz}{m(1 + z^2)} - \int \frac{mzdz}{m(1 + z^2)} = \frac{1}{m} \arctan(z) - \ln(\sqrt{1 + z^2}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{m} \arctan(z) - \ln(\sqrt{1+z^2}) = \ln(x) + C$$

Se regresa a $z = \frac{y}{x}$:

$$\frac{1}{m} \arctan(z) - \ln(\sqrt{1+z^2}) = \ln(x) + C \longrightarrow \frac{1}{m} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = \ln(x) + C$$

Se aplica operaciones básicas de álgebra:

$$\frac{1}{m} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\right) = \ln(x) + C$$

$$\frac{1}{m} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) = \ln(x) + C$$

$$\frac{1}{m} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\ln(\sqrt{x^2+y^2}) - \ln(x)\right) = \ln(x) + C$$

$$\frac{1}{m} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\sqrt{x^2+y^2} + \ln(x) = \ln(x) + C$$

$$\frac{1}{m} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\sqrt{x^2+y^2} = C$$

Se ingresa variables polares:

$$x = \rho \cos(\delta); \quad y = \rho \sin(\delta)$$

$$\frac{1}{m} \arctan\left(\frac{\rho \sin(\delta)}{\rho \cos(\delta)}\right) - \ln\sqrt{(\rho \cos(\delta))^2 + (\rho \sin(\delta))^2} = C$$

$$\frac{1}{m} \arctan(\tan(\delta)) - \ln\sqrt{\rho^2(\cos^2(\delta) + \sin^2(\delta))} = C$$

$$\frac{1}{m} \arctan(\tan(\delta)) - \ln(\rho) = C$$

$$\frac{\delta}{m} - \ln(\rho) = C$$

$$\frac{\delta}{m} + C = \ln(\rho)$$

$$\ln(\rho) = \frac{\delta}{m} + C$$

$$\rho = e^{\frac{\delta}{m} + C} \longrightarrow \rho = e^{\frac{\delta}{m}} e^C \longrightarrow \rho = C e^{\frac{\delta}{m}}$$

La respuesta del ejercicio: El conjunto de espirales logarítmicas.

4. Hallar la ecuación de la curva, para que su segmento tangencial, que forma con los ejes del plano cartesiano, sea constante e igual a p .

Si la curva buscada es : $y = y(x)$ y su tangente en el punto $A(x, y) = (x, y(x))$ tiene la forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \longrightarrow \eta - y = y'(\xi - x)$$

Donde : (η, ξ) son los puntos de corte de la tangente con los ejes del plano cartesiano.

$$\text{Si: } \eta = 0 \longrightarrow \xi = x - \frac{y}{y'} \quad y \quad \text{si } \xi = 0 \longrightarrow \eta = y - xy'$$

El triángulo formado con los ejes cartesianos es rectángulo; por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

$$p = \sqrt{\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2}$$

$$p = \sqrt{\frac{(xy' - y)^2}{y'^2} + (y - xy')^2}$$

$$p = \sqrt{\frac{(xy' - y)^2}{y'^2} + (y - xy')^2}$$

$$p = \sqrt{\frac{(xy' - y)^2 + y'^2(xy' - y)^2}{y'^2}}$$

$$p = \frac{(xy' - y)}{y'} \sqrt{1 + y'^2}$$

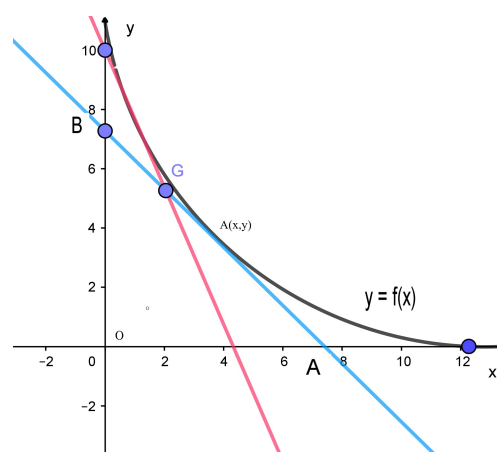


Figura 1.2

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \eta \\ \overline{OB} &= \xi \\ \overline{AB} &= p \end{aligned}$$

Se despeja y, además el segmento p debe ser positivo; por lo tanto, se debe tener en cuenta el signo de valor absoluto:

$$p = \frac{|xy' - y|}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \rightarrow p = \frac{(xy' - y)}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \rightarrow y = xy' + \frac{py'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

La última expresión algebraica obtenida es una ecuación diferencial de Clairaut. Su integral general (solución general) se la puede escribir:

$$y = xC + \frac{pC}{\sqrt{1 + C^2}}$$

Se deriva con respecto a C:

$$y = Cx + \frac{pC}{\sqrt{1 + C^2}} \rightarrow 0 = x + \frac{(pC)' \sqrt{1 + C^2} - pC(\sqrt{1 + C^2})'}{(\sqrt{1 + C^2})^2}$$

$$0 = x + \frac{p\sqrt{1 + C^2} - pC(\sqrt{1 + C^2})'}{(\sqrt{1 + C^2})^2} \rightarrow 0 = x + \frac{p\sqrt{1 + C^2} - \frac{pC(2C)}{2\sqrt{1 + C^2}}}{(\sqrt{1 + C^2})^2}$$

$$0 = x + \frac{p\sqrt{1 + C^2} - \frac{pC(2C)}{2\sqrt{1 + C^2}}}{(1 + C^2)} \rightarrow 0 = x + \frac{p\sqrt{1 + C^2}\sqrt{1 + C^2} - pC^2}{(1 + C^2)\sqrt{1 + C^2}}$$

$$0 = x + \frac{p(1 + C^2) - pC^2}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow 0 = x + \frac{p}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow x = -\frac{p}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Se ha obtenido un valor para x, ahora este valor se reemplaza y se obtiene y:

$$y = xC + \frac{pC}{\sqrt{1 + C^2}} \rightarrow y = -\frac{pC}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{pC}{\sqrt{1 + C^2}} \rightarrow y = \frac{-pC + pC(1 + C^2)}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \frac{pC^3}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Tanto a x como a y se los eleva al exponente $\frac{2}{3}$ y se los suma:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(-\frac{p}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{pC^3}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{p^{\frac{2}{3}}}{1 + C^2} \right) + \left(\frac{p^{\frac{2}{3}}C^2}{1 + C^2} \right)$$

Se aplica factor común:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{1}{1+C^2} \right) + \left(\frac{C^2}{1+C^2} \right) \right)$$

Se realiza la suma de quebrados:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1+C^2}{1+C^2} \right)$$

Y finalmente se obtiene:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}}$$

Que es la respuesta al ejercicio. Esta curva se denomina tractrix y tiene muchas aplicaciones en Ingeniería.

Se recomienda al estudiante que, resuelva el ejercicio, en el cual, el triángulo formado con los ejes del plano cartesiano tenga una área de valor conocido.

5. Realice un análisis de un circuito eléctrico en función de los elementos de los cuales esta formado. Los elementos eléctricos de mayor aplicación en la construcción y diseño de un circuito eléctrico son: la resistencia (R), condensador (C), inductancia (L) y ,puede como no, tener una fuente E(t). Y de ahí viene su nombre, un circuito RLC indica que el circuito consta de estos tres elementos.

- a) Si el circuito consta de estos tres elementos eléctricos: R,L,C, la ecuación diferencial que analiza este tipo de circuito, sera una ecuación de segundo orden; por lo tanto, este tipo de circuitos se lo analizara en el siguiente capitulo.

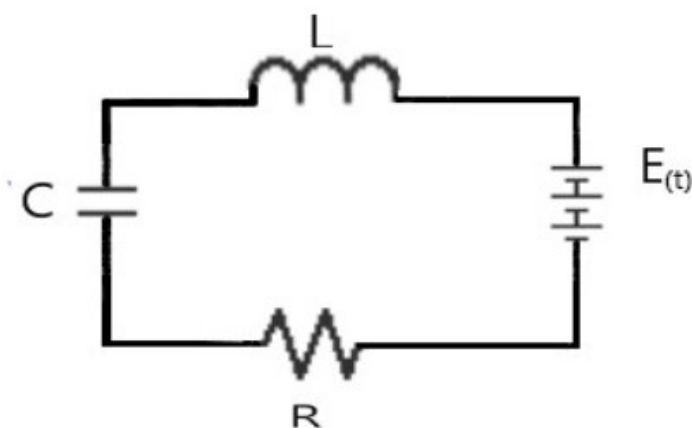


Figura 1.3

- b) Si el circuito esta formado por la combinación de dos de estos elementos; es decir, RL, RC o CL, y que puede estar acompañado de una fuente $E(t)$ o no. En este caso la ecuación diferencial que represente este proceso es de primer orden.

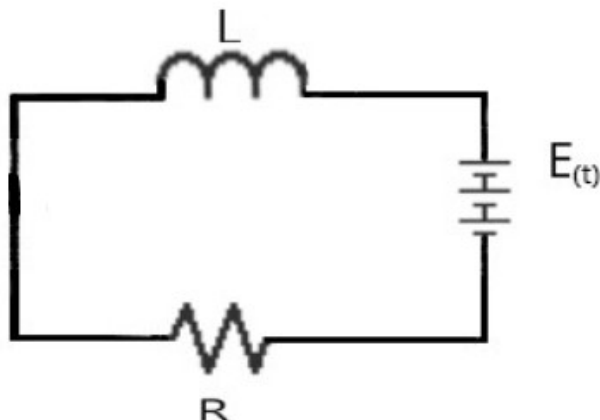


Figura 1.4

En ambos casos, a y b, se debe aplicar definiciones y leyes de la Física. Entre las definiciones se tiene:

$$i = -\frac{dq}{dt} \quad \text{Definición de corriente eléctrica.}$$

$$V_L = -L \frac{di}{dt} \quad \text{El voltaje de una inductancia.}$$

$$V_R = Ri \quad \text{El voltaje de una resistencia.}$$

Entre las leyes, la segunda ley de Kirchoff:

$E(t) = \sum V_i$ La suma del voltaje de cada uno de los componentes eléctricos del circuito eléctrico es igual al voltaje de la fuente.

Para la figura 1.4 se escribe:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \longrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L}$$

Que representa una ecuación diferencial de primer orden no-homogénea. Su solución consta de la parte homogénea y su parte no-homogénea.

Su parte homogénea i^h :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \longrightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \longrightarrow \int \frac{di}{i} = \int -\frac{R}{L}dt \longrightarrow \ln(i) = -\frac{R}{L}t + \ln(C)$$

$$\ln(i) - \ln(C) = -\frac{R}{L}t \longrightarrow \ln\left(\frac{i}{C}\right) = -\frac{R}{L}t \longrightarrow i^h = i = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

Su parte no-homogénea $i^{\sim h}$:

Se debe observar que, el coeficiente de i en la parte izquierda de la ecuación diferencial de primer orden, es una constante; por lo tanto, se aplica el método de la constante, en ese caso:

$$i^{\sim h} = i = A \longrightarrow \frac{di}{dt} = 0$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L} \longrightarrow 0 + \frac{R}{L}A = \frac{E(t)}{L} \longrightarrow A = \frac{E(t)}{R}$$

La solución sería:

$$i = i^h + i^{\sim h} = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E(t)}{R}$$

Para definir C , se utiliza las condiciones de frontera: cuando $t = 0$; $i = 0$, por lo tanto, se obtiene:

$$i = i^h + i^{\sim h} = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E(t)}{R} \longrightarrow 0 = Ce^{-\frac{R}{L}0} + \frac{E(t)}{R} \longrightarrow C = -\frac{E(t)}{R}$$

Se reemplaza:

$$i = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E(t)}{R} \longrightarrow i = \left(-\frac{E(t)}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E(t)}{R} = \frac{E(t)}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

La última expresión es la solución al ejercicio.

- c) Encuentre un modelo matemático que represente el circuito eléctrico que contiene una resistencia y un condensador. El circuito tiene una fuente $E(t)$.

Al igual que en el ejercicio anterior se aplicara definiciones de física, así como, la segunda ley de Kirchhoff.

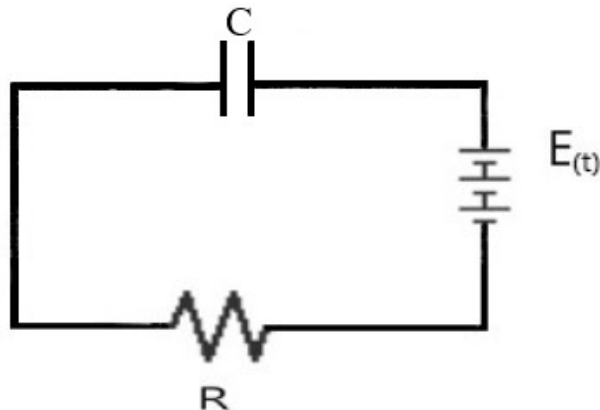


Figura 1.5

Se aplica la segunda ley de Kirchoff:

$$Ri - \frac{Q}{C} = E(t)$$

Para obtener el comportamiento del circuito con respecto a la corriente eléctrica se deriva ambos lados de la igualdad, se debe tener en cuenta que, en este caso $E(t)$: es constante.

$$Ri - \frac{Q}{C} = E(t) \rightarrow R \frac{di}{dt} - \frac{dQ}{C dt} = 0 \rightarrow R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Se recuerda que: $i = -\frac{dQ}{dt}$. La ultima expresión se divide pare R:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$$

Es una ecuación diferencial con variables separables y se integra a ambos lados:

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0 \rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC} \rightarrow \int \frac{di}{i} = -\int \frac{dt}{RC} + D$$

D es la constante de integración. Se obtiene:

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{dt}{RC} + \ln(D) \rightarrow \ln\left(\frac{i}{D}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow i = D e^{-\frac{t}{RC}}$$

Para encontrar la constante D, se considera las condiciones iniciales o de frontera, que en este caso : si $t = 0$, en este momento

$$i = \frac{E(t)}{R}$$

$$i = D e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow \frac{E(t)}{R} = D e^{-\frac{t=0}{RC}} \rightarrow D = \frac{E(t)}{R}$$

Se reemplaza:

$$i = D e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow i = \frac{E(t)}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Que es la solución del ejercicio.

6. Qué forma debe tener un espejo para que todos los rayos salientes de un punto O al reflejarse en el espejo sean paralelas al eje y.

Para facilidad de resolución del ejercicio, se podría considerar que, el punto saliente es el punto de origen del plano cartesiano?.

De Física se conoce que el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado.

$$\angle LMM_2 = \angle OMM_2 = \angle MM_2O$$

De lo escrito, se puede deducir que: el triángulo OMM_2 , es triángulo isósceles.

$$\overline{OM} = \overline{OM_2}$$

$$\tan(\beta) = f'(x) = y'$$

$$\overline{OM_2} = \overline{ON} + \overline{NM_2}$$

$$\overline{OM_2} = y + \frac{x}{y'}$$

$$\overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y + \frac{x}{v'} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y + \frac{x}{y'} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)}$$

$$y + \frac{x}{v'} = x\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{v'} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

Se despeja y' :

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{y'} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \rightarrow \frac{1}{y'} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{y}{x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{y}{x}} = y'$$

Se Racionaliza el denominador del lado derecho:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{y}{x}} = y' \longrightarrow \frac{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{y}{x}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}\right)} = y'$$

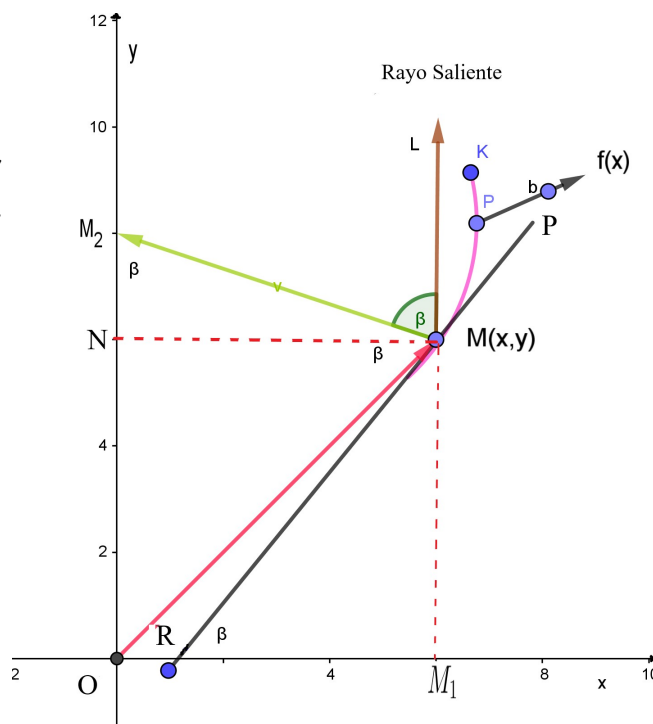


Figura 1.6

$$L \longrightarrow \text{Rayo Saliente.}$$

$f(x) \rightarrow$ Función Buscada

RP $\longrightarrow$ Recta tangente a la función buscada

$M(x,y) \longrightarrow$ Un punto en la función.

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}} = y' \longrightarrow y' = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$$

La expresión obtenida es una ecuación diferencial homogénea y se la resuelve como tal.

Se realiza un cambio de variable en función de x , se deriva, se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\frac{y}{x} = u \longrightarrow y = ux \longrightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2} + u \longrightarrow x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2} + u - u \longrightarrow x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}$$

Se separa las variables:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x} \longrightarrow \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln(x) + \ln(c)$$

Se realiza operaciones algebraicas:

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln(x) + \ln(c) = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln(Cx)$$

$$u + \sqrt{1 + u^2} = Cx$$

Se reemplaza u :

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx \longrightarrow \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = Cx$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - y \longrightarrow x^2 + y^2 = (Cx^2 - y)^2$$

$$x^2 + y^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2$$

$$2Cx^2y = C^2x^4 - x^2 \longrightarrow y = \frac{C^2x^4 - x^2}{2Cx^2} \longrightarrow y = \frac{C^2x^4}{2Cx^2} - \frac{x^2}{2Cx^2}$$

Se obtiene la respuesta:

$$y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C}$$

Se obtiene un polinomio de segundo orden, lo que significa, que representa una parábola; por lo tanto, la forma del espejo tiene que ser una parábola.

7. Escribir la ecuación de la curva para que cumpla dos condiciones:

- a) El coeficiente direccional de la tangente en cualquier punto es igual a la ordenada en el punto tangencial.
- b) La curva pasa por el punto P(2,5).

Si $y = f(x)$ es la ecuación de curva buscada. El coeficiente direccional de la recta tangente en cualquier punto es igual a $\frac{dy}{dx}$; por lo tanto, cumpliendo las condiciones del ejercicio se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Se aplica el método de variables separables, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y \rightarrow \frac{dy}{y} = dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx + C$$

$$\ln(y) = x + \ln(C) \rightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = x$$

$$y = e^{Cx} \rightarrow y = Ce^x$$

Esta es la integral general, para que, pase por el punto dado, se debe encontrar C:

$$y = Ce^x \rightarrow 5 = Ce^2 \rightarrow C = 5e^{-2}$$

Se reemplaza en la integral general:

$$y = Ce^x \rightarrow y = 5e^{-2}e^x \rightarrow y = 5e^{x-2}$$

Que es la curva que cumple las condiciones dadas.

8. Un cuerpo de masa inicial m_0 se disuelve parcialmente en un tiempo t y su velocidad es directamente proporcional a la masa que no se ha disuelto todavía en ese tiempo. Encontrar un modelo matemático que represente la masa que se ha disuelto con respecto al tiempo.

Sea $x(t)$ la masa que se ha disuelto en el tiempo t ; por lo tanto, la masa que no se ha disuelto es $m_0 - x$, se puede escribir:

$$\frac{dx}{dt} \propto (m_0 - x) \rightarrow \frac{dx}{dt} = k(m_0 - x)$$

Donde : k es el coeficiente de proporcionalidad. Lo obtenido es una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes separables:

$$\frac{dx}{dt} = k(m_0 - x) \rightarrow \frac{dx}{m_0 - x} = k dt$$

Se integra:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{m_0 - x} &= k dt \longrightarrow \int \frac{dx}{m_0 - x} = \int k dt + C \\ -\ln(m_0 - x) &= kt + \ln(C) \longrightarrow \ln(m_0 - x) - \ln(C) = -kt \\ \ln(m_0 - x) - \ln(C) &= -kt \longrightarrow \ln\left(\frac{m_0 - x}{C}\right) = -kt \\ \ln\left(\frac{m_0 - x}{C}\right) &= -kt \longrightarrow m_0 - x = Ce^{-kt} \longrightarrow x = m_0 - Ce^{-kt}\end{aligned}$$

Para definir C, se considera las condiciones de frontera, $t = 0$; $x = 0$; por lo tanto, $C = m_0$ Se obtiene:

$$x = m_0 - Ce^{-kt} \longrightarrow x = m_0 - m_0 e^{-kt} \longrightarrow x = m_0(1 - e^{-kt})$$

La última expresión represente: la masa disuelta en un tiempo t cualquiera. Se desea, por ejemplo, encontrar el tiempo en el cual se ha disuelto la mitad de la masa inicial.

$$x = \frac{1}{2}m_0 \longrightarrow \frac{1}{2}m_0 = m_0(1 - e^{-kt}) \longrightarrow t = \frac{\ln 2}{k}$$

La siguiente aplicación de ecuaciones diferenciales sera con cuerpos de diferente forma geométrica:

- a) Un cuerpo de forma cilíndrica de altura $H = 20$ cm y de base circular $S = 120$ cm^2 esta lleno de agua. En el transcurso de que tiempo se vacía el elemento si en su base hay un agujero de área $s = 0,4$ cm^2

Primero se debe determinar la velocidad con la cual el agua comienza a desalojar del cuerpo geométrico, para lo cual, se aplica la conservación de energía:

En su parte superior: $E_{1potencial} + E_{1cinetica}$

En su parte inferior: $E_{2potencial} + E_{2cinetica}$

Como la energía se conserva estas dos identidades deben ser iguales:

$$E_{1potencial} + E_{1cinetica} = E_{2potencial} + E_{2cinetica}$$

En su parte superior la energía cinética es igual a cero y en su parte inferior la energía potencial es cero:

$$E_{1potencial} = E_{2cinetica}$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v_{\text{liquido}} = \sqrt{2gh}$$

Donde: g - la aceleración de la gravedad; h - la altura sobre el agujero.

En el tiempo t su altura sera h

En el tiempo $(t + \Delta h)$

su altura sera $(h + \Delta h)$,

en este ejemplo Δh es negativo, ya que, el liquido es desalojado del elemento geométrico.

El volumen del liquido que ha sido desalojado es:

$$V_{\text{desalojo}} = -S \Delta h$$

Por el otro lado, en un pequeño espacio de tiempo, se formara un pequeño cilindro de base s y altura e ; por lo tanto, el volumen de liquido sera:

$$V_{\text{saliente}} = s \cdot e$$

Se puede considerar que, en un tiempo bastante pequeño estos dos volúmenes son iguales:

$$V_{\text{desalojo}} = V_{\text{saliente}} \rightarrow -Sh = s \cdot e$$

De la definición de velocidad se tiene:

$$v = \frac{e}{t} \rightarrow e = v \cdot t \rightarrow e = \sqrt{2gh} \cdot t$$

Por lo tanto, el volumen de agua saliente, se la puede expresar:

$$V_{\text{saliente}} = s \cdot e = s \cdot \sqrt{2gh} \cdot t$$

Igualando estas dos expresiones obtenidas:

$$V_{\text{desalojo}} = V_{\text{saliente}} \rightarrow -Sh = s \cdot e \rightarrow -S \Delta h = s \cdot \sqrt{2gh} \cdot \Delta t$$

Si $t \rightarrow \text{cero}$:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow \frac{dh}{dt}$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$$-S \Delta h = s \cdot \sqrt{2gh} \cdot \Delta t \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{s}{S} \sqrt{2gh} \rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S} \sqrt{2gh}$$

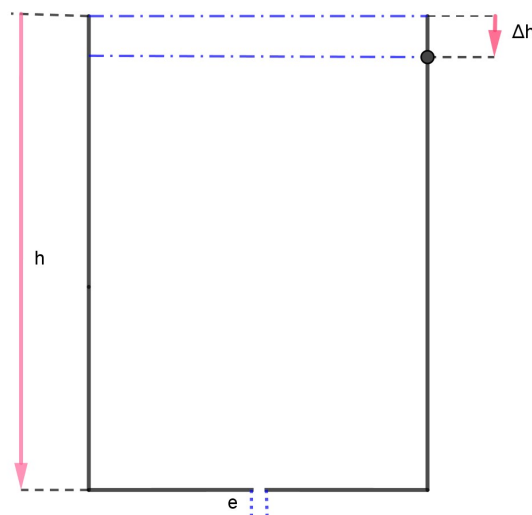


Figura 1.7

Lo que se ha obtenido, es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh} \rightarrow \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\frac{s}{S}dt$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\frac{s}{S}dt \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S} \int dt \rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{s}{S}t = C$$

Si $t = 0$ entonces $h = H$; por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{s}{S}t = C \rightarrow C = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

El modelo matemático que representa el desalojo del liquido del cilindro con respecto al tiempo:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{s}{S}t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \rightarrow t = \frac{S}{s} \left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)$$

Si se desea obtener el tiempo en el cual el cilindro este vacío, es decir, cuando $h = 0$:

$$t = \frac{S}{s} \left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) \rightarrow t_{vacio} = \frac{S}{s} \left(\sqrt{\frac{2H}{g}} \right)$$

- b) Encuentre un modelo matemático que represente el vaciado de un liquido de un cuerpo semiesférico de radio 100 cm. En su parte inferior se encuentra un agujero de área 1 cm^2 . Además, se conoce que la velocidad de desalojo del liquido por el agujero es $v_{liquido} = 0.6\sqrt{2gh} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ donde: g es la aceleración de la gravedad. La variable h es la distancia de la superficie del liquido en cualquier tiempo t , del agujero en su parte inferior de la semiesfera. La ecuación diferencial $h(t)$ se determina al calcular el volumen de vaciado en el cuerpo en el tiempo t al tiempo $(t + \Delta t)$ En este tiempo, también sale el liquido por el agujero de área 1 cm^2 , este volumen se lo podrá calcular de:

$$V_{liquido} = s \cdot e = s \cdot v_{liquido} \cdot t = 1 \text{ cm}^2 \cdot 0.6\sqrt{2gh}t$$

Como se desea, analizar este volumen cuando $t \rightarrow 0$; es decir, en pequeños espacios de tiempo, lo cual se puede escribir:

$$v_{\text{liquido}} \cdot t = 1 \text{ cm}^2 \cdot 0.6 \sqrt{2gh} t \rightarrow dV_{\text{Volumen saliente}} = 0.6 \sqrt{2gh} dt$$

La velocidad de salida del liquido, en un tiempo bien pequeño, se considera una constante.

Por el otro lado, en un pequeño tiempo disminuye la cantidad de liquido, y como, el tiempo se considera bien pequeño; por lo tanto, en ese pequeño tiempo se puede considerar que el volumen se lo puede representar:

$$dV = -\pi \cdot r^2 \cdot dh$$

Donde: r - es el radio de la circunferencia de la semiesfera, a una altura dh .

Los puntos CDEB forman triángulos semejantes; por lo tanto, se puede escribir proporciones:

$$\frac{BE}{DE} = \frac{DE}{EC} \rightarrow DE^2 = (200 - h)h$$

$$r^2 = (200 - h)h$$

Se reemplaza en las ecuaciones:

$$dV = dV_{\text{saliente}}$$

$$-\pi r^2 dh = 0.6 \sqrt{2gh} \cdot dt$$

$$-\pi(200 - h)h \cdot dh = 0.6 \sqrt{2gh} \cdot dt$$

Se obtuvo una ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

$$-\pi(200 - h)h^{\frac{1}{2}} \cdot dh = 0.6 \sqrt{2g} \cdot dt$$

Se integra las dos lados de la igualdad:

$$-\pi 200 \int h^{\frac{1}{2}} dh + \pi \int h^{\frac{3}{2}} \cdot dh = 0.6 \sqrt{2g} \cdot \int dt + C$$

$$-\pi 200 \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} + \pi \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} = 0.6 \sqrt{2g} \cdot t + C$$

$$-\pi \frac{400}{3} h^{\frac{3}{2}} + \pi \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} = 0.6 \sqrt{2g} \cdot t + C$$

$$\pi \left(\frac{2}{5} h - \frac{400}{3} \right) h \sqrt{h} = 0.6 \sqrt{2g} \cdot t + C$$

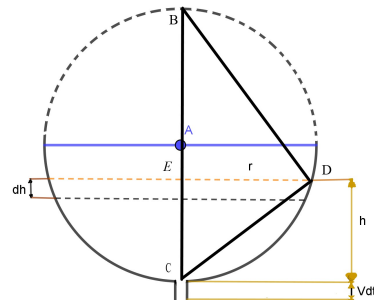


Figura 1.8

Donde: $ED = r$ en el momento h
 BC diámetro de la esfera

$$t = \frac{\pi}{0.6\sqrt{2g}} \left(\frac{2}{5}h - \frac{400}{3} \right) h\sqrt{h} - \frac{C}{0.6\sqrt{2g}}$$

Para encontrar C, se aplica las condiciones de frontera: $t = 0$; $h = 100$:

$$\pi \left(\frac{2}{5}100 - \frac{400}{3} \right) 100\sqrt{100} = 0.6\sqrt{2g}(0) + C$$

$$C = -\pi \frac{14}{15} 10^5$$

$$t = \frac{\pi}{0.6\sqrt{2g}} \left(\frac{2}{5}h - \frac{400}{3} \right) h\sqrt{h} - \frac{-14 \cdot 10^5 \pi}{15(0.6\sqrt{2g})}$$

Para determinar el tiempo en el cual se vacía la semiesfera: $t = t_{vacio}$ cuando $h = 0$

$$t_{vacio} = \frac{14 \cdot 10^5 \pi}{15(0.6\sqrt{2g})} = \frac{14 \cdot 10^5 \pi}{9\sqrt{2g}}$$

- c) Encuentre un modelo matemático que represente el vaciado de un liquido, de un recipiente de forma cónica, de base circular de radio 100 cm y de altura R. En su parte inferior se encuentra un agujero de área 1 cm^2 . Además, se conoce que la velocidad de desalojo del liquido por el agujero es $v_{liquido} = 0.6\sqrt{2gh} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ donde: g es la aceleración de la gravedad.

La ecuación diferencial $h(t)$ se determina al calcular el volumen de vaciado del cuerpo en el tiempo t al tiempo $(t + \Delta t)$ En este tiempo, también sale el liquido por el agujero de área 1 cm^2 , este volumen se lo puede calcular:

$$V_{liquido} = s \cdot e = s \cdot v_{liquido} \cdot t = 1 \text{ cm}^2 \cdot 0.6\sqrt{2gh}t$$

Como se desea, analizar este volumen cuando $t \rightarrow 0$; es decir, en pequeños espacios de tiempo, lo cual se puede escribir:

$$v_{liquido} \cdot t = 1 \text{ cm}^2 \cdot 0.6\sqrt{2gh}t \rightarrow \Delta V_{Volumen \text{ saliente}} = 0.6\sqrt{2gh} \Delta t$$

$$\Delta V_{Volumen \text{ saliente}} = 0.6\sqrt{2gh} \Delta t \rightarrow dV_{Volumen \text{ saliente}} = 0.6\sqrt{2gh} dt$$

La velocidad de salida del liquido, en un tiempo bien pequeño, se considera una constante. Por el otro lado, en un pequeño tiempo disminuye la cantidad de liquido en el recipiente, y como, el tiempo se considera bien pequeño; por lo tanto, en ese pequeño

tiempo se puede considerar que el volumen se lo puede representar:

$$dV = -\pi \cdot r^2 \cdot dh$$

Donde: r - es el radio de la circunferencia de la base del cono, a una altura dh .

A una altura h , se forman triángulos semejantes $\triangle AEB \sim \triangle AFC$; por lo tanto, se puede escribir proporciones:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \rightarrow \frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$$

$$r = \frac{(H-h)R}{H}$$

Se reemplaza en las ecuaciones:

$$dV = dV_{saliente}$$

$$-\pi r^2 dh = 0.6\sqrt{2gh} \cdot dt$$

$$-\pi \frac{(H-h)^2 R^2}{H^2} \cdot dh = 0.6\sqrt{2gh} \cdot dt$$

$$-\pi \frac{(H-h)^2 R^2}{H^2} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}} = 0.6\sqrt{2g} \cdot dt$$

Se obtuvo una ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

$$\frac{-\pi R^2}{H^2} (H-h)^2 \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}} = 0.6\sqrt{2g} \cdot dt$$

$$\frac{-\pi R^2}{H^2} (H^2 - 2Hh + h^2) \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}} = 0.6\sqrt{2g} \cdot dt$$

Se integra a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{-\pi R^2}{H^2} \left(\int (H^2 - 2Hh + h^2) \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}} \right) = 0.6\sqrt{2g} \cdot \int dt + C$$

$$\frac{-\pi R^2}{H^2} \left(\int H^2 \frac{dh}{\sqrt{h}} - 2H \int h \frac{dh}{\sqrt{h}} + \int h^2 \frac{dh}{\sqrt{h}} \right) = 0.6\sqrt{2g} \cdot \int dt + C$$

$$\frac{-\pi R^2}{H^2} \left(\int H^2 \frac{dh}{\sqrt{h}} - 2H \int h \frac{dh}{\sqrt{h}} + \int h^2 \frac{dh}{\sqrt{h}} \right) = 0.6\sqrt{2g} \cdot \int dt + C$$

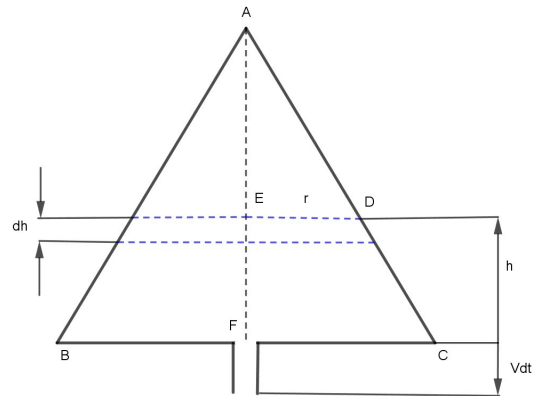


Figura 1.9

$\overline{ED}$ - radio de la circunferencia en el momento t

$\overline{AF}$ - altura del cono circular

$$\frac{-\pi R^2}{H^2} \left(H^2 \int \frac{dh}{\sqrt{h}} - 2H \int h \frac{dh}{\sqrt{h}} + \int h^2 \frac{dh}{\sqrt{h}} \right) = 0.6\sqrt{2g} \cdot \int dt + C$$

$$\frac{-\pi R^2}{H^2} \left(H^2 \int \frac{dh}{\sqrt{h}} - 2H \int h \frac{dh}{\sqrt{h}} + \int h^2 \frac{dh}{\sqrt{h}} \right) = 0.6\sqrt{2g} \cdot \int dt + C$$

$$\frac{-\pi R^2}{H^2} \left(H^2 2\sqrt{h} - 2H \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} \right) = 0.6\sqrt{2g} \cdot t + C$$

$$-\pi R^2 2\sqrt{h} + \pi R^2 \frac{4}{3 \cdot H} h^{\frac{3}{2}} - \pi R^2 \frac{2}{5 \cdot H^2} h^{\frac{5}{2}} = 0.6\sqrt{2g} \cdot t + C$$

Para encontrar C, se aplica las condiciones de frontera: si $t = 0$, entonces $h = H$

$$-\pi R^2 2\sqrt{H} + \pi R^2 \frac{4}{3H} H^{\frac{3}{2}} - \pi R^2 \frac{2}{5 \cdot H^2} H^{\frac{5}{2}} = 0.6\sqrt{2g} \cdot (0) + C$$

$$-\pi R^2 2\sqrt{H} + \pi R^2 \frac{4}{3} H^{\frac{1}{2}} - \pi R^2 \frac{2}{5 \cdot H^2} H^{\frac{5}{2}} = 0.6\sqrt{2g} \cdot (0) + C$$

$$\pi R^2 \left(\frac{4}{3} H^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{H} - \frac{2}{5 \cdot H^2} H^2 H^{\frac{1}{2}} \right) = C$$

$$2\pi R^2 \left(\frac{2}{3} \sqrt{H} - 1\sqrt{H} - \frac{1}{5} \sqrt{H} \right) = C$$

$$2\pi R^2 \sqrt{H} \left(\frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{5} \right) = C$$

$$2\pi R^2 \sqrt{H} \left(\frac{-8}{15} \right) = C$$

$$C = \pi R^2 \sqrt{H} \left(\frac{-16}{15} \right)$$

Para encontrar el tiempo de-vaciado se considera las condiciones de: $t = t_{vacio}$ cuando $h = 0$. Además se reemplaza el valor de la constante:

$$-\pi R^2 2\sqrt{h} + \pi R^2 \frac{4}{3 \cdot H} h^{\frac{3}{2}} - \pi R^2 \frac{2}{5 \cdot H^2} h^{\frac{5}{2}} = 0.6\sqrt{2g} \cdot t - 2\pi R^2 \sqrt{H} \left(\frac{16}{15} \right)$$

$$t_{vacio} = \frac{2\pi R^2}{0.6\sqrt{2g}} \sqrt{H} \left(\frac{16}{15} \right) = \frac{2\pi R^2}{0.6} \sqrt{\frac{H}{2g}} \left(\frac{16}{15} \right)$$

En las siguientes aplicaciones se analiza cuando en un recipiente; además de la salida de un liquido se tiene el ingreso del liquido al mismo. En esta aplicación se puede tener tres casos:

- a) Se tiene un tanque, que inicialmente contiene un $V_{\text{constante}} = 500$ galones, con una determinada concentración. Al tanque ingresa un caudal Ca_{Entrada} de $3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ con una concentración de $2 \frac{\text{kg}}{\text{gal}}$, se mezcla con la solución inicial y sale del tanque con un caudal Ca_{Salida} de $3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$.

Como se puede apreciar:

$$Ca_{\text{Entrada}} = Ca_{\text{Salida}}$$

Se conoce además, la concentración del caudal entrante. La concentración del caudal saliente va cambiando con el tiempo; por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = R_{\text{Entrada}} - R_{\text{Salida}}$$

El lado izquierdo de la igualdad, nos indica la razón de cambio de la concentración del líquido en el recipiente con respecto al tiempo. El lado derecho, nos indica la diferencia de la razón de la concentración del líquido de entrada con la razón de la concentración de la salida.

Si se considera que, esta razón de cambio, se lo realiza en un intervalo de tiempo muy pequeño; es decir, cuando $t \rightarrow 0$, en este caso, se puede escribir:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = R_{\text{Entrada}} - R_{\text{Salida}}$$

Se define cada uno de los elementos de la razón analizada:

$$R_{\text{Entrada}} = 3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot 2 \frac{\text{kg}}{\text{gal}} = 6 \frac{\text{Kg}}{\text{min}}$$

$$R_{\text{Salida}} = 3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot \frac{S}{500} \frac{\text{kg}}{\text{gal}} = \frac{3S}{500} \frac{\text{Kg}}{\text{min}}$$

Se reemplaza en la identidad:

$$\frac{dS}{dt} = R_{\text{Entrada}} - R_{\text{Salida}} = 6 - \frac{3S}{500}$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} = 6 - \frac{3S}{500} \longrightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{3S}{500} = 6$$

La última expresión, como se puede observar, es una ecuación diferencial de primer orden, que representa en cambio de concentración del liquido en el recipiente. El lector ya esta en condiciones y puede resolver la ecuación diferencial encontrada.

- b) Se tiene un tanque, que inicialmente contiene un $V_{inicial} = 500$ galones, con una determinada concentración. Al tanque ingresa un caudal $Ca_{Entrada}$ de $5 \frac{gal}{min}$ con una concentración de $2 \frac{kg}{gal}$, se mezcla con la solución inicial y sale del tanque con un caudal Ca_{Salida} de $3 \frac{gal}{min}$.

Como se puede apreciar:

$$Ca_{Entrada} > Ca_{Salida},$$

Como el caudal de entrada es mayor que el caudal de salida, en algún momento, el tanque se va a llenar de la mezcla. Se conoce además, la concentración del caudal entrante. La concentración del caudal saliente, el cual, va cambiando con el tiempo; por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = R_{Entrada} - R_{Salida}$$

El lado izquierdo de la igualdad, nos indica la razón de cambio de la concentración del liquido en el recipiente con respecto al tiempo. El lado derecho, nos indica la diferencia de la razón de la concentración del liquido de entrada con la razón de la concentración de la salida.

Si se considera que, esta razón de cambio, se lo realiza en un intervalo de tiempo muy pequeño; es decir, cuando $t \rightarrow 0$, en este caso, se puede escribir:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = R_{Entrada} - R_{Salida}$$

Se define cada uno de los elementos de la razón analizada:

$$R_{Entrada} = 5 \frac{gal}{min} \cdot 2 \frac{kg}{gal} = 10 \frac{Kg}{min}$$

$$R_{Salida} = 3 \frac{gal}{min} \cdot \frac{S}{(500+x)} \frac{kg}{gal} = \frac{3S}{(500+x)} \frac{Kg}{min}$$

Como se puede apreciar, en el denominador de la última expresión, apareció una variable x , la cual depende del tiempo y es en

este tiempo, en el cual, el recipiente se va llenado. Se debe obtener una expresión matemática, que permita definir el aumento del volumen del liquido, para lo cual se realiza lo siguiente:

<i>tiempo</i>	<i>Aumento de Volumen</i>	<i>Volumen total</i>
0	$500 + (5 - 3)t$	500
1	$500 + (5 - 3)1$	$500 + 2 = 502$
2	$500 + (5 - 3)2$	$500 + 4 = 504$
3	$500 + (5 - 3)3$	$500 + 6 = 506$
4	$500 + (5 - 3)4$	$500 + 8 = 508$

La tabla permite obtener una expresión para la variación de volumen en el recipiente e igual a $500 + 2 \cdot t$. Se reemplaza en la identidad:

$$\frac{dS}{dt} = R_{Entrada} - R_{Salida} = 10 - \frac{3S}{500 + 2t}$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} = 10 - \frac{3S}{500 + 2t} \rightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{3S}{500 + 2t} = 10$$

La última expresión, como se puede observar, es una ecuación diferencial de primer orden, que representa en cambio de concentración del liquido en el recipiente con los caudales definidos y diferentes. El lector ya esta en condiciones y puede resolver la ecuación diferencial encontrada.

- c) Se tiene un tanque, que inicialmente contiene un $V_{inicial} = 800$ galones, con una determinada concentración. Al tanque ingresa un caudal $Ca_{Entrada}$ de $4 \frac{gal}{min}$ con una concentración de $2 \frac{kg}{gal}$, se mezcla con la solución inicial y sale del tanque con un caudal Ca_{Salida} de $9 \frac{gal}{min}$.

Como se puede apreciar:

$$Ca_{Entrada} < Ca_{Salida}$$

Como el caudal de entrada es menor que el caudal de salida, en algún momento, el tanque se va a vaciar de la mezcla. Se conoce además, la concentración del caudal entrante. La concentración del caudal saliente, el cual, va cambiando con el tiempo; por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = R_{Entrada} - R_{Salida}$$

El lado izquierdo de la igualdad, nos indica la razón de cambio de la concentración del liquido en el recipiente con respecto al tiempo. El lado derecho, nos indica la diferencia de la razón de la concentración del liquido de entrada con la razón de la concentración de la salida.

Si se considera que, esta razón de cambio, se lo realiza en un intervalo de tiempo muy pequeño; es decir, cuando $t \rightarrow 0$, en este caso, se puede escribir:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = R_{Entrada} - R_{Salida}$$

Se define cada uno de los elementos de la razón analizada:

$$R_{Entrada} = 4 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot 2 \frac{\text{kg}}{\text{gal}} = 8 \frac{\text{Kg}}{\text{min}}$$

$$R_{Salida} = 9 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot \frac{S}{800 - x} \frac{\text{kg}}{\text{gal}} = \frac{9S}{(800 - x)} \frac{\text{Kg}}{\text{min}}$$

Como se puede apreciar, en el denominador de la última expresión, apareció una variable x , la cual depende del tiempo y es en este tiempo, en el cual, el recipiente se va vaciando. Se debe obtener una expresión matemática, que permita definir la disminución del volumen del liquido en el recipiente, para lo cual, se realiza lo siguiente:

tiempo	Aumento de Volumen	Volumen total
0	$800 + (4 - 9)t$	800
1	$800 + (4 - 9)1$	$800 - 5 = 795$
2	$800 + (4 - 9)2$	$800 - 10 = 790$
3	$800 + (4 - 9)3$	$800 - 15 = 785$
4	$800 + (4 - 9)4$	$800 - 20 = 780$

La tabla permite obtener una expresión para la variación de volumen en el recipiente e igual a $800 - 5 \cdot t$. Se reemplaza en la identidad:

$$\frac{dS}{dt} = R_{Entrada} - R_{Salida} = 10 - \frac{9S}{800 - 5t}$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} = 10 - \frac{9S}{800 - 5t} \longrightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{9S}{800 - 5t} = 10$$

La última expresión, como se puede observar, es una ecuación diferencial de primer orden, que representa el cambio de la concentración del liquido en el recipiente, con los caudales definidos y diferentes. El lector ya esta en condiciones y puede resolver la ecuación diferencial encontrada. Queda por realizar un análisis , cuando el liquido entrante tiene una concentración cero. Al igual que en los casos anteriores el caudal entrante y saliente puede ser igual o diferente, en este caso, se considera el caso, en el cual el caudal de entrada es igual al caudal de salida.

- d) Se tiene un tanque, que inicialmente contiene un $V_{inicial} = 800$ galones, con una determinada concentración. Al tanque ingresa un caudal $Ca_{Entrada}$ de $4 \frac{gal}{min}$ con una concentración de $0 \frac{kg}{gal}$; es decir, el liquido entrante es puro. Se mezcla con la solución inicial y sale del tanque con un caudal Ca_{Salida} de $4 \frac{gal}{min}$.

Como se puede apreciar:

$$Ca_{Entrada} = Ca_{Salida},$$

Se conoce además, La concentración del caudal saliente, el cual, va cambiando con el tiempo; por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = R_{Entrada} - R_{Salida}$$

El lado izquierdo de la igualdad, nos indica la razón de cambio de la concentración del liquido en el recipiente con respecto el tiempo. El lado derecho, nos indica la diferencia de la razón de la concentración del liquido de entrada con la razón de la concentración de la salida.

Si se considera que, esta razón de cambio, se lo realiza en un intervalo de tiempo muy pequeño; es decir, cuando $t \rightarrow 0$, en este caso, se puede escribir:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = R_{Entrada} - R_{Salida}$$

Se define cada uno de los elementos de la razón analizada:

$$R_{Entrada} = 4 \frac{gal}{min} \cdot 0 \frac{kg}{gal} = 0 \frac{Kg}{min}$$

$$R_{Salida} = 4 \frac{gal}{min} \cdot S \frac{kg}{gal} = \frac{4S}{(800)} \frac{Kg}{min}$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} = 0 - \frac{4S}{800} \longrightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{4S}{800} = 0$$

La última expresión, como se puede observar, es una ecuación diferencial de primer orden, que representa el cambio de concentración del liquido en el recipiente, con los caudales definidos y diferentes. El lector ya esta en condiciones y puede resolver la ecuación diferencial encontrada.

1.11.1. Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.

1. Un punto de masa 'm' se mueve con un movimiento lineal por la acción de una fuerza F, que es directamente proporcional al tiempo 't' e inversamente proporcional a la velocidad 'V'. Encontrar un modelo matemático que represente el cambio de la velocidad en función del tiempo, si se conoce que: $t = 0$ se tiene $v = 0$.
2. Un cuerpo se mueve con una aceleración proporcional al tiempo y a la velocidad v. Encontrar un modelo matemático que represente el cambio de la velocidad con respecto al tiempo, si se conoce que: para $t = 0$, $v = v_0$.
3. Encontrar la relación matemática entre la velocidad 'V' de un punto de masa 'm' y el tiempo, si se conoce que, la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad y que para: $t = 0$, se tiene que $V = 0$.
4. Escribir la ecuación de la curva que cumple las siguientes condiciones:
 - a) El segmento tangencial en cualquier punto P(x,y) que se encuentra entre los ejes del plano cartesiano se divide en la mitad
 - b) La curva buscada pasa por el punto $P_0(3,4)$
5. Escribir la ecuación de la curva que cumple las siguientes condiciones:
 - a) El coeficiente tangencial en cualquier punto P(x,y) de la función es dos veces menor que el coeficiente direccional de la recta, que une el punto de origen con el punto P(x,y)
 - b) La curva buscada pasa por el punto $P_0(4,3)$

6. La ley de desintegración de un cuerpo consiste en que: la velocidad desintegración R' en un determinado tiempo es proporcional a la cantidad que todavía no se ha desintegrado. Determine la relación matemática de desintegración de un cuerpo con respecto al tiempo t' , si se conoce que en el tiempo de 1600 años la cantidad de R_0 disminuyo a la mitad de su masa.
7. Determine la relación matemática entre la corriente eléctrica I' con respecto al tiempo, si en el momento, que se desconecto la fuerza electromotriz E' la intensidad de corriente $I = I_0$.
8. Determine la relación matemática entre la corriente eléctrica I' con respecto al tiempo, si en el momento, en que se conecto la fuerza electromotriz $E = E_0 \sin(\omega t)$ la intensidad de corriente $I = I_0$.
9. Encontrar la ecuación de la curva para que la suma de los cuadrados de las distancias de dos puntos dados $A_1(-5,0), A_2(5,0)$ de las tangentes a la curva sea constante y sea igual a 72.
10. La velocidad $\frac{dx}{dt}$ de la reacción de dos elementos cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

Donde: a, b significan la concentración inicial de la substancia en reacción química, k la constante de la velocidad de reacción química. Encontrar la relación de dependencia de la concentración x del compuesto con respecto al tiempo, si $x(0) = 0$.

11. Una esfera de metal con una temperatura inicial $T_1 = 12.9^\circ$ es enfriada con un chorro de agua de temperatura $T_0 = 0^\circ$. En 8 minutos y 16 segundos la esfera se enfrió llegando a la temperatura $T_2 = 9.9^\circ$. Si se considera que la velocidad de enfriamiento en todo momento es proporcional a la diferencia de temperatura de la esfera y el agua, calcular el tiempo en el cual la esfera se enfría a la temperatura de $T_3 = 6.9^\circ$
12. Encontrar una relación matemática, que defina el comportamiento de la temperatura T' de un cuerpo con respecto al tiempo. Si se conoce, que en el transcurso de s' minutos la temperatura del cuerpo bajo de T_1 a T_2 , mientras que, la temperatura del medio

ambiente permanecía constante e igual a T_0 . Considere, que la velocidad de enfriamiento del cuerpo es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.

13. Encontrar la ecuación de la curva, si sus tangentes forman con los ejes del plano cartesiano un triangulo de área constante e igual a 2.
14. La velocidad de desintegración de un elemento radioactivo, en cada momento es proporcional a la cantidad del elemento. El tiempo de desintegración de la mitad de su masa es de 26.7 minutos. Que porcentaje de la cantidad inicial de desintegra en el transcurso de 10 minutos.
15. Un cuerpo radioactivo de masa m_0 se desintegra parcialmente en un tiempo de 0 a t con una velocidad directamente proporcional a la masa que no se desintegro en este tiempo. Calcular el tiempo de desintegración de un tercio de su masa inicial del cuerpo radioactivo.
16. Un recipiente de forma de cono circular de una altura de 10 cm y un angulo de $\alpha = 60^\circ$. En su base circular se encuentra un hueco de área de 0.5cm^2 . La velocidad v de desalojo del agua por el hueco es igual a $0.6 \sqrt{2gh} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Encuentre un modelo matemático que represente el desalojo del agua del recipiente.
17. Encuentre la ecuación de la subtangente que en cada punto de la curva es constante e igual a p.
18. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(\sqrt{2}, 0)$, si la suma de las longitudes de su tangente y subtangente es igual al producto de las coordenadas del punto de tangencia?
19. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 2)$, si su subtangente es dos veces mayor que la abscisa del punto de tangencia?
20. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ si la longitud del segmento del semieje de las abscisas, que se cortan por su tangente, es igual al cuadrado de la abscisa del punto de tangencia?
21. Hállense las ecuaciones de las curvas para las cuales la longitud del segmento de la normal es constante e igual a a ?

22. Definir la ecuación $s = f(t)$ de un movimiento lineal en el cual la velocidad $v = \frac{ds}{dt}$ es directamente proporcional al tiempo, considere que la constante de proporcionalidad es igual a 10.
23. definir el cambio de corriente eléctrica $i = f(t)$, en un circuito en el cual, se puede la resistencia del cable $R \sim 0$. El circuito esta conectado a una fuerza electromotriz $u = U \sin wt$ cuando $t = 0$.
24. Se tiene la ecuación diferencial adiabatica $\frac{dp}{dv}v + kp = 0$ donde v es volumen. p presión, k es la constante del gas. Encuentre el modelo matemático que existe entre presión y volumen.
25. Definir el cambio de energía tomada $L = f(t)$ en función del tiempo de un componente, en el cual, el cambio de $\frac{dL}{dt}$ era directamente proporcional a $\sin^3 3t$.
26. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) de las siguientes características: cada segmento tangencial a la linea que se encuentra entre los ejes del plano cartesiano divide a la mitad por el punto tangencial.
27. La longitud de un tubo al calentarlo se la expresa $\frac{1}{L} \frac{dL}{dt}$ es igual a 0.0001, donde t es la temperatura. Encontrar el modelo matemático que expresa el cambio de longitud en función de la temperatura. Si para $t = 0$, la longitud era 10, encontrar la temperatura para la cual, aumento en uno por ciento.
28. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 0) de las siguientes características: cada segmento tangencial a la linea que se encuentra entre el punto tangencial y el punto de corte con el eje y es una constante y es igual a 2.
29. Un punto de masa igual a un gramo, tiene un movimiento lineal, por la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo e inversamente proporcional a la velocidad. En el momento en que $t = 10$ seg. su velocidad era de $20 \frac{cm}{s}$ y la fuerza era de 10 N. Encontrar la velocidad después de haber pasado un minuto.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden

1. Características Básicas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden.
2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden que se pueden transformar a ecuaciones diferenciales de primer orden:
 - a) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden que claramente no tengan el elemento y' .
 - b) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden que claramente no tengan el elemento x' .
 - c) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden que claramente tengan todos sus elementos.
3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden con Coeficientes Constantes Homogénea.
4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de n' Orden con Coeficientes Constantes Homogénea.
5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden y de n' con Coeficientes Constantes No-homogénea.
6. Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo Orden.
7. Ecuaciones Diferenciales de Euler de n' Orden
8. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden.
9. Ecuaciones Diferenciales de familia de curvas. Trayectorias Perpendiculares.

2.1. Características Básicas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden.

Las ecuaciones diferenciales de n orden, se las puede definir como ecuaciones (2.1), que definen una relación entre la variable independiente x , la variable dependiente y e sus derivadas $y', y'', y''', \dots, y^n$. Esto se lo puede escribir de la siguiente forma:

$$F(x, y, y', y'', y''' \dots y^n) = 0 \quad (2.1)$$

Donde: F es una función definida y continua de $(n + 2)$ variables en un intervalo de espacio de $(n + 2)$ dimensiones.

En forma general, se puede escribir que, una ecuación de segundo orden tiene la forma (2.2):

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (2.2)$$

Toda función $y = \varphi(x)$, que cumple la ecuación diferencial, se denomina solución o integral de la ecuación diferencial. Para todo (x, y) se lo trata como puntos del plano cartesiano, en el plano Oxy , para cada solución de la ecuación diferencial representa cierta curva, a la cual, se la llama la curva integral de la ecuación diferencial. El principio de Cauchy, sobre los valores iniciales de la ecuación diferencial de n orden se denomina al principio, que consiste en encontrar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial, para la cual, $x = x_0$, en conjunto con las derivadas de $(n - 1)$ orden toma de antemano valores $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{n-1}$; lo que significa que:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$$

El principio de Cauchy; es decir, el principio de los valores iniciales, para la ecuación diferencial de segundo orden, consiste en encontrar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial, la cual, en conjunto con la primera derivada $y'(x)$, toma para $x = x_0$ un valor dado de antemano y_0, y'_0 , lo que significa: $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$

Una solución general o una integral general de una ecuación diferencial de segundo orden, es una función de la forma (2.3):

$$y = f(x, C_1, C_2) \quad (2.3)$$

Conocida como la forma clara, directa o explicita, que tiene la variable independiente x y dos constantes cualquiera C_1, C_2 , las cuales cumplen con la ecuación diferencial, en cierto intervalo de las variables: x, C_1, C_2

En la practica, el conocimiento de la integral general, es cómodo para obtener de ellas, la integral especifica, al especializar las constantes C_1, C_2 . No toda integral general tiene esta propiedad.

La integral general de la ecuación diferencial de segundo orden, se la puede presentar en la forma implícita (2.4):

$$\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0 \quad (2.4)$$

En forma similar se define para ecuaciones diferenciales de n orden.

Geométricamente hablando, la integral general, en sus dos formas, representa, una familia de curvas integrales de dos parámetros. Desde el punto de vista de la geometría, el principio de Cauchy, para las ecuaciones diferenciales de segundo orden consiste en la selección de la familia de curvas integrales, aquella curva de dos parámetros, la cual pasa por los puntos dados en el plano (x_0, y_0) y tiene en este punto una tangente dada.

El principio de Cauchy, tiene además, una clara interpretación mecánica; es decir, consiste en el análisis del movimiento de un punto, cuando se conoce sus condiciones iniciales de desplazamiento y de velocidad del punto en su momento inicial.

Además del principio de Cauchy, se puede aplicar el principio de las condiciones de frontera, para una ecuación diferencial de segundo orden.

El principio de los valores de frontera, para una ecuación diferencial de segundo orden, consiste en obtener una solución $y(x)$ para la ecuación diferencial en cierto intervalo $< a, b >$, el cual, en los extremos del intervalo, toma los valores dados, los valores p y q ; lo que significa:

$$y(x = a) = p \quad y \quad y(x = b) = q$$

Esto se lo conoce, como el primer principio de los valores de frontera. Para encontrar la solución al primer principio de los valores de frontera, reemplazamos en la integral general, cuando, $x = a$ y cuando $x = b$ y teniendo en cuenta los valores de frontera, se obtiene un sistema de ecuaciones (2.5):

$$\begin{cases} f(a, C_1, C_2) = p \\ f(b, C_1, C_2) = q \end{cases} \quad (2.5)$$

Sistema que permite obtener los valores de C_1 y C_2 .

El segundo principio de las condiciones de frontera, consiste en encontrar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial, en el intervalo $[a, b]$,

de el cual, la primera derivada $y'(x)$ en los extremos del intervalo, toma los valores dados p y q ; lo que significa:

$$y'(x=a) = p \quad y \quad y'(x=b) = q$$

Teniendo la integral general de la ecuación diferencial y las condiciones de frontera, se forma un sistema (2.6), para el calculo de los valores de C_1, C_2

$$\begin{cases} f'_x(a, C_1, C_2) = p \\ f'_x(b, C_1, C_2) = q \end{cases} \quad (2.6)$$

Tomando en cuenta, el principio de frontera del primero, así como, del segundo se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas C_1 y C_2 . El sistema se resuelve y se obtiene los valores de C_1 y C_2 .

Se puede realizar un análisis, para el cual por facilidad, se puede escribir una ecuación diferencial de segundo orden de la forma (2.7):

$$y'' + f_1 y' + f_2 y = f_3 \quad (2.7)$$

Donde: f_1, f_2 y f_3 son continuas en el intervalo (a,b) . Tiene solución, que cumple las condiciones de frontera, se les denomina valores propios de las condiciones de frontera de la ecuación diferencial analizada. La solución, que representa los valores propios se denominan funciones propias del principio de frontera. Del análisis realizado, se puede concluir:

1. La ecuación es continua con relación a todos sus argumentos:

$$x, y, y', y'' \dots, y^n$$

en un intervalo de cierto dominio V de los cambios de los argumentos.

2. Tiene, en el dominio V , derivadas parciales continuas:

$$f_{y'}, f_{y''}, f_{y'''}, f_{y''''} \dots f_{y^{n-1}}$$

implica que, existe exactamente una solución $y = y(x)$, que cumple las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0 \dots, \quad y^n(x_0) = y^n_0$$

Donde los valores:

$$x_0, y'_0, y''_0 \dots y^n_0 \text{ pertenecen al dominio } V.$$

2.2. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden que se pueden transformar a Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

En algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden, dependiendo de su estructura, se puede transformarlas a ecuaciones diferenciales de primer orden.

En este momento se conoce la forma general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden (2.8):

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (2.8)$$

Esta estructura nos indica que habrá, tres tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se puede transformar a ecuaciones diferenciales de primer orden. En cada caso se aplicara un cambio de variable, con lo cual, se obtendrá uno de los tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden que fueron analizados en el capítulo anterior.

1. **Caso 1. No tiene ' y '** La ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma (2.9):

$$F(x, y', y'') = 0 \quad (2.9)$$

Es decir, en el lado izquierdo de la ecuación no se observa, en forma clara, la variable ' y '. En este caso, se realiza un cambio de variable de la forma: $y' = u(x)$ con lo cual, se obtiene la segunda derivada: $y'' = u'(x)$.

La ecuación diferencial de segundo orden tendría la forma:

$$F(x, y', y'') = 0 \longrightarrow F(x, u, u') = 0$$

Por lo tanto, se ha obtenido una ecuación diferencial de primer orden con respecto a $u(x)$.

2. **Caso 2. No tiene ' x '** La ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma (2.10):

$$F(y, y', y'') = 0 \quad (2.10)$$

Es decir, en el lado izquierdo de la ecuación diferencial no se observa, en forma clara, la variable ' x '. En este caso, se realiza un cambio de variable de la forma: $y' = u(y)$. Se obtiene la segunda derivada, pero en este caso, se debe mantener en mente que, ' y ' esta

en función de x ; por lo tanto, se debe aplicar el teorema de la cadena, para obtener su derivada (2.11):

$$y'' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u \quad (2.11)$$

La ecuación diferencial de segundo orden tendría la forma:

$$F(y, y', y'') = 0 \rightarrow F\left(y, u, \frac{du}{dy} \cdot u\right) = 0$$

Por lo tanto, se ha obtenido una ecuación diferencial de primer orden con respecto a $u(y)$, en esta ecuación, el rol de variable independiente, lo cumple la variable y .

3. **Caso 3. Tiene todos los elementos** La ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma (2.12):

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (2.12)$$

Es decir, en el lado izquierdo de la ecuación diferencial tiene todos sus elementos: x, y, y', y'' . En este caso, se realiza un cambio de variable de la forma: $y = e^{\int u \cdot dx}$. Se obtiene la primera y segunda derivada:

$$y = e^{\int u \cdot dx} \rightarrow y' = u \cdot e^{\int u \cdot dx} \rightarrow y'' = (u' + u^2)e^{\int u \cdot dx}$$

La ecuación diferencial de segundo orden tendría la forma:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \rightarrow F\left(e^{\int u \cdot dx}, (x, 1, u, (u' + u^2))\right) = 0$$

Por lo tanto, se ha obtenido una ecuación diferencial de primer orden con respecto a $u(x)$, en esta ecuación, $u(x)$ es la incógnita.

2.2.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden que se Transforman a Ecuaciones de Primer Orden.

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) \quad (2.13)$$

La ecuación diferencial de segundo orden (2.13) no tiene en forma clara la variable y y y' . Por lo tanto, se realiza un cambio de variable (2.14):

$$y' = u(x) \quad y'' = \frac{du}{dx} \quad (2.14)$$

Se reemplaza (2.14) en la ecuación a resolver (2.13):

$$x \frac{du}{dx} = u \ln\left(\frac{u}{x}\right) \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \ln\left(\frac{u}{x}\right)$$

Como se puede observar, la ecuación diferencial obtenida es una ecuación diferencial de primer orden. El método de resolución de esta ecuación diferencial, esta en sección 1.3 de este libro.

La integral general de $u(x)$ tiene la forma:

$$u = x e^{C_1 x + 1}$$

Se reemplaza:

$$u = x e^{C_1 x + 1} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = x e^{C_1 x + 1} \longrightarrow dy = x e^{C_1 x + 1} dx$$

Se integra a ambos lados de la ecuación, para obtener la integral general del ejercicio.

$$y = \left(\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \right) e^{C_1 x + 1} + C_2$$

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + x y' = 1 \quad (2.15)$$

La ecuación diferencial (2.15) no tiene en forma clara la variable y' y y'' . Por lo tanto, se realiza un cambio de variable (2.16):

$$y' = u(x) \quad y'' = \frac{du}{dx} \quad (2.16)$$

Se reemplaza (2.16) en la ecuación diferencial (2.15) a resolver:

$$\begin{aligned} x^2 y'' + x y' = 1 &\longrightarrow x^2 \frac{du}{dx} + x u = 1 \\ &= \frac{du}{dx} + \frac{x u}{x^2} = \frac{1}{x^2} \longrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = \frac{1}{x^2} ; x \neq 0 \end{aligned}$$

Como se puede observar, la ecuación diferencial obtenida es una ecuación diferencial de primer orden. El método de resolución de esta ecuación, esta en sección 1.5 de este libro. La integral general de $u(x)$ tiene la forma (2.17):

$$u = \frac{C_1}{x} + \frac{\ln x}{x} \quad (2.17)$$

Se reemplaza (2.16) en la ecuación (2.17):

$$u = \frac{C_1}{x} + \frac{\ln x}{x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} + \frac{\ln x}{x} \longrightarrow dy = \left(\frac{C_1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

Se integra a ambos lados de la ecuación, para obtener la integral general del ejercicio.

$$y = C_1 \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + C_2$$

3. Resolver la ecuación diferencial:

$$y''(1 + \ln(x)) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln(x) \quad (2.18)$$

Con las condiciones iniciales: $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$

La ecuación diferencial no tiene en forma clara la variable ' y '. Por lo tanto, se realiza un cambio de variable (2.19):

$$y' = u(x) \quad y'' = \frac{du}{dx} \quad (2.19)$$

Se reemplaza (2.19) en la ecuación (2.18) a resolver:

$$y''(1 + \ln(x)) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln(x) \longrightarrow \frac{du}{dx}(1 + \ln(x)) + \frac{u}{x} = 2 + \ln(x)$$

$$\frac{du}{dx}(1 + \ln(x)) + \frac{u}{x} = 2 + \ln(x) \longrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{u}{x(1 + \ln(x))} = \frac{2 + \ln(x)}{1 + \ln(x)}$$

Como se puede observar, la ecuación diferencial obtenida es una ecuación diferencial de primer orden. El método de resolución de esta ecuación, esta en sección 1.5 de este libro. La integral general de $u(x)$ tiene la forma:

$$u = \frac{C_1}{1 + \ln(x)} + x \quad (2.20)$$

Se reemplaza (2.19) en la (2.20):

$$u = \frac{C_1}{1 + \ln(x)} + x \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{1 + \ln(x)} + x$$

Se reemplaza la condición inicial para la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{1 + \ln(x)} + x \longrightarrow 1 = \frac{C_1}{1 + \ln(1)} + 1 \longrightarrow C_1 = 0$$

Por lo tanto, queda:

$$y' = x \longrightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_2$$

Se reemplaza la primera condición (2.19) para y:

$$y = \frac{x^2}{2} + C_2 \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_2 \longrightarrow C_2 = 0$$

Se obtiene: $y = \frac{1}{2}x^2$ que es la solución al ejercicio, y que además, cumple con las condiciones iniciales dadas.

4. Resolver la ecuación diferencial:

$$(x+1)y'' + xy'^2 = y' \quad (2.21)$$

Con las condiciones iniciales: $y(1) = -2$, $y'(1) = 4$

La ecuación diferencial no tiene en forma clara la variable y' y y'' . Por lo tanto, se realiza un cambio de variable (2.22):

$$y' = u(x) \quad y'' = \frac{du}{dx} \quad (2.22)$$

Se reemplaza (2.22) en la ecuación (2.21) a resolver:

$$(x+1)y'' + xy'^2 = y' \longrightarrow (x+1)\frac{du}{dx} + xu^2 = u \longrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{xu^2}{x+1} = \frac{u}{x+1}$$

Se ordena la ecuación:

$$\frac{du}{dx} + \frac{xu^2}{x+1} = \frac{u}{x+1} \longrightarrow \frac{du}{dx} - \frac{u}{x+1} = -\frac{xu^2}{x+1}$$

Como se puede observar, la ecuación diferencial obtenida es una ecuación diferencial de primer orden, ecuación de Bernoulli de variable $u(x)$. El método de resolución de esta ecuación, esta en sección 1.6 de este libro. La integral general de $u(x)$ tiene la forma:

$$\frac{1}{u} = \frac{C_1}{x+1} + \frac{x^2}{2(x+1)} \quad (2.23)$$

Se reemplaza (2.22) en la ecuación (2.23):

$$\frac{1}{u} = \frac{C_1}{x+1} + \frac{x^2}{2(x+1)} \longrightarrow \frac{1}{y'} = \frac{C_1}{x+1} + \frac{x^2}{2(x+1)}$$

Se reemplaza la condición inicial con respecto a la deriva:

$$\frac{1}{y'} = \frac{C_1}{x+1} + \frac{x^2}{2(x+1)} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{C_1}{1+1} + \frac{1}{2(1+1)} \rightarrow C_1 = 0$$

Se puede escribir:

$$\frac{1}{y'} = \frac{x^2}{2(x+1)} \rightarrow \frac{2(x+1)}{x^2} = y' \rightarrow y' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$$

Integrando y reemplazando la condición $y(1) = -2$, se obtiene:

$$y = 2\ln(x) - \frac{2}{x}$$

Es la solución a nuestro ejercicio, y que además, cumple con las condiciones iniciales.

5. Resolver la ecuación diferencial:

$$2y'^2 = (y-1)y'' \quad (2.24)$$

La ecuación diferencial no tiene en forma clara la variable 'x'. Por lo tanto, en este caso se realiza un cambio de variable (2.25):

$$y' = u(y) \quad y'' = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} \rightarrow y'' = \frac{du}{dy} u \quad (2.25)$$

Se reemplaza (2.25) en la ecuación (2.24) a resolver:

$$2y'^2 = (y-1)y'' \rightarrow 2u^2 = (y-1)\frac{du}{dy}u \rightarrow 2u = (y-1)\frac{du}{dy}$$

$$2u = (y-1)\frac{du}{dy} \rightarrow \frac{dy}{y-1} = \frac{du}{2u}$$

Integrando ambos lados se obtiene:

$$\ln(y-1) = \frac{1}{2}\ln(u) + \ln(C_1) \rightarrow \ln(y-1) - \ln(C_1) = \ln(\sqrt{u}) \rightarrow \ln\left(\frac{y-1}{C_1}\right) = \ln(\sqrt{u})$$

$$\sqrt{u} = \frac{y-1}{C_1} \rightarrow u = (y-1)^2 C_2^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = (y-1)^2 C_2^2$$

Se separa las variables y se integra:

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2 C_2^2 \rightarrow \frac{dy}{C_2^2(y-1)^2} = dx$$

Se obtiene la integral general:

$$-\frac{1}{C_2^2(y-1)} = x + C_3 \rightarrow C_2^2(y-1)(x + C_3) + 1 = 0$$

Es la solución a nuestro ejercicio, y que además, cumple con las condiciones iniciales.

6. Resolver la ecuación diferencial:

$$yy'' - y'^2 = y^4 \quad (2.26)$$

Si las condiciones iniciales son; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$

La ecuación diferencial no tiene en forma clara la variable 'x'. Por lo tanto, en este caso se realiza un cambio de variable (2.27):

$$y' = u(y) \quad y'' = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} \rightarrow y'' = \frac{du}{dy} u \quad (2.27)$$

Se reemplaza (2.27) en la ecuación (2.26) a resolver:

$$yy'' - y'^2 = y^4 \rightarrow y \frac{du}{dy} u - u^2 = y^4$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{u^2}{uy} = \frac{y^4}{uy} \rightarrow \frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = \frac{y^3}{u}$$

Como se puede observar, la ecuación diferencial obtenida es una ecuación diferencial de primer orden, ecuación de Bernoulli de variable $u(x)$. El método de resolución de esta ecuación, esta en sección 1.6 de este libro. La integral general de $u(x)$ tiene la forma:

$$u^2 = C_1 y^2 + y^4 \rightarrow u = \pm y \sqrt{C_1 + y^2} \quad (2.28)$$

Se reemplaza (2.27) a la ecuación (2.28):

$$u = \pm y \sqrt{C_1 + y^2} \rightarrow y' = \pm y \sqrt{C_1 + y^2}$$

Se reemplaza las condiciones iniciales::

$$y' = \pm y \sqrt{C_1 + y^2} \rightarrow 0 = \pm 1 \sqrt{C_1 + 1^2} \rightarrow C_1 = -1$$

Por lo tanto, se reemplaza en la integral general:

$$y' = \pm y \sqrt{-1 + y^2} \rightarrow y' = \pm y \sqrt{y^2 - 1} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm y \sqrt{y^2 - 1}$$

Se separa las variables, se integra y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \pm y \sqrt{y^2 - 1} \rightarrow \frac{dy}{y \sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx$$

$$\frac{dy}{y \sqrt{y^2 - 1}} \mp dx = 0 \rightarrow \arccos\left(\frac{1}{y}\right) \pm x = C$$

Se reemplaza la condición inicial:

$$\arccos\left(\frac{1}{y}\right) \pm x = C \rightarrow \arccos\left(\frac{1}{1}\right) \pm 0 = C \rightarrow C = 0$$

Se reemplaza el valor de C en la integral general y se obtiene:

$$\arccos\left(\frac{1}{y}\right) \pm x = C \rightarrow \arccos\left(\frac{1}{y}\right) \pm x = 0 \rightarrow \arccos\left(\frac{1}{y}\right) = \pm x$$

Se toma a ambos de la ecuación $\cos(x)$:

$$\arccos\left(\frac{1}{y}\right) = \pm x \rightarrow \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \cos(\pm x) \rightarrow \frac{1}{y} = \cos(\pm x)$$

Finalmente se obtiene:

$$y = \frac{1}{\cos(\pm x)} \rightarrow y = \frac{1}{\cos(x)}$$

Es la función que cumple la ecuación diferencial y las condiciones iniciales.

7. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' = -\frac{1}{y^3} \quad (2.29)$$

La ecuación no tiene, en forma clara la variable x. Por lo tanto, en este caso se realiza un cambio de variable:

$$y' = u(y) \quad y'' = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} \rightarrow y'' = \frac{du}{dy} u \quad (2.30)$$

Se reemplaza (2.30) en la ecuación (2.29) a resolver:

$$y'' = -\frac{1}{y^3} \rightarrow \frac{du}{dy} u = -\frac{1}{y^3} \rightarrow u du = -\frac{dy}{y^3}$$

Se integra a ambos lados de la ecuación:

$$u du = -\frac{dy}{y^3} \rightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{-y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2}$$

$$u^2 = \frac{1}{y^2} + C_1 \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1 + y^2 C_1}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1 + C_1 y^2}}{y} \rightarrow \pm \frac{y dy}{\sqrt{1 + C_1 y^2}} = dx$$

Se integra a ambos lados de la identidad y se obtiene la integral general:

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1} \sqrt{1 + C_1 y^2} \rightarrow C_1^2 (x + C_2)^2 = 1 + C_1 y^2$$

$$C_1^2 (x + C_2)^2 - 1 - C_1 y^2 = 0$$

Se ha obtenido la integral general del ejercicio en su forma implícita.

8. Resolver la ecuación diferencial:

$$yy'' = (y')^2 - (y')^3 \quad (2.31)$$

Si las condiciones iniciales son; $y(1) = 1$; $y'(1) = -1$

La ecuación diferencial no tiene, en forma clara la variable 'x'. Por lo tanto, en este caso se realiza un cambio de variable (2.32):

$$y' = u(y) \quad y'' = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} \rightarrow y'' = \frac{du}{dy} u \quad (2.32)$$

Se reemplaza (2.32) en la ecuación (2.31) a resolver:

$$yy'' = (y')^2 - (y')^3 \rightarrow yu \frac{du}{dy} = u^2 - u^3 \rightarrow u \frac{du}{u^2 - u^3} = \frac{dy}{y}$$

Se simplifica, se integra a ambos lados:

$$u \frac{du}{u^2 - u^3} = \frac{dy}{y} \rightarrow u \frac{du}{u^2(1 - u)} = \frac{dy}{y} \rightarrow \frac{du}{u(1 - u)} = \frac{dy}{y}$$

$$\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1 - u}\right) du = \frac{dy}{y} \rightarrow \ln(u) - \ln(1 - u) = \ln(y) + \ln(C_1)$$

$$\ln\left(\frac{u}{1-u}\right) = \ln(C_1 y) \rightarrow \frac{u}{1-u} = C_1 y \rightarrow \frac{y'}{1-y'} = C_1 y$$

Se reemplaza los valores de las condiciones iniciales:

$$\frac{y'}{1-y'} = C_1 y \rightarrow \frac{-1}{1-(-1)} = C_1 1 \rightarrow \frac{-1}{1+1} = C_1 1 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$$

Se reemplaza el valor de C_1 :

$$\frac{y'}{1-y'} = C_1 y \rightarrow \frac{y'}{1-y'} = -\frac{1}{2} y$$

Se despeja y' , obteniendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-2}$$

Se separa las variable y se integra:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-2} \rightarrow \frac{(y-2)dy}{y} = dx$$

$$\left(1 - \frac{2}{y}\right) dy = dx \rightarrow y - 2\ln(y) = x + C$$

Se reemplaza la condición inicial con respecto a y :

$$y - 2\ln(y) = x + C \rightarrow 1 - 2\ln(1) = 1 + C \rightarrow C = 0$$

Se reemplaza el valor de C :

$$y - 2\ln(y) = x + C \rightarrow y - 2\ln(y) = x \rightarrow y - 2\ln(y) - x = 0$$

La última expresión algebraica representa la solución buscada en su forma implícita, que es la solución (integral) específica, que además, cumple con las condiciones iniciales.

9. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2 y y'' = (y - x y')^2 \quad (2.33)$$

La ecuación contiene todos los elementos de una ecuación diferencial de segundo orden, en este caso, se realiza un cambio de variable (2.34):

$$y = e^{\int u dx} \quad (2.34)$$

Se deriva dos veces:

$$y = e^{\int u dx} \longrightarrow y' = e^{\int u dx} \left(\int u dx \right)' \longrightarrow y' = u e^{\int u dx}$$

$$y' = u e^{\int u dx} \longrightarrow y'' = \left(u e^{\int u dx} \right)' \longrightarrow y'' = u' e^{\int u dx} + u \left(e^{\int u dx} \right)'$$

$$y'' = u' e^{\int u dx} + u \left(u e^{\int u dx} \right) \longrightarrow y'' = e^{\int u dx} (u' + u^2)$$

Se reemplaza las derivadas obtenidas en la ecuación (2.33) a resolver:

$$\begin{aligned} x^2 y y'' &= (y - x y')^2 \longrightarrow x^2 \left(e^{\int u dx} \right) \left(e^{\int u dx} (u' + u^2) \right) = \\ &= \left[\left(e^{\int u dx} \right) - x \left(u e^{\int u dx} \right) \right]^2 = \\ &= x^2 \left(e^{\int u dx} \right)^2 \left((u' + u^2) \right) = \left(e^{\int u dx} \right)^2 [(1 - x u)]^2 \end{aligned}$$

Al simplificar, se obtiene:

$$x^2 (u' + u^2) = [1 - x u]^2$$

Se desarrolla el binomio y se simplifica:

$$\begin{aligned} x^2 (u' + u^2) &= [1 - x u]^2 \longrightarrow x^2 u' + x^2 u^2 = \\ &= 1 - 2 x u + x^2 u^2 \longrightarrow x^2 u' = 1 - 2 x u \end{aligned}$$

Se divide para x^2 y se ordena la expresión:

$$x^2 u' = 1 - 2 x u \longrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{2 x u}{x^2} = \frac{1}{x^2} \longrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{2 u}{x} = \frac{1}{x^2}$$

Como se puede observar, la ecuación diferencial obtenida es una ecuación diferencial de primer orden, ecuación de Bernoulli de variable $u(x)$. El método de resolución de esta ecuación, esta en sección 1.5 de este libro. La integral general de $u(x)$ tiene la forma (2.35):

$$u = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Se reemplaza (2.34) en la ecuación (2.35):

$$y = e^{\int u dx} \longrightarrow y = e^{\int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx} \quad (2.35)$$

Se integra lo del exponente:

$$\int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{C_1}{x} + \ln(x) + \ln(C_2)$$

Se reemplaza:

$$y = e^{\int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx} \longrightarrow y = e^{-\frac{C_1}{x} + \ln(x) + \ln(C_2)} \longrightarrow y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$$

10. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2 y y'' - x^2 y'^2 + x y y' + y^2 = 0 \quad (2.36)$$

Las condiciones iniciales : $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$

La ecuación diferencial contiene todos los elementos de una ecuación diferencial de segundo orden, en este caso, se realiza un cambio de variable (2.37):

$$y = e^{\int u dx} \quad (2.37)$$

Se deriva dos veces:

$$y = e^{\int u dx} \longrightarrow y' = e^{\int u dx} \left(\int u dx \right)' \longrightarrow y' = u e^{\int u dx}$$

$$y' = u e^{\int u dx} \longrightarrow y'' = (u e^{\int u dx})' \longrightarrow y'' = u' e^{\int u dx} + u (e^{\int u dx})'$$

$$y'' = u' e^{\int u dx} + u (u e^{\int u dx}) \longrightarrow y'' = e^{\int u dx} (u' + u^2)$$

Se reemplaza las derivadas obtenidos en la ecuación (2.36) a resolver:

$$x^2 y y'' - x^2 y'^2 + x y y' + y^2 = 0 \longrightarrow x^2 e^{\int u dx} e^{\int u dx} (u' + u^2) - x^2 (u e^{\int u dx})^2 +$$

$$+ x e^{\int u dx} (u e^{\int u dx}) + (e^{\int u dx})^2 = 0$$

$$x^2 (e^{\int u dx})^2 (u' + u^2) - x^2 u^2 (e^{\int u dx})^2 + x u (e^{\int u dx})^2 + (e^{\int u dx})^2 = 0$$

$$(e^{\int u dx})^2 (x^2 (u' + u^2) - x^2 u^2 + x u + 1) = 0$$

$$(x^2 (u' + u^2) - x^2 u^2 + x u + 1) = 0$$

$$(x^2 u' + x^2 u^2 - x^2 u^2 + x u + 1) = 0$$

$$(x^2 u' + x u + 1) = 0$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{xu}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \longrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

Como se puede observar, la ecuación diferencial obtenida es una ecuación diferencial de primer orden, ecuación de Bernoulli de variable $u(x)$. El método de resolución de esta ecuación, esta en sección 1.5 de este libro. La integral general de $u(x)$ tiene la forma:

$$u = \frac{C_1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$$

Se regresa al cambio de variable:

$$y = e^{\int u dx} \longrightarrow y = e^{\int \left(\frac{C_1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \right) dx}$$

Después de integrar se obtiene:

$$y = C_2 x^{C_1} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2}$$

Se ha obtenido la integral general de la ecuación diferencial a resolver, se reemplaza la condición inicial para y , fácilmente se obtiene $C_2 = 1$

Se deriva la integral general para obtener y' :

$$y' = C_2 x^{(C_1-1)} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} (\ln(x)) (C_1 - \ln(x))$$

Se reemplaza la condición inicial para la derivada y $C_1 = -1$

Se reemplaza los valores de C_1, C_2 en la integral general y se obtiene:

$$y = \frac{1}{x e^{\frac{1}{2}(\ln(x))^2}}$$

Es la solución (integral) específica de nuestro ejercicio, que cumple las condiciones iniciales dadas.

2.2.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden que se Transforman a Ecuaciones de Primer Orden.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $xy'' + y' = 0$
2. $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$
3. $y' = xy'' + y'' - y''^2$
4. $y' = xy''^2 + y''^2$
5. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$
6. $x^3y'' + x^2y' = 1$
7. $y''x \ln(x) = y'$
8. $xy'' + y' = x^2 - 1$
9. $y'' = 1 - y'^2$
10. $y'' = x + \ln(x)$
11. $y'' = y' - x + 2x$
12. $\sqrt{1-x^2}y'' + \sqrt{1-y'^2} = 0$
13. $y''^2 - 4y' = 0$
14. $y''^2 - 5y' + 6 = 0$
15. $y''^2 + xy'' - y' = 0$
16. $y'' = 1 + y'^2$
17. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$
18. $y'' = \sin(x) \cos(x)$
19. $y'' = \frac{y'}{x} + x \sin(x)$
20. $ay'' = y'(1 + y'^2)$
21. $xy'^2y'' - y'^3 - \frac{1}{3}x^4 = 0$
- a) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$
- b) $y'' = x + \sin(x)$
- c) $y'' = -y' \tan(x) + \sin(2x)$
- d) $y'' = y' + e^x$
- e) $xy'' + y' = 2x$
- f) $xy'' - y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) = 0$
- g) $(1+2x)y'' + 2y' = 0$
- h) $x^2y'' - y'^2 = 0$
- i) $xy'' \ln(x) - y' = 0$
- j) $x^2y'' + xy' = ax + 1$
- k) $y'' = -y' + e^x$
- l) $xy'' - y' = 0$
- m) $xy'' + y' = x^2 + 1$
- n) $xy'' - y' = e^x x^2$
- ñ) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$
- o) $(1+x^2)y'' + y'^2 = -1$
- p) $y'' \tan(x) - y' = 1$
- q) $x^3y'' + x^2y' = 1$
- r) $y'y'' - x = 1$
- s) $y''^2 - 4y' = 4$
- t) $y''^2 + y'^2 - y'^4 = 0$

2. Resolver las ecuaciones diferenciales de segundo orden dadas las condiciones iniciales:

- a) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
- b) $xy'' = y'$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$$c) \ y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \left(\frac{y'}{x} \right) \right) \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = 1$$

$$d) \ y' + (y'^2 - 4x)y'' = 0 \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = 1$$

$$e) \ y'' + 2xy = 0 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$f) \ y'' - \frac{y'}{x} - \frac{x^2}{y'} = 0 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$g) \ y'' - 4\cos(2x) = 0 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$h) \ y''^2 - 4xy'' + 4y' = 0 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$1. \ 2yy'' = 1 + y'^2$$

$$a) \ yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'^2}$$

$$2. \ yy'' = y^2y' + y'^2$$

$$b) \ yy'' - y'(1 + y') = 0$$

$$3. \ yy' = y''\sqrt{y^2 + y'^2} - y'y''$$

$$c) \ y'' = -y$$

$$4. \ yy'y'' = y'^3 + y''^2$$

$$d) \ y'' = a^2y$$

$$5. \ y(1 - \ln(y))y'' + (1 + \ln(y))y'^2 = 0$$

$$e) \ y'' = \frac{1}{3}y^{(\frac{-5}{3})}$$

$$6. \ y'' = y'^2$$

$$f) \ y'' = 1 - y'^2$$

$$7. \ y''(y + a)y'$$

$$g) \ y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$8. \ y'' = \frac{3}{2}e^y$$

$$h) \ y'' = -y'^2 + 2e^{-y}$$

$$9. \ y'' = y'^3$$

$$i) \ 2y'' = y'(1 + y'^2)$$

$$10. \ yy'' - y'^2 = 0$$

$$j) \ yy'' - y'^2 = y \ln(y)$$

$$11. \ y'' = y'^3 \ln(y)$$

$$k) \ yy'' = y'(a + y')$$

$$12. \ yy'' - y'^3 = 0$$

$$l) \ 2yy'' = 3y'^2 + 4y^2$$

$$13. \ yy'' - y'^2 = 1$$

$$m) \ y^3y'' + 1 - y^4 = 0$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $2yy'' = 1 + y'^2$

2. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$

3. $y''(1 + y^2) = yy'^2$

4. $2y''(4 - y) = 1 + y'^2$

5. $y''^2 = 4y'$

a) $y''(y - 1) = 2y'^2$

b) $y''(1 + yy') = y'(1 + y'^2)$

c) $yy''^2 = 1$

d) $y'\sqrt{y^2 + y''^2} - yy'' + y'^2 = 0$

5. Resolver las ecuaciones diferenciales dadas las condiciones iniciales:

1. $1 + y'^2 = 2yy''$

$y(1) = 1; \quad y'(1) = 1$

2. $yy'' + y'^2 = y'^3$

$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1$

3. $y''y^3 = 1$

$y(0.5) = 1; \quad y'(0.5) = 1$

4. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0$

$y(0) = 2; \quad y'(0) = 2$

5. $y'' = y'^2 - y$

$y(1) = -0.25; \quad y'(1) = 0.5$

6. $3y'y'' = y + y'^3 + 1$

$y(0) = -2; \quad y'(0) = 0$

7. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$

$y(0) = 2; \quad y'(0) = 2$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $yy'' - y'^2 = 6xy^2$

a) $2yy' - 3y'^2 = 4y^2$

2. $xyy'' - yy' - y'^2 = 0$

b) $x^2yy'' - x^2y'^2 + 2xyy' - y^2 = 0$

3. $x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0$

c) $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$

4. $x^2(y'^2 - 2yy') = y^2$

d) $x^2\left(\frac{yy''}{\sqrt{x^2y'^2 + y^2}} - \frac{y'^2}{\sqrt{x^2y'^2 + y^2}}\right) + xyy' =$

5. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$

e) $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^{y'^2}}{y}$

6. $(y' + 2y)y'' = y'^2$

f) $xy'' - \sqrt{1 + y'^2} = 0$

7. $yy'' - y'^2 = 15y^2\sqrt{x}$

8. $(1 + x^2)y + 2xy = x^3$

g) $y = \sin x \cos x$

9. $(1 + x^2)y + y'^2 = -1$

h) $yy - x = 1$

10. $y'' = -2y + e^x$

i) $y \tan x - y = 1$

11. $xy'' - y' = e^x x^2$

j) $y''^2 + y'^2 - y'^4 = 0$

2(38)

2.3. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes tienen la forma:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x) \quad (a \neq 0) \quad (2.38)$$

Estas ecuaciones diferenciales (2.38) son lineales con respecto a y y y' ; así como, con sus derivadas. La función $f(x)$ es con respecto a la variable x y se puede presentar en cualquier estructura, las letras a, b, c son constantes.

Si en esta ecuación (2.38) de segundo orden $f(x) \equiv 0$; es decir, tiene la forma:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2.39)$$

Se la denomina ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes homogénea, en caso contrario, $f(x) \neq 0$; será una ecuación de segundo con coeficientes constantes no-homogénea (2.39).

Si se conoce la solución general de la parte homogénea: $y^h = y_1(x, C_1, C_2)$, y que además, se conozca la solución específica de la parte no-homogénea: $y^{\sim h} = y_2(x)$ la solución a la ecuación diferencial de segundo orden tendría la forma:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x, C_1, C_2) + y_2(x)$$

Si se conoce la solución de la parte homogénea en la forma:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x, C_1, C_2) + y_2(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + y_2(x) \quad (2.40)$$

Con la condición de que, las funciones $f_1(x), f_2(x)$ sean linealmente independientes y C_1, C_2 , cualquier constante.

2.3.1. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas.

La ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes homogénea (2.39) tiene la forma:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2.41)$$

Para este tipo de ecuaciones se tiene el siguiente teorema: Por todo punto (x_0, y_0) que pertenece al plano cartesiano Oxy, pasa exactamente una línea integral de ecuación $y = g(x)$, a la cual, su tangente en este punto forma con el eje Ox un ángulo positivo, dado de antemano, un ángulo $\varphi, \left(\varphi \neq \frac{1}{2}\pi\right)$.

Lo que nos indica este teorema, es que, siempre existe una función $y = g(x)$, que cumple la condición, para cualquier valor de (x_0, y_0) , que cumple con las condiciones iniciales:

$$y_0 = g(x_0) \quad y_1 = g'(x_0)$$

si en la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes (2.41), se realiza un cambio de variable y se reemplaza sus derivadas se obtiene(2.42):

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx} \quad (2.42)$$

Se reemplaza (2.42) en la ecuación (2.41) dada:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \longrightarrow \quad ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \quad \longrightarrow \quad e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Con lo cual se obtiene, fácilmente, lo que se denomina: la ecuación característica de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, y tiene la forma:

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \quad \longrightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

Como se puede observar, es un polinomio de segundo orden, en este instante, el estudiante debe recordar las propiedades de un polinomio de segundo orden. Entre estas propiedades, se tiene la información, que nos da el discriminante de un polinomio de segundo orden:

1. Si el discriminante es mayor a cero, $\Delta > 0$, el polinomio tiene dos raíces y son números reales. En este caso, existe r_1, r_2 que son números reales e independientes.

En este caso, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma:

$$y^h = y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (2.43)$$

2. Si el discriminante es igual a cero, $\Delta = 0$, lo que significa que, el polinomio de segundo orden tiene una raíz doble real, $r_1 = r_2$.

En este caso, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma:

$$y^h = y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \longrightarrow y^h = y = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x) \quad (2.44)$$

Se puede observar que, a uno de los elementos (a cualquiera) de la solución general, se lo a multiplicado por x, por este hecho, la ecuación pasa de una ecuación dependiente a una una ecuación independiente.

3. Si el discriminante es menor a cero, $\Delta < 0$, significa que, las raíces del polinomio de segundo orden son imaginarias:

$$r_1 = \alpha + \beta i, \quad r_2 = \alpha - \beta i$$

En la practica, es mas cómodo utilizar su forma de Moivre:

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha + \beta i, & r_1 &= e^{\alpha x} (\cos(\beta i) + \sin(\beta i)) \\ r_2 &= \alpha - \beta i & r_2 &= e^{\alpha x} (\cos(\beta i) + \sin(\beta i)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

El signo, depende de en que cuadrante, se este aplicando. En este caso, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma:

$$y^h = y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta i) + \sin(\beta i))$$

Donde: $\alpha = -\frac{b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Además, debe tener en mente que si, la ecuación diferencial es de ' n ' orden, la ecuación característica de esa ecuación diferencial sera de ' n ' orden. Por lo tanto, el estudiante debe recordar los métodos, para encontrar las raíces de un polinomio de cualquier orden.

2.3.2. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden Homogéneas.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. Resuelva la ecuación: $2y'' - 5y' - 3y = 0$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$2y'' - 5y' - 3y = 0 \longrightarrow 2r^2 e^{rx} - 5r e^{rx} - 3e^{rx} = 0$$

Se divide la ecuación para e^{rx} y se obtiene:

$$2r^2e^{rx} - 5re^{rx} - 3e^{rx} = 0 \longrightarrow 2r^2 - 5r - 3 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$2r^2 - 5r - 3 = 0 \longrightarrow r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = 3$$

Por lo tanto, la solución general (integral general) de la ecuación diferencial es:

$$y^h = y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2e^{3x}$$

2. Resuelva la ecuación: $y'' + 6y' + 13y = 0$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y'' + 6y' + 13y = 0 \longrightarrow r^2e^{rx} + 6re^{rx} + 13e^{rx} = 0$$

Se divide la ecuación para e^{rx} y se obtiene:

$$r^2e^{rx} + 6re^{rx} + 13e^{rx} = 0 \longrightarrow r^2 + 6r + 13 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r^2 + 6r + 13 = 0 \longrightarrow r_1 = -3 + 2i, r_2 = -3 - 2i$$

Donde: $\alpha = -3, \beta = 2$. Por lo tanto, la solución general (integral general) de la ecuación diferencial es:

$$y^h = y = e^{-3x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$

3. Resuelva la ecuación: $y'' + 2y' + 2y = 0$, si sus condiciones iniciales son: $y(0) = 1, y'(0) = 1$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \longrightarrow r^2e^{rx} + 2re^{rx} + 2e^{rx} = 0$$

Se divide la ecuación para e^{rx} y se obtiene:

$$r^2e^{rx} + 2re^{rx} + 2e^{rx} = 0 \longrightarrow r^2 + 2r + 2 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \longrightarrow r_1 = -1 + i, r_2 = -1 - i \quad (\alpha = -1; \beta = 1)$$

Por lo tanto, la solución general (integral general) de la ecuación diferencial es:

$$y^h = y = e^{-x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

Se deriva lo obtenido con respecto a 'x':

$$y' = -e^{-x}C_1 \cos(x) - e^{-x}C_1 \sin(x) - e^{-x}C_2 \sin(x) + e^{-x}C_2 \cos(x)$$

Se aplica una asociativa y distributiva:

$$y' = e^{-x}[(C_2 - C_1)\cos(x) - (C_2 + C_1)\sin(x)]$$

Se reemplaza los valores de las condiciones iniciales:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

$$1 = e^{-0}(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0))$$

$$1 = 1(C_1) \longrightarrow C_1 = 1$$

$$y' = e^{-x}[(C_2 - C_1)\cos(x) - (C_2 + C_1)\sin(x)]$$

$$1 = 1[(C_2 - C_1)\cos(0) - (C_2 + C_1)\sin(0)]$$

$$1 = C_2 - C_1 \longrightarrow C_2 = 2$$

La solución específica (integral específica) de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes homogénea, que cumple con las condiciones iniciales, es:

$$y^h = y = e^{-x}(\cos(x) + 2 \sin(x))$$

4. Resuelva la ecuación: $y'' - 2y' + y = 0$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y'' - 2y' + y = 0 \longrightarrow r^2 e^{rx} - 2r e^{rx} + e^{rx} = 0$$

Se divide la ecuación para e^{rx} y se obtiene:

$$r^2 e^{rx} - 2r e^{rx} + e^{rx} = 0 \longrightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \longrightarrow r_1 = r_2 = 1 \text{ raíz doble}$$

Por lo tanto, la solución general (integral general) de la ecuación diferencial es:

$$y^h = y = e^{-x}(C_1 x + C_2)$$

2.3.3. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes homogéneas

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $y'' = 0$ | a) $2y'' - 5y' + 2y = 0$ |
| 2. $y'' - 2y = 0$ | b) $9y'' - 6y' + y = 0$ |
| 3. $y'' - 9y = 0$ | c) $y'' + \frac{1}{3}y = 0$ |
| 4. $y'' + y' + y = 0$ | d) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$ |
| 5. $y'' + y' - 2y = 0$ | e) $y'' - 2y - y = 0$ |
| 6. $y'' + 2y' + y = 0$ | f) $y'' + 6y' + 10y = 0$ |
| 7. $y'' + 2y' + 5y = 0$ | g) $y'' - 3y' + 2y = 0$ |
| 8. $y'' + 6y' + 9y = 0$ | h) $y'' - 5y' + 6y = 0$ |
| 9. $y'' + 2y' + 2y = 0$ | i) $y'' - 4y' + 4y = 0$ |
| 10. $y'' - 5y' - 6y = 0$ | j) $y'' - 10y' + 25y = 0$ |
| 11. $y'' + 4y' + 3y = 0$ | k) $y'' - 4y' + 13y = 0$ |
| 12. $y'' + 2y' + 10y = 0$ | l) $y'' - 5y' + 4y = 0$ |
| 13. $y'' - 6y' + 13y = 0$ | m) $y'' - 3y' - 7y = 0$ |
| 14. $y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$ | n) $2y'' - 4y' + 3y = 0$ |
| 15. $y'' - 4y = 0$ | ñ) $3y'' - 10y' - 8y = 0$ |
| 16. $y'' + 6y' - 2y = 0$ | |

2. Resuelva las ecuaciones diferenciales dadas las condiciones iniciales:

- | | |
|---|------------------------------|
| 1. $y'' - 4y' + 4y = 0$ | $y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$ |
| 2. $y'' + 4y' + 29y = 0$ | $y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$ |
| 3. $y'' - 4y' + 3y = 0$ | $y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$ |
| 4. $y'' - 4y' + 3y = 0$ | $y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$ |
| 5. $y'' + \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}y = 0$ | $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ |
| 6. $y'' + 3y' = 0$ | $y(0) = 0, \quad y'(3) = 0$ |

$$\begin{array}{lll}
7. & y'' + \pi^2 y' = 0 & y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \\
8. & y'' + y' = 0 & y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
9. & y'' + 4y' = 0 & y(0) = 0, \quad y'(0) = 2
\end{array}$$

2.4. Ecuaciones Diferenciales de 'n' Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas

Las ecuaciones diferenciales lineales de 'n' orden con coeficientes constantes se llama a la ecuación (2.46):

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (a_n \neq 0) \quad (2.46)$$

Esta ecuación, que es la forma general de la ecuaciones diferenciales de 'n' orden, son lineales con respecto a 'y' y todas sus derivadas; los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes cualesquiera. La función $f(x)$, es una función continua en un intervalo dado. Si $f(x) \equiv 0$ la ecuación que se obtiene tiene la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (2.47)$$

Se la denomina ecuación diferencial lineal de 'n' orden con coeficientes constantes homogénea (2.47). En caso contrario, sera una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no-homogénea (2.46) ($f(x) \neq 0$).

Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ son funciones cualesquiera, independientes linealmente y son las soluciones de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes homogénea, en este caso, la solución general de la ecuación diferencial de 'n' orden con coeficientes constantes homogénea, tiene la forma:

$$y^h = y = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \cdots + C_n u_n(x)$$

La solución general de una ecuación diferencial no-homogénea:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

se obtiene al sumar: la solución general de su parte homogénea:

$$y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

y la solución específica de su parte no-homogénea $y_2(x)$, lo cual se puede escribir, como:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = y^h + y^{\sim h} = y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) + y_2(x)$$

La solución específica de una ecuación diferencial de 'n' orden con coeficientes constantes, se la encuentra aplicando, principalmente, uno de los dos métodos:

1. Método de la Adivinanza (acierto-error)
2. Método de la constante como variable.

La solución de una ecuación diferencial de 'n' orden (2.46), en el caso , de que sea homogénea, se aplica un cambio de variable, $y = e^{rx}$ y se obtiene sus derivadas:

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}, \dots, y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

Estos valores se reemplaza en la ecuación diferencial de 'n' orden (2.47) y después de dividir para $y = e^{rx}$ se obtiene la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea de 'n' orden, que tiene la forma:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (2.48)$$

Las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial, se los obtiene por diferentes métodos, los cuales son conocidos por el estudiante (factorio, Ruffini, Teorema del factor). Si la ecuación característica tiene 'n' diferentes raíces; es decir, $r_1, r_2, \dots, r_n$ la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de 'n' orden tiene la forma:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

Si la ecuación característica (2.48) tiene 'k' diferentes raíces; es decir: $r_1, r_2, \dots, r_k$ y $(n - k)$ diferentes raíces conjugadas imaginarias ($r_l = \alpha_l + i\beta_l$; $\bar{r}_l = \alpha_l - i\beta_l$); donde : $l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n - k)$, la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de 'n' orden sera la suma de las expresiones:

1. $C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_k e^{r_k x} = \sum_{l=1}^k C_l e^{r_l x}$
2. $e^{\alpha_l x} (C_{k+2l-1} \cos(\beta_l) + C_{k+2l} \sin(\beta_l x)) \quad \left(l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n - k) \right)$

Esto es posible, siempre y cuando $(n - k)$ sea un numero par.

La solución general a la ecuación diferencial de 'n' orden con coeficientes constantes homogénea, tiene la forma:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = \sum_{l=1}^k C_l e^{r_l x} + \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(n-k)} e^{\alpha_l x} (C_{k+2l-1} \cos(\beta_l) + C_{k+2l} \sin(\beta_l x))$$

Y finalmente, si la ecuación diferencial de 'n' orden homogénea, tiene raíces diferentes y raíces que se repitan (tanto reales como imaginarias), la solución general de la ecuación diferencial de 'n' orden homogénea, constara de la suma de las raíces que no se repitan, mas la expresión de las raíces que se repitan:

1. Para raíces reales, que se repitan:

$$e^{r_l x} (C_1(l) + C_2(l)x + \dots + C_k^l x^{k-l}) \quad (\text{para } k - \text{veces raíces reales } r_l)$$

2. Para raíces conjugadas imaginarias:

$$e^{r_l x} [(C_1(l) + C_2(l)x + \dots + C_k^l x^{k-l}) \cos(\beta_l x) + (C_1(l) + C_2(l)x + \dots + C_k^l x^{k-l}) \sin(\beta_l x)]$$

Para k-veces raíces imaginarias conjugadas.

$$r_l = \alpha_l + i\beta_l; \quad \overline{r_l} = \alpha_l - i\beta_l$$

2.4.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales Lineales de 'n' Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

1. Resuelva la ecuación: $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de tercer orden con coeficientes constantes; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0 \rightarrow r^3 e^{rx} - r^2 e^{rx} + 4r e^{rx} - 4e^{rx} = 0$$

Se divide la ecuación para e^{rx} y se obtiene:

$$r^3 e^{rx} - r^2 e^{rx} + 4r e^{rx} - 4e^{rx} = 0 \rightarrow r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0 \rightarrow r^2(r - 1) + 4(r - 1) \rightarrow (r^2 + 4)(r - 1)$$

Sus raíces son:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = \pm\sqrt{-4} \rightarrow r_1 = 1; \quad r_2 = 2i; \quad r_3 = -2i$$

Por lo tanto:

$$r_1 = 1 \rightarrow y_1 = e^x \text{ se repite una vez}$$

$$r_2 = 2i \longrightarrow y_2 = C_2 \cos(2x)$$

$$r_2 = -2i \longrightarrow y_3 = C_3 \sin(2x)$$

La solución específica (integral específica) de la ecuación diferencial de tercer orden con coeficientes constantes homogénea, que cumple con las condiciones iniciales, es:

$$y^h = y = C_1 e^x + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x)$$

2. Resuelva la ecuación: $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

La ecuación diferencial dada, es una ecuación diferencial de tercer orden con coeficientes constantes; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \longrightarrow r^3 e^{rx} - 2r^2 e^{rx} - 5r e^{rx} + 6e^{rx} = 0$$

Se divide la ecuación para e^{rx} y se obtiene:

$$r^3 e^{rx} - 2r^2 e^{rx} - 5r e^{rx} + 6e^{rx} = 0 \longrightarrow r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow (r - 1)(r + 2)(r - 3) = 0$$

Las raíces se obtuvieron aplicando Ruffini, son diferentes. El estudiante debe obtener estos resultados. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x, C_1, \dots, C_n) = \overbrace{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}}^{\text{Fórmula general}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}$$

3. Resuelva la ecuación: $y''' + 8y = 0$

La ecuación diferencial dada, es una ecuación diferencial de tercer orden con coeficientes constantes; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y''' + 8y = 0 \longrightarrow r^3 e^{rx} + 8e^{rx} = 0$$

Se divide la ecuación para e^{rx} y se obtiene:

$$r^3 e^{rx} + 8e^{rx} = 0 \longrightarrow r^3 + 8 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r_1 = -2; r_2 = 1 + i\sqrt{3}; r_3 = 1 - i\sqrt{3} \text{ (números imaginarios conjugados)}$$

Las raíces se obtuvieron aplicando Ruffini, son diferentes. El estudiante debe obtener estos resultados. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 \cos(\sqrt{3}x) + C_3 \sin(\sqrt{3}x))$$

4. Resuelva la ecuación: $y''' - 7y'' + 19y' - 13y = 13x^3 - 57x^2 - 10x + 70$
La ecuación diferencial dada, es una ecuación diferencial de tercer orden con coeficientes constantes no-homogénea.

- 1) Se debe obtener la solución a su parte homogénea (y^h), su ecuación es: $y''' - 7y'' + 19y' - 13y = 0$

$$y''' - 7y'' + 19y' - 13y = 0 \longrightarrow r^3 e^{rx} - 7r^2 e^{rx} + 19r e^{rx} - 13e^{rx} = 0$$

Se divide la ecuación para e^{rx} y se obtiene:

$$r^3 e^{rx} - 7r^2 e^{rx} + 19r e^{rx} - 13e^{rx} = 0 \longrightarrow r^3 - 7r^2 + 19r - 13 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r_1 = 1; r_2 = 3 + 2i; r_3 = 3 - 2i \text{ (números imaginarios conjugados)}$$

El estudiante debe obtener estos resultados. La solución general de la parte homogénea (y^h) es:

$$y^h = y_1(x, C_1, C_2, C_3) = C_1 e^x + e^{3x} (C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x))$$

- 2) Se obtiene la solución específica de la ecuación diferencial no-homogénea. Como los coeficientes del lado izquierdo de la ecuación diferencial son constantes (números); por lo tanto, se puede aplicar el método de la adivinanza (error-acierto). Se observa que, el lado derecho de la ecuación diferencial es un polinomio de tercer orden; por lo tanto, se considera (adivina) que, su solución específica ($y^{\sim h}$) será un polinomio de tercer orden de la forma:

$$y^{\sim h} = y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Donde: los coeficientes A,B,C,D deben ser calculados.
Para lo cual se deriva:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y'' = 6Ax + 2B, \quad y''' = 6A$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial no-homogénea:

$$6A - 7(6Ax + 2B) + 19(3Ax^2 + 2Bx + C) - 13(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) =$$

$$= 13x^3 - 57x^2 - 10x + 70$$

En el lado izquierdo de la identidad, se aplica distributiva y se asocia según las variables (x^3, x^2, x) , con lo cual, se obtiene un polinomio de tercer orden. Después, se iguala los coeficientes de la misma variable del lado izquierdo con los coeficientes del lado derecho: Con lo cual se obtiene:

$$6a - 14B + 19C - 13D = 70 \longrightarrow D = 0$$

$$-42A + 38B - 13C = -10 \longrightarrow C = 4$$

$$57A - 13B = -57 \longrightarrow B = 0$$

$$-13A = 13 \longrightarrow A = -1$$

Por lo tanto, la solución específica de la ecuación diferencial lineal no-homogénea ($y^{\sim h}$) es:

$$y^{\sim h} = -x^3 + 4x$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal es:

$$y = y^h + y^{\sim h} = C_1 e^x + e^{3x}(C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x)) - x^3 + 4x$$

2.4.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de 'n' Orden con Coeficientes Constantes Homogéneas.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$1. y''' - 8y = 0$$

$$2. y''' - y'' = 0$$

$$3. y''' + 3y' - 4y = 0$$

$$4. y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

$$5. y''' - y'' + 17y' - 13y = 0$$

$$6. y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

$$7. y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$$

$$1. y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$$

$$2. y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$$

$$3. y^{(4)} - 16y = 0$$

$$4. y^{(4)} + 4y = 0$$

$$5. y^{(4)} 5y'' + 6y = 0$$

$$6. y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$$

$$7. y''' + 9y' = 0$$

$$8. y^{(4)} + 5y'' + 4y = 3 \sin(x)$$

a) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

b) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$

c) $y''' + y = 0$

d) $y''' - 2y' + y = 0$

e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

f) $y''' - y'' = 6x + e^x$

g) $y''' - y'' = \sin(2x)$

h) $y^{(4)} - y = x^3$

i) $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos(x)$

j) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

k) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = x$

l) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$

m) $y''' - 3y' - 2y = 0$

n) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$

ñ) $y''' - 2y' + y = x^2$

2. Resuelva las ecuaciones diferenciales dadas las condiciones iniciales:

1. $y''' - 8y = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 2$

2. $y''' + 2y'' + 10y' = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = 1$

3. $y''' + 3y'' - 4y' = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 2$

4. $y''' - 2y' + y = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = 1$

5. $y''' - 3y'' - 2y' = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 1$

6. $y''' - 2y' + y = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 1$

7. $y''' - 3y' - 2y = 0$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 2$

8. $y''' + y = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 2$

9. $y''' - y'' = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 2$

10. $y^{(5)} - y' = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = 0$ $y'''(0) = 1$ $y^{(4)} = 2$

2.5. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo y 'n' Orden con Coeficientes Constantes no-Homogéneas

La ecuación diferencial en la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (a_n \neq 0) \quad (2.49)$$

Se la denomina ecuación diferencial lineal de 'n' orden con coeficientes constantes no-homogénea. Donde: $a_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ son constantes cualesquiera y $f(x)$ es una función continua, con respecto a la variable 'x' y es continua en un determinado intervalo I.

Si $f(x) \equiv 0$; es decir:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (2.50)$$

Se la denomina, ecuación diferencial lineal de 'n' orden con coeficientes constantes homogénea. En el caso específico, de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea, se tendría:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (a_n \neq 0) \quad (2.51)$$

Para la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes homogénea:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (2.52)$$

La solución de una ecuación diferencial lineal de 'n' orden no-homogénea (2.49), esta basado en el principio: La solución general de una ecuación diferencial no-homogénea es la suma de dos integrales:

1. La integral general de una ecuación diferencial lineal homogénea,
2. La integral específica de la ecuación diferencial lineal no-homogénea.

Lo que, se lo encuentra en una de las formas;

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x)$$

La obtención de la integral general de una ecuación diferencial lineal homogénea, ya se lo analizo, en la sección anterior de este libro.

Para la obtención de la integral específica de una ecuación diferencial lineal no-homogénea (2.49), en este libro, se analizan dos métodos:

1. **Primer método:** Método de la Adivinanza (Error-acierto).

Este método se lo puede aplicar, cuando la estructura de la integral específica de la ecuación diferencial lineal no-homogénea (2.49) dependa del tipo de función $f(x)$, que se tenga en el lado derecho de la ecuación diferencial no-homogénea y estos casos son:

1. Si la función $f(x)$, de la ecuación (2.49), es un polinomio de n -orden, es decir:

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Lo que, permite identificar que, la integral específica de la ecuación diferencial no-homogénea tiene la forma:

$$y^{\sim h} = y_2(x) \begin{cases} Q_n(x) & \text{Si las raices de la ecuación característica de la ecuación diferencial no tiene raices igual a cero o no se repiten.} \\ x^k Q_n(x) & \text{Si las raices de la ecuación característica de la ecuación diferencial tiene raices igual a cero o se repiten, } k \geq 1 \end{cases}$$

Donde: $Q_n(x)$ es un polinomio del mismo orden que $f(x)$ y sus coeficientes se debe calcular.

2. Si el lado derecho de la ecuación diferencial $f(x)$ (2.49) tiene la forma:

$$f(x) = e^{nx} P_n(x)$$

Donde: $P_n(x)$ es un polinomio de n -orden ($n \geq 0$), la integral específica $y^h = y_2(x)$ de la ecuación diferencial no-homogénea tiene la forma:

$$y^{\sim h} = y_2(x) \begin{cases} e^{\alpha x} Q_n(x) & \text{Si } \alpha \text{ no es raíz de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogenea} \\ x^k e^{\alpha x} Q_n(x) & \text{Si } \alpha \text{ es raíz de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogenea y se repiten } k - \text{veces} \end{cases}$$

Donde: $Q_n(x)$ es un polinomio del mismo orden que $f(x)$ y sus coeficientes se debe calcular.

3. Si el lado derecho de la ecuación diferencial $f(x)$ (2.49) tiene la forma:

$$f(x) = a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x)$$

La integral específica $y^h = y_2(x)$ de la ecuación diferencial no-homogénea tiene la forma:

$$y^h = y_2(x) \begin{cases} a_1 \cos(\beta x) + b_1 \sin(\beta x) & \text{Cuando el número} \\ & \text{imaginario } z = \beta i \\ & \text{no es raíz de la ecuación} \\ & \text{característica de la} \\ & \text{ecuación diferencial} \\ & \text{homogenea} \\ x^k (a_1 \cos(\beta x) + b_1 \sin(\beta x)) & \text{Cuando el número} \\ & \text{imaginario } z = \beta i \text{ es raíz} \\ & \text{de la ecuación} \\ & \text{característica de la} \\ & \text{ecuación diferencial} \\ & \text{homogenea y se repiten} \\ & k - \text{veces.} \end{cases}$$

Donde : los coeficientes a_1 y b_1 se deben calcular.

4. Si el lado derecho de la ecuación diferencial $f(x)$ (2.49) tiene la forma:

$$f(x) = a \cdot e^{\alpha x}$$

La integral específica $y^h = y_2(x)$ de la ecuación diferencial no-homogénea tiene la forma:

$$y^h = y_2(x) \begin{cases} be^{\alpha x} & \text{Si } \alpha \text{ no es raíz ecuación característica de la} \\ & \text{de la ecuación diferencial homogenea} \\ x^k be^{\alpha x} & \text{Si } \alpha \text{ es raíz de la ecuación característica de} \\ & \text{la ecuación diferencial homogenea y se} \\ & \text{repiten } k - \text{veces} \end{cases}$$

Donde : El coeficiente b se debe calcular.

5. Si el lado derecho de la ecuación diferencial $f(x)$ (2.29) tiene la forma:

$$f(x) = e^{\alpha x} (a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x))$$

La integral especifica $y^h = y_2(x)$ de la ecuación diferencial no-homogénea tiene la forma:

$$y^h = y_2(x) \left\{ \begin{array}{ll} e^{\alpha x}(a_1 \cos(\beta x) + b_1 \sin(\beta x)) & \text{Cuando el número} \\ & \text{imaginario } z = \alpha + \beta i \\ & \text{no es raíz de la ecuación} \\ & \text{característica de la} \\ & \text{ecuación diferencial} \\ & \text{homogenea.} \\ x^k e^{\alpha x}(a_1 \cos(\beta x) + b_1 \sin(\beta x)) & \text{Cuando el número} \\ & \text{imaginario } z = \beta i \text{ es} \\ & \text{raíz de la ecuación} \\ & \text{característica de la} \\ & \text{ecuación diferencial} \\ & \text{homogenea y se} \\ & \text{repiten } k - \text{veces.} \end{array} \right.$$

Donde : los coeficientes a_1 y b_1 se deben calcular.

6. Si el lado derecho de la ecuación diferencial $f(x)$ (2.49) tiene la forma:

$$f(x) = P_n(x) \cos(\beta x) + Q_n(x) \sin(\beta x)$$

La integral especifica $y^h = y_2(x)$ de la ecuación diferencial no-homogénea tiene la forma:

$$y^h = y_2(x) \left\{ \begin{array}{ll} R_n(x) \cos(\beta x) + S_n(x) \sin(\beta x) & \text{Cuando el número} \\ & \text{imaginario } z = \beta i \text{ no} \\ & \text{es raíz de la ecuación} \\ & \text{característica de la} \\ & \text{ecuación diferencial} \\ & \text{homogenea} \\ x^k (R_n(x) \cos(\beta x) + S_n(x) \sin(\beta x)) & \text{Cuando el número} \\ & \text{imaginario } z = \beta i \text{ es} \\ & \text{raíz de la ecuación} \\ & \text{característica de la} \\ & \text{ecuación diferencial} \\ & \text{homogenea y se} \\ & \text{repiten } k - \text{veces.} \end{array} \right.$$

Donde: $R_n(x)$ y $S_n(x)$ son polinomios del mismo orden que $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ en $f(x)$ y sus coeficientes se debe calcular.

2. **Segundo Método:** Método de la variación de las Constantes. Si el lado derecho de la ecuación diferencial lineal no-homogénea (2.49), tiene una función $f(x)$ en tal forma que, no se puede definir la forma de la integral específica, con el método de la adivinanza. En este caso, se aplica el segundo método, que es la variación de las constantes. Este método, ya fue aplicado en este libro, cuando se tuvo ecuaciones de primer orden.

Para ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas ($n \geq 3$) se realiza lo siguiente:

- a) Primero, se encuentra la integral general de la ecuación diferencial lineal homogénea, lo cual ya se conoce. Se considera que, tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \quad (2.53)$$

- b) Se considera que, las constantes $C_k (k = 1, 2, \dots, n)$ que aparecen en el lado derecho de la solución general (y^h) son funciones con respecto a x ; es decir, tiene la forma:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x) \quad (2.54)$$

- c) Las funciones no conocidas $C_k(x) (k = 1, 2, \dots, n)$ y en este caso, sus derivadas $C'_k(x) (k = 1, 2, \dots, n)$ se plantea un sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1(x) y_1(x) + C'_2(x) y_2(x) + \cdots + C'_n(x) y_n(x) = 0 \\ C'_1(x) y'_1(x) + C'_2(x) y'_2(x) + \cdots + C'_n(x) y'_n(x) = 0 \\ C'_1(x) y''_1(x) + C'_2(x) y''_2(x) + \cdots + C'_n(x) y''_n(x) = 0 \\ C'_1(x) y'''_1(x) + C'_2(x) y'''_2(x) + \cdots + C'_n(x) y'''_n(x) = 0 \\ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots \\ C'_1(x) y_1^{n-1}(x) + C'_2(x) y_2^{n-1}(x) + \cdots + C'_n(x) y_n^{n-1}(x) = f(x) \end{array} \right. \quad (2.55)$$

- d) Se resuelve el sistema con respecto a $C'_k (k = 1, 2, \dots, n)$, se obtiene:

$$C'_k(x) = \frac{D_k(x)}{D_b(x)}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.56)$$

Donde: $D_b(x)$ significa el determinante básico del sistema de ecuaciones, conocido como, el determinante de Wronski.

$$D_b(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & \cdots & y_n'''(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.57)$$

Donde: $D_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) significa el determinante de cada una de las constantes

e) Se integra los elementos:

$$C_k'(x) = \frac{D_k(x)}{D_b(x)} \longrightarrow C_k(x) = \int \frac{D_k(x)}{D_b(x)} dx \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.58)$$

No se escribe la constante de integración, ya que, es ella la que estamos calculando.

Es bueno tener en mente que, de la propiedad lineal, se puede resolver una ecuación diferencial dada de la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) + g(x) \quad (a_n \neq 0)$$

Primero se resuelve:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (a_n \neq 0)$$

Segundo se resuelve:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad (a_n \neq 0)$$

2.5.1. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales Lineales de segundo y 'n' Orden con Coeficientes Constantes No-Homogéneas.

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 2y' + y = x^3$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' - 2y' + y = 0 \longrightarrow r^2 e^{rx} - 2r e^{rx} + e^{rx} = 0 \longrightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \longrightarrow (r - 1)^2 = 0$$

La ecuación tiene raíz doble $r = 1$; por lo que, la integral general tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = e^x(C_1 + C_2x)$$

Se determina la integral específica, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es un polinomio de tercer orden; por lo tanto,

$$y^{\sim h} = y_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Se deriva dos veces y se reemplaza en la ecuación diferencial a resolver:

$$\begin{aligned} y' &= 3ax^2 + 2bx + c; & y'' &= 6ax + 2b \\ 6ax + 2b - 2(3ax^2 + 2bx + c) + ax^3 + bx^2 + cx + d &= x^3 \\ 6ax + 2b - 6ax^2 - 4bx - 2c + ax^3 + bx^2 + cx + d &= x^3 \\ ax^3 + x^2(b - 6a) + x(6a - 4b + c) + 2b - 2c + d &= x^3 \\ ax^3 + x^2(b - 6a) + x(6a - 4b + c) + 2b - 2c + d &= x^3 \end{aligned}$$

Se iguala los coeficientes de las mismas variables del lado izquierdo con el lado derecho:

$$a = 1, \quad b - 6a = 0, \quad 6a - 4b + c = 0, \quad 2b - 2c + d = 0$$

Se obtiene los valores de los coeficientes:

$$a = 1, \quad b = 6, \quad c = 18, \quad d = 24$$

Se reemplaza y se obtiene la integral específica:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \longrightarrow y^{\sim h} = y_2(x) = x^3 + 6x^2 + 18x + 24$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x) = e^x(C_1 + C_2x) + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$$

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \longrightarrow r^2 e^{rx} - 4r e^{rx} + 4e^{rx} = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \longrightarrow (r - 2)^2 = 0$$

La ecuación tiene raíz doble $r = 2$; por lo que, la integral general tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = e^{2x}(C_1 + C_2x)$$

Se determina la integral específica, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es el producto de un polinomio de primer orden y una función exponencial; además, se debe tener en mente, que la raíz es doble; por lo tanto,

$$y^{\sim h} = y_2(x) = x^2 e^{2x}(ax + b) = e^{2x}(ax^3 + bx^2)$$

Se deriva dos veces y se reemplaza en la ecuación diferencial a resolver:

$$y' = 2e^{2x}(ax^3 + bx^2) + e^{2x}(3ax^2 + 2bx)$$

$$y'' = 4e^{2x}(ax^3 + bx^2) + 2e^{2x}(3ax^2 + 2bx) + 2e^{2x}(3ax^2 + 2bx) + e^{2x}(6ax + 2b)$$

$$y'' = e^{2x}(4ax^3 + 4bx^2 + 6ax^2 + 4bx + 6ax^2 + 4bx + 6ax + 2bx)$$

$$y'' = e^{2x}(4ax^3 + x^2(4b + 12a) + x(8b + 6a) + 2b)$$

Se reemplaza en la ecuación a resolver, se simplifica, se ordena la expresión, se divide para e^{2x} se iguala los coeficientes del lado izquierdo con el derecho:

$$6ax + 2b = x \longrightarrow a = \frac{1}{6} \longrightarrow b = 0$$

Se reemplaza y se obtiene la integral específica:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = x^2 e^{2x}(ax + b) \longrightarrow y^{\sim h} = y_2(x) = x^2 e^{2x} \left(\frac{1}{6}x \right)$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x) = e^x(C_1 + C_2x) + x^2 e^{2x} \left(\frac{1}{6}x \right)$$

3. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 5y' + 6y = 13 \sin(x)$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \longrightarrow r^2 e^{rx} - 5r e^{rx} + 6e^{rx} = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow (r - 2)(r - 3) = 0$$

La ecuación tiene dos raíces independientes; por lo que, la integral general tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Se determina la integral específica, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es una función trigonométrica y $z = \beta i = 3i$, no es raíz de la ecuación característica; por lo tanto,

$$y_2(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x)$$

Se deriva dos veces y se reemplaza en la ecuación diferencial a resolver:

$$y_2' = -3a \sin(3x) + 3b \cos(3x)$$

$$y_2'' = -9a \sin(3x) - 9b \cos(3x)$$

Se reemplaza en la ecuación a resolver, se simplifica, se ordena la expresión:

$$-3(a + 5b) \cos(3x) + 3(5a - b) \sin(3x) = 13 \sin(3x)$$

Se iguala los coeficientes del lado izquierdo con el derecho:

$$-3(a + 5b) = 0, \quad 3(5a - b) = 13 \sin(3x)$$

Se resuelve el sistema:

$$a = \frac{5}{6}, \quad b = -\frac{1}{6}$$

Se reemplaza y se obtiene la integral especifica:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x)$$

$$y^{\sim h} = y_2(x) = \frac{5}{6} \cos(3x) - \frac{1}{6} \sin(3x)$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{6} \cos(3x) - \frac{1}{6} \sin(3x)$$

4. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 9y = e^x \cos(3x)$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' + 9y = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' + 9y = 0 \rightarrow r^2 e^{rx} + 9e^{rx} = 0 \rightarrow r^2 + 9 = 0 \rightarrow r = \sqrt{-9}$$

$$r = \sqrt{-9} \rightarrow r_1 = 3i, \quad r_2 = -3i$$

La ecuación tiene dos raíces independientes; por lo que, la integral general tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Se determina la integral especifica, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es una función trigonométrica y $z = 1 + \beta i = 3i$, no es raíz de la ecuación característica; por lo tanto,

$$y_2(x) = e^x (a \cos(3x) + b \sin(3x))$$

Se deriva dos veces y se reemplaza en la ecuación diferencial a resolver:

$$y_2'(x) = e^x ((a + 6b) \cos(3x) + (b - 3a) \sin(3x))$$

$$y_2''(x) = e^x ((3b - 8a) \cos(3x) - (8b + 6a) \sin(3x))$$

Se reemplaza en la ecuación a resolver, se simplifica, se ordena la expresión y se divide para e^x :

$$(a + 6b) \cos(3x) + (b - 6a) \sin(3x) = \cos 3x + 0 \sin(3x)$$

Se iguala los coeficientes del lado izquierdo con el derecho:

$$(a + 5b) = 1, \quad (b - 6a) = 0$$

Se resuelve el sistema:

$$a = \frac{1}{37}, \quad b = -\frac{6}{37}$$

Se reemplaza y se obtiene la integral especifica:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = e^x(a \cos(3x) + b \sin(3x))$$

$$y^{\sim h} = y_2(x) = \frac{e^x}{37}(\cos(3x) + 6 \sin(3x))$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{e^x}{37}(\cos(3x) + 6 \sin(3x))$$

5. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \sin(x)$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \longrightarrow r^2 e^{rx} + 2r e^{rx} + 2e^{rx} = 0 \longrightarrow r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$r_1 = -1 + i \quad r_2 = -1 - i$$

La solución general de la ecuación diferencial de segundo, tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = e^{-x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

Se determina la integral especifica, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es el producto de una función exponencial y una función trigonométrica. Además, $z = -1 + \beta i$, es raíz de la ecuación característica; por lo tanto, la integral especifica tiene la forma :

$$y_2(x) = x e^{-x}(a \cos(x) + b \sin(x))$$

Se deriva dos veces y se reemplaza en la ecuación diferencial a resolver:

$$y_2'(x) = e^{-x}((a \sin(x) + (b) \cos(3x))(1-x) + xe^{-x}(a \cos(x) - b \sin(x))$$

$$y_2''(x) = -2e^{-x}(a \sin(x) + b \cos(x)) + 2(1-x)e^{-x}(a \cos(x) - b \sin(x))$$

Al reemplazar en la ecuación a resolver, se simplifica, se ordena la expresión y se divide para e^{-x} , se obtiene:

$$2a \cos(x) - 2b \sin(x) = 0 \cos(x) + 2 \sin(x)$$

Se iguala los coeficientes del lado izquierdo con el derecho de la variable del mismo orden:

$$2a = 0, \longrightarrow a = 0; \quad -2b = 2 = 0 \longrightarrow b = -1$$

La solución específica de la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea, tiene la forma:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = -xe^{-x} \cos(x)$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x) = e^{-x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) - xe^{-x} \cos(x)$$

6. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - y = 2e^{2x}$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' - y = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' - y = 0 \longrightarrow r^2 e^{rx} - e^{rx} = 0 \longrightarrow r^2 - 1 = 0 \longrightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$$

La solución general de la ecuación diferencial de segundo, tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Se determina la integral específica, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es una función exponencial. Además, $\alpha = 2$, no es raíz de la ecuación característica; por lo tanto, la integral específica tiene la forma :

$$y_2(x) = be^{2x}$$

Se deriva dos veces y se reemplaza en la ecuación diferencial a resolver:

$$y_2'(x) = 2be^{2x}$$

$$y_2''(x) = 4be^{2x}$$

Al reemplazar en la ecuación a resolver, se simplifica, se ordena la expresión y se divide para e^{2x} , se obtiene:

$$3b = 2, \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

La solución específica de la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea, tiene la forma:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = \frac{2}{3}e^{2x}$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x}$$

7. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = (5x + 2)\cos(2x) + x\sin(2x)$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' + 4y = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' + 4y = 0 \rightarrow r^2 + 4e^{rx} = 0 \rightarrow r^2 + 4 = 0$$

$$r_1 = 2i \quad r_2 = -2i$$

La solución general de la ecuación diferencial de segundo, tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

Se determina la integral específica, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es el producto de una función polinomial de primer orden y una función trigonométrica. Además, $z = \beta i$ es raíz de la ecuación característica; por lo tanto, la integral específica tiene la forma :

$$y_2(x) = x((ax + b)\cos(2x) + (cx + d)\sin(2x))$$

Se deriva dos veces y se reemplaza en la ecuación diferencial a resolver:

$$y_2'(x) = [2cx^2 + 2x(a+d) + b]\cos(2x) + [-2ax^2 + 2x(c-b) + d]\sin(2x)$$

$$y_2''(x) = [-4ax^2 + 4x(2c-b) + 2(2d+a)]\cos(2x) + [-4cx^2 - 4x(2a+d) + 2(c-2b)]\sin(2x)$$

Al reemplazar en la ecuación a resolver, se simplifica, se ordena la expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned} 8cx \cos(2x) + (4d + 2a) \cos(2x) - 8ax \sin(2x) + (2c - 4b) \sin(2x) = \\ = 5x \cos(2x) + 2 \cos(2x) + x \sin(2x) \end{aligned}$$

Se igualan los coeficientes de la misma variable del lado izquierdo con el derecho, se obtiene:

$$8c = 5, \quad 4d + 2a = 2, \quad -8a = 1 \quad 2c - 4b = 0$$

Por lo tanto,

$$c = \frac{5}{8}, \quad a = -\frac{1}{8} \quad b = \frac{5}{16}, \quad b = \frac{9}{16}$$

La solución específica de la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea, tiene la forma:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}\right)\cos(2x) + \left(\frac{5}{8}x^2 + \frac{9}{16}\right)\sin(2x)$$

La solución al ejercicio:

$$\begin{aligned} y &= y^h + y^{\sim h} = \\ &= C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}\right)\cos(2x) + \left(\frac{5}{8}x^2 + \frac{9}{16}\right)\sin(2x) \end{aligned}$$

8. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + y = \tan^2(x)$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' + y = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' + y = 0 \longrightarrow r^2 + e^{rx} = 0$$

$$r^2 + 1 = 0, \quad r_1 = i, \quad r_2 = -i,$$

La solución general de la ecuación diferencial de segundo, tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Se determina la integral específica, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es una función trigonométrica, en este caso: $\tan^2(x)$. Pero en este caso, no se tiene información para adivinar la forma de la integral específica. Por lo tanto, el método a aplicar en este ejercicio, es el método de la variación de la constante.

$$y^h = y_1(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

$$y^h = y_1(x) = C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x)$$

Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1' \cos(x) + C_2' \sin(x) = 0 \\ -C_1' \sin(x) + C_2' \cos(x) = \tan^2(x) \end{cases}$$

Donde: C_1' , C_2' , son las variables a calcular, se aplica el método de Cramer:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \tan^2(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = -\frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \tan^2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$$

Se integra las identidades obtenidas:

$$C_1(x) = - \int \frac{\sin^3(x) dx}{\cos^2(x)} = - \int \frac{(1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx}{\cos^2(x)}$$

$$= -\frac{1}{\cos(x)} - \cos(x)$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2(x)dx}{\cos(x)} = \int \frac{(1 - \cos^2(x))}{\cos(x)} dx = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) - \sin(x)$$

En estas integrales, no se ha escrito la constante de integración ya que, es lo que se esta calculando.

$$\begin{aligned} y^{\sim h} &= \left(-\frac{1}{\cos(x)} - \cos(x)\right)\cos(x) + \left(\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) - \sin(x)\right)\sin(x) \\ &= -1 - \cos^2(x) + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) - \sin^2(x) \\ &= -2 + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

La solución del ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - 2 + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

9. Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' - y' = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y'' - y' = 0 \longrightarrow r^2 e^{rx} - r e^{rx} = 0 \longrightarrow r^2 - r = 0,$$

$$r(r - 1) = 0 \longrightarrow r_1 = 0, \quad r_2 = 1,$$

La solución general de la ecuación diferencial de segundo, tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 + C_2 e^x$$

Se determina la integral específica del ejercicio, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que en este caso, es una función exponencial, y tiene la forma: $\frac{1}{1 + e^x}$. Para este caso, no se tiene información clara, para aplicar el método

de la adivinanza. Por lo tanto, el método a aplicar, en este tipo de ejercicios, es el método de la variación de la constante.

Siempre que, la información para aplicar el método de la adivinanza no es clara, lo mejor es aplicar el segundo método de la variación de la constante.

$$y^h = y_1(x) = C_1 + C_2 e^x \longrightarrow y^{\sim h} = y_2(x) = C_1(x) + C_2(x)e^x$$

Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0 \\ 0 + C_2'(x)e^x = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Donde: C_1' , C_2' , son las variables a calcular, se aplica el método de Cramer:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix}} = -\frac{e^x}{e^x(1+e^x)} = -\frac{1}{(1+e^x)}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix}} = \frac{1}{e^x(1+e^x)}$$

Se integra las identidades obtenidas:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{dx}{1+e^x} = -\int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = -\int dx + \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \\ &= -x + \ln(1+e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{(1+e^x - e^x)}{e^x(1+e^x)} dx = \int e^{-x} dx - \int \frac{dx}{1+e^x} = \\ &= -e^{-x} - x + \ln(1+e^x) \end{aligned}$$

En estas integrales, no se ha escrito la constante de integración; ya que, es lo que se esta calculando.

$$\begin{aligned} y^{\sim h} = y_1(x) &= -x + \ln(1+e^x) + [-e^{-x} - x + \ln(1+e^x)]e^x = \\ &= -x + \ln(1+e^x) - 1 - xe^x + e^x \ln(1+e^x) = \end{aligned}$$

$$= (1 + e^x) \ln(1 + e^x) - x(1 + e^x) - 1$$

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden de su parte no-homogénea, es:

$$y = y^h + y^{\sim h} = C_1 + C_2 e^x + (1 + e^x) \ln(1 + e^x) - x(1 + e^x) - 1$$

10. Resolver la ecuación diferencial:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos(x)}$$

Es una ecuación diferencial lineal de tercer orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y'' + y' = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y''' + y' = 0 \rightarrow r^3 e^{rx} + r e^{rx} = 0 \rightarrow r^3 + r = 0, \quad r(r^2 + 1) = 0$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = i, \quad r_3 = -i,$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal de tercer orden, su parte homogénea, tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 + C_2 \sin(x) + C_3 \cos(x)$$

Se determina la integral específica, su parte no-homogénea, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es una función trigonométrica, en este caso: $\frac{1}{\cos(x)}$. Pero para este caso, no se tiene una información clara, para aplicar el método de la adivinanza. Por lo tanto, el método a aplicar en este ejercicio, es el método de la variación de la constante.

$$y^h = y_1(x) = C_1 + C_2 \sin(x) + C_3 \cos(x)$$

Las constantes de la solución en su parte homogénea se transforman en variables en función de x' .

$$y^{\sim h} = y_2(x) = C_1(x) + C_2(x) \sin(x) + C_3(x) \cos(x)$$

Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \sin(x) + C_3'(x) \cos(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x) \cos(x) - C_3'(x) \sin(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 - C_2'(x) \sin(x) - C_3'(x) \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} \end{cases} \quad (2.59)$$

Donde: C'_1 , C'_2 , C'_3 son las variables a calcular. El sistema escrito permite calcular las incógnitas por medio del método de Cramer, se aconseja aplicar propiedades de un determinante.

$$C'_1(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad C'_2(x) = -\tan(x) \quad C'_3(x) = -1$$

el estudiante debe obtener estas respuestas. Se integra las identidades obtenidas:

$$C_1(x) = - \int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)$$

$$C_2(x) = - \int \tan(x) = \ln(\cos(x))$$

$$C_3(x) = - \int dx = -x$$

En estas integrales no se ha escrito la constante de integración ya que, es lo que se esta calculando. La integral especifica de la ecuación de tercer orden no-homogénea, tiene la forma:

$$y^{\sim h} = y_1(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) + \sin(x)\ln(\cos(x)) - x\cos(x)$$

La solución general a la ecuación diferencial lineal de tercer orden con coeficientes constantes no-homogénea, tiene la forma:

$$y = y^h + y^{\sim h} = C_1 + C_2 \sin(x) + C_3 \cos(x) + \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) + \sin(x)\ln(\cos(x)) - x\cos(x)$$

11. Resolver la ecuación diferencial:

$$y''' - 2y'' + y' = 4(\sin(x) + \cos(x))$$

Que cumpla las condiciones iniciales:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = -1$$

Es una ecuación diferencial lineal de tercer orden con coeficientes constantes no-homogénea. Primero se encuentra la solución a la parte homogénea; por lo tanto:

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

Se obtiene la ecuación característica:

$$y''' - 2y'' + y' = 0 \longrightarrow r^3 e^{rx} - 2r^2 e^{rx} + r e^{rx} = 0$$

$$r^3 - 2r^2 + r = 0, \quad r(r^2 - 2r + 1) = 0$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 1,$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal de tercer orden, en su parte homogénea, tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 + (C_2 + xC_3)e^x$$

Se determina la integral específica, de su parte no-homogénea, para lo cual, se observa el lado derecho de la ecuación diferencial, que es una función trigonométrica, en este caso: $\sin(x) + \cos(x)$. Para este caso, se tiene una información clara, para aplicar el método de la adivinanza. Por lo tanto, es el método a aplicar en este ejercicio. La integral específica tiene la forma:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = a \sin(x) + b \cos(x)$$

Se deriva tres veces:

$$y_2'(x) = a \cos(x) - b \sin(x)$$

$$y_2''(x) = -a \sin(x) - b \cos(x)$$

$$y_2'''(x) = -a \cos(x) + b \sin(x)$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial lineal no-homogénea:

$$y''' - 2y'' + y' = 4(\sin(x) + \cos(x))$$

$$\begin{aligned} -a \cos(x) + b \sin(x) - 2(-a \sin(x) - b \cos(x)) + a \cos(x) - b \sin(x) &= \\ &= 4(\sin(x) + \cos(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a \cos(x) + b \sin(x) + 2a \sin(x) + 2b \cos(x) + a \cos(x) - b \sin(x) &= \\ &= 4 \sin(x) + 4 \cos(x) \end{aligned}$$

$$\cos(x)[-a + 2b + a] + \sin(x)[b + 2a - b] = 4 \sin(x) + 4 \cos(x)$$

$$\cos(x)[2b] + \sin(x)[2a] = 4 \sin(x) + 4 \cos(x)$$

Se igualan los coeficientes del lado izquierdo de una variable con los coeficientes del lado derecho:

$$2b = 4, \longrightarrow b = 2, \quad 2a = 4 \longrightarrow a = 2$$

La integral especifica de la ecuación de tercer orden con coeficientes constantes no-homogénea:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = a \sin(x) + b \cos(x) \longrightarrow y^{\sim h} = y_2(x) = 2 \sin(x) + 2 \cos(x)$$

La solución a la ecuación de tercer orden no-homogénea:

$$y = y^h + y^{\sim h} = C_1 + e^x(C_2 + C_3x) + 2 \sin(x) + 2 \cos(x)$$

Se deriva dos veces la solución general de la ecuación diferencial no-homogénea:

$$y' = 0 + C_2 e^x + e^x C_3 + x e^x C_3 + 2 \cos(x) - 2 \sin(x)$$

$$y'' = C_2 e^x + e^x C_3 + e^x C_3 - 2 \sin(x) - 2 \cos(x)$$

Se reemplaza los valores de las condiciones iniciales y se obtiene un sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 1 \\ C_2 + C_3' + 2 = 0 \\ C_1 + 2C_3' - 2 = -1 \end{cases}$$

Aplicando uno de los métodos para resolver sistemas, se obtiene:

$$C_1 = 4, \quad C_2 = -5 \quad C_3 = 3$$

Al reemplazar los valores de las constantes en la solución general de la ecuación diferencial lineal de tercer orden no-homogénea, se obtiene la solución especifica de la ecuación diferencial lineal de tercer orden no-homogénea:

$$y = 2(\cos(x) + \sin(x)) + (3x - 5)e^x$$

2.5.2. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de segundo orden y de 'n' Orden con Coeficientes Constantes No-homogéneas.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y'' + 4y = x \sin(2x)$
2. $y''' - y = x^4$
3. $y''' - y' = \sin(x)$
4. $y''' - 2y' + y = \sin(x)$
5. $y'' + \frac{5}{2}y' = \frac{5}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$
6. $y'' + 2y = x^2 + 2$
7. $y'' - 3y' + 2y = e^x$
8. $y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \sin(x)$
9. $y'' + 4y = x^2 + e^{2x} \sin(x)$
10. $y'' + 4y = x \sin(x)$
11. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5 \sin(2x)$
12. $y'' + 3y' + 2y = \sin(2x) + \cos(x)$
13. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + 3 \sin(2x) + 1$
14. $y''' - y' = x$
15. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$
16. $y^{(4)} - y = 5e^x \sin(x)$
17. $y^{(5)} + y''' = x^2 - 1$
18. $y''' - 2y'' + 5y' = e^x(\cos(2x) + \sin(2x))$
- a) $y'' - 7y' + 12y = x$
- b) $y'' + 6y' + 10y = 1 - x$
- c) $y'' - 2y' + 3y = x + 1$
- d) $y'' - 3y' + 2y = x^2$
- e) $y'' - y = 2 \sin(x)$
- f) $y'' + 9y = \sin(3x)$
- g) $y'' + 4y = 2 \cos(x) + \sin(x)$
- h) $y'' - 2y' + 2y = 2 \cos(x) + \sin(x)$
- i) $y'' - 4y = 10e^{3x}$
- j) $y'' + 9y = x \cos(x)$
- k) $y'' - y' + 12y = 3x - \sin(2x)$
- l) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos(2x)}$
- m) $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos(x)$
- n) $y'' - 2y' = (x + 1)e^{2x}$
- ñ) $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$
- o) $y'' + y = a \cos(x)$
- p) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

2. Resuelva las ecuaciones diferenciales dadas las condiciones iniciales:

1. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 2$
2. $y'' + y = -\sin(2x)$ $y(\pi) = 1$ $y'(\pi) = 1$
3. $y'' - y' = 2(1 - x)$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$
4. $y''' + 2y' + y = -2e^{-2x}$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = 1$
5. $y''' - y' = 6 - 3x^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = 1$
6. $y''' - y'' = \sin(x)$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 1$

7. $y''' + y' = \sin(x)$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 0$	$y''(0) = 1$
8. $y''' + y'' = x$	$y(0) = 3$	$y'(0) = 1$	$y''(0) = 0$
9. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 0$	$y''(0) = 0$
10. $y''' - y' = -2x$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 0$	$y''(0) = 2$
11. $y'' + 2y' + 5y = 3$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 1$	
12. $y'' + y = \cos(x)$	$y(0) = -1$	$y'(0) = 1$	
13. $y'' - 2y' + 2y = e^x$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 1$	
14. $y'' + 4y' + 4y = 0$	$y(0) = -1$	$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$	
15. $y'' - y = e^{2x}$	$y(0) = \frac{1}{3}$	$y'(1) = \frac{1}{3}e^2$	
16. $y'' + y = -3\sin(2x)$	$y(0) = 0$	$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$	
17. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$	$y(0) = \frac{4}{3}$	$y'(0) = \frac{1}{27}$	
18. $y'' + 9y = 6^{3x}$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 0$	
19. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$	$y(0) = 2$	$y'(0) = 3$	
20. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin(x)$	$y(0) = 2$	$y'(0) = 3$	
21. $y'' + 4y = \sin(x)$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 0$	
22. $y'' + y = 2\cos(x)$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 0$	
23. $y'' + 4y = 4(\sin(2x) + \cos(2x))$	$y(\pi) = 2\pi$	$y'(\pi) = 2\pi$	
24. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos(x)$	$y(0) = 2\pi$	$y'(\pi) = 2\pi e^\pi$	
25. $y'' - y' = -5e^{-x}$	$y(0) = 2$	$y'(0) = 3$	
26. $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 0$	

2.6. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Euler

Las ecuaciones diferenciales lineales de 'n' orden de la forma:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad (a_n \neq 0) \quad (2.60)$$

Esta ecuación diferencial (2.60), es la forma general de la ecuación diferencial de Euler de 'n' orden, es lineal con respecto a 'y' y todas sus derivadas; los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes cualesquiera. La función $f(x)$, es una función continua en un intervalo dado. Si $f(x) \equiv 0$ la ecuación que se obtiene tiene la forma:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (2.61)$$

Se la denomina ecuación diferencial lineal de 'n' orden de Euler homogénea (2.61). En caso contrario, será una ecuación diferencial lineal de n-orden no-homogénea ($f(x) \neq 0$).

Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ son funciones cualesquiera, independientes linealmente y son las soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea, en este caso, la solución general de la ecuación diferencial de 'n' orden homogénea, tiene la forma:

$$y^h = y = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x)$$

La solución general de una ecuación diferencial no-homogénea:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (2.62)$$

se obtiene al sumar: la solución general de su parte homogénea:

$$y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

y la solución específica de su parte no-homogénea $y_2(x)$, lo cual se puede escribir, como:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = y^h + y^{\sim h} = y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) + y_2(x)$$

La solución específica de una ecuación diferencial de 'n' orden de Euler, se la encuentra aplicando, principalmente uno de los métodos:

1. Método de la adivinanza (Error-acierto)
2. Método de la constante como variable.

La solución de una ecuación diferencial de 'n' orden, en el caso, de que sea homogénea, se aplica un cambio de variable, $y = x^r$ y se obtiene sus derivadas:

$$y = x^r, \quad y' = r x^{r-1}, \quad y'' = r(r-1) x^{r-2}, \quad y^{(n)} = r(r-1)(r-2)(r-3) \dots x^{r-n} x^r$$

Estos valores se reemplaza en la ecuación diferencial de 'n' orden (2.62) y después de dividir para $y = x^r$ se obtiene la ecuación característica de la ecuación diferencial de 'n' orden, que tiene la forma:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (2.63)$$

Las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial, se los obtiene por diferentes métodos, los cuales son conocidos por el estudiante (factorización, Ruffini, Teorema del factor). Si la ecuación característica

tiene 'n' diferentes raíces; es decir, son independientes: $r_1, r_2, \dots, r_n$ la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de 'n' orden tiene la forma:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \dots + C_n x^{r_n} \quad (2.64)$$

Si la ecuación característica tiene 'k' diferentes raíces; es decir: $r_1, r_2, \dots, r_k$ y $(n - k)$ diferentes raíces conjugadas imaginarias ($r_l = \alpha_l + i\beta_l$; $\bar{r}_l = \alpha_l - i\beta_l$); donde: $l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n - k)$, la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de 'n' orden sera la suma de las expresiones:

$$\begin{aligned} 1. & C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \dots + C_k x^{r_k} = \sum_{l=1}^k C_l x^{r_l} \\ 2. & x^{\alpha_l} (C_{k+2l-1} \cos(\beta_l \ln(x)) + C_{k+2l} \sin(\beta_l \ln(x))) \quad \left(l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n - k) \right) \end{aligned}$$

Esto es posible, siempre y cuando $(n - k)$ sea un numero par.

La solución general a la ecuación diferencial de 'n' orden de Euler homogénea, tiene la forma:

$$\begin{aligned} y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = \\ = \sum_{l=1}^k C_l x^{r_l} + \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(n-k)} x^{\alpha_l} (C_{k+(2l-1)} \cos(\beta_l \ln(x)) + C_{k+2l} \sin(\beta_l \ln(x))) \end{aligned}$$

Y finalmente, si la ecuación diferencial de 'n' orden homogénea, tiene raíces diferentes y raíces que se repitan (tanto reales como imaginarias), la solución general de la ecuación diferencial de 'n' orden homogénea, constara de la suma de las raíces que no se repitan, más la expresión de las raíces que se repitan:

1. Para raíces reales, que se repitan:

$$x^{r_l} (C_1^l + C_2^l \ln(x) + \dots + C_k^l (\ln(x))^{k-l}) \quad (\text{para } k - \text{veces raíces reales } r_l)$$

2. Para raíces conjugadas imaginarias:

$$\begin{aligned} x^{r_l} [(C_1^l + C_2^l \ln(x) + \dots + C_k^l (\ln(x))^{k-1}) \cos(\beta_l \ln(x)) + (C_1^l + \\ + C_2^l \ln(x) + \dots + C_k^l x^{k-1}) \sin(\beta_l \ln(x))] \end{aligned}$$

Para k-veces raíces imaginarias conjugadas. ($r_l = \alpha_l + i\beta_l$; $\bar{r}_l = \alpha_l - i\beta_l$)

2.6.1. Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo Orden

La ecuación diferencial de la forma:

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad a_2 \neq 0 \quad (2.65)$$

Estas ecuaciones diferenciales (2.65) son lineales con respecto a y'' y y' ; al igual que, con sus derivadas. La función $f(x)$ es con respecto a la variable x y se puede presentar en cualquier estructura, las letras a_0, a_1, a_2 son constantes cualesquiera.

Si en esta ecuación diferencial de segundo orden $f(x) \equiv 0$; es decir, tiene la forma:

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (a_2 \neq 0) \quad (2.66)$$

Se la denomina ecuación diferencial de segundo orden de Euler homogénea, en caso contrario, será una ecuación diferencial de segundo orden no-homogénea.

Si se conoce la solución general de la parte homogénea: $y^h = y_1(x, C_1, C_2)$, y que además, se conozca la solución específica de la parte no-homogénea: $y^{\sim h} = y_2(x)$, la solución a la ecuación diferencial de segundo orden tendría la forma:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x, C_1, C_2) + y_2(x) \quad (2.67)$$

Si se conoce la solución de la parte homogénea en la forma:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x, C_1, C_2) + y_2(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + y_2(x) \quad (2.68)$$

Con la condición de que, las funciones $f_1(x), f_2(x)$ sean linealmente independientes y C_1, C_2 , cualquier constante.

2.6.2. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo y 'n' Orden Homogéneas

La ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma:

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2.69)$$

Para este tipo de ecuaciones diferenciales (2.69), se tiene el siguiente teorema: Por todo punto conocido (x_0, y_0) que pertenece al plano cartesiano Oxy, pasa exactamente una línea integral de ecuación $y = g(x)$, a la cual, su tangente en este punto, forma con el eje Ox un ángulo positivo, dado de antemano, un ángulo $\varphi, \left(\varphi \neq \frac{1}{2}\pi\right)$.

Lo que nos indica este teorema, es que, siempre existe una función $y = g(x)$, que cumple la condición, para cualquier valor de (x_0, y_0) , para que cumpla con las condiciones iniciales:

$$y_0 = g(x_0) \quad y_1 = g'(x_0)$$

si en la ecuación diferencial de Euler de segundo orden (2.69), se realiza un cambio de variable $y = x^r$ donde: $x > 0$ y r es raíz de la ecuación característica, se obtiene sus derivadas y se reemplaza en la ecuación diferencial (2.69):

$$y = x^r, \quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \quad (2.70)$$

Se reemplaza (2.70) en la ecuación diferencial dada (2.69):

$$\begin{aligned} ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy &= 0 \\ ax^2 [r(r-1)x^{r-2}] + bx [rx^{r-1}] + cx^r &= 0 \\ ax^2 [r(r-1)x^r x^{-2}] + bx [rx^r x^{-1}] + cx^r &= 0 \\ ax^2 \left[r(r-1) \frac{x^r}{x^2} \right] + bx \left[r \frac{x^r}{x^1} \right] + cx^r &= 0 \end{aligned}$$

Se simplifica la expresión:

$$a[r(r-1)x^r] + b[rx^r] + cx^r = 0$$

Se divide para x^r :

$$a[r(r-1)] + b[r] + c = 0$$

Con lo cual, se obtiene, fácilmente, lo que se denomina: la ecuación característica de la ecuación diferencial de Euler de segundo orden, y tiene la forma:

$$ar^2 + r(b-a) + c = 0$$

Como se puede observar, es un polinomio de segundo orden con respecto a 'r'. En este instante, el estudiante debe recordar las propiedades de un polinomio de segundo orden. Entre estas propiedades, se tiene la información que, nos da el discriminante de un polinomio de segundo orden:

1. Si el discriminante es mayor a cero, $\Delta > 0$, el polinomio tiene dos raíces y son números reales. En este caso, existe r_1, r_2 que son números reales e independientes.

En este caso, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$$

Donde: C_1, C_2 son constantes cualesquiera.

2. Si el discriminante es igual a cero, $\Delta = 0$, lo que significa que, el polinomio de segundo orden tiene una raíz doble real, $r_1 = r_2$.

En este caso, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma:

$$y^h = y_1(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_1} \ln(x) \longrightarrow y^h = y_1(x) = x^{r_1} (C_1 + C_2 \ln(x))$$

Donde: C_1, C_2 son constantes cualesquiera.

Se puede observar que, a uno de los elementos (a cualquiera) de la solución general, se lo a multiplicado por $\ln(x)$, por este hecho, la ecuación pasa de una ecuación dependiente a una una ecuación independiente.

3. Si el discriminante es menor a cero, $\Delta < 0$, significa que, las raíces del polinomio de segundo orden son imaginarias:

$$r_1 = \alpha + \beta i, \quad r_2 = \alpha - \beta i$$

En la practica, es mas cómodo utilizar su forma de Moivre:

$$\begin{aligned} r_1 = \alpha + \beta i, & \longrightarrow x^{\alpha + \beta i} = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln(x)} = \\ & = x^\alpha (\cos(\beta \ln(x)) + i \sin(\beta \ln(x))) \\ r_2 = \alpha - \beta i & \longrightarrow x^{\alpha - \beta i} = x^\alpha x^{-i\beta} = x^\alpha e^{-i\beta \ln(x)} = \\ & = x^\alpha (\cos(\beta \ln(x)) - i \sin(\beta \ln(x))) \end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones tienen la forma:

$$\begin{aligned} y^h &= y_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) \\ y^h &= y_1(x) = x^\alpha \sin(\beta \ln(x)) \end{aligned}$$

Que son las soluciones especificas de la ecuación diferencial homogénea. Como su producto es diferente de la constante, por lo tanto, son integrales especificas lineales independientes.

En consecuencia, la integral general de la ecuación diferencial de Euler homogénea (2.69) tiene la forma:

$$\begin{aligned} y^h &= y_1(x) = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln(x)) + C_2 x^\alpha \sin(\beta \ln(x))) \quad (2.71) \\ y^h &= y_1(x) = x^\alpha [(C_1 \cos(\beta \ln(x)) + C_2 \sin(\beta \ln(x)))] \end{aligned}$$

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler de segundo orden homogéneas:

1. Resolver la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de segundo orden homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$x^2 y'' + xy' - y = 0 \longrightarrow x^2 r(r-1)x^{r-2} + xrx^{r-1} - x^r = 0$$

$$x^2 r(r-1)x^r x^{-2} + xrx^r x^{-1} - x^r = 0$$

$$r(r-1)x^r + rx^r - x^r = 0$$

Se divide la ecuación para x^r y se obtiene:

$$r(r-1)x^r + rx^r - x^r = 0 \longrightarrow r(r-1) + r - 1 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r^2 - 1 \longrightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -1$$

Por lo tanto, la solución general (integral general) de la ecuación diferencial es:

$$y^h = y_1(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x$$

Donde: C_1, C_2 son constantes cualesquiera.

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + y = 0$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de segundo orden homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$x^2 y'' + y = 0 \longrightarrow x^2 r(r-1)x^{r-2} + x^r = 0$$

$$x^2 r(r-1)x^r x^{-2} + x^r = 0$$

$$r(r-1)x^r + x^r = 0$$

Se divide la ecuación para x^r y se obtiene:

$$r(r-1) + 1 = 0 \longrightarrow r(r-1) + 1 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r^2 - r + 1 \longrightarrow r_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, la solución general (integral general), de su parte homogénea, de la ecuación diferencial es:

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) \text{ la primera raíz}$$

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) \text{ la segunda raíz}$$

Por lo tanto, la solución general (integral general) de la ecuación diferencial de Euler homogénea es:

$$y^h = y_1(x) = C_1 x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) + C_2 x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right)$$

$$y^h = y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) \right]$$

Donde: C_1, C_2 son constantes cualesquiera.

3. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de segundo orden homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \longrightarrow x^2 r(r-1)x^{r-2} - xrx^{r-1} + x^r = 0$$

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} - xrx^{r-1} + x^r = 0$$

$$r(r-1)x^r - rx^r + x^r = 0$$

Se divide la ecuación para x^r y se obtiene:

$$r(r-1)x^r - rx^r + x^r = 0 \longrightarrow r(r-1) - r + 1 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r^2 - r - r + 1 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \longrightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 1$$

Por lo tanto, la solución general (integral general), de su parte homogénea, de la ecuación diferencial es:

$$y_1(x) = x \text{ la primera raíz}$$

$$y_1(x) = x \ln(x) \text{ la segunda raíz}$$

Por lo tanto, la solución general (integral general) de la ecuación diferencial de Euler homogénea es:

$$y^h = y_1(x) = C_1 x + C_2 x \ln(x)$$

$$y^h = y_1(x) = x[C_1 + C_2 \ln(x)]$$

Donde: C_1, C_2 son constantes cualesquiera.

4. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de tercer orden homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y = x^r, \quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}, \quad y^{(3)} = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$$

$$x^3 r(r-1)(r-2)x^{r-3} + 2x^2 r(r-1)x^{r-2} - xrx^{r-1} + x^r = 0$$

$$x^3 r(r-1)(r-2)x^r x^{-3} + 2x^2 r(r-1)x^r x^{-2} - xrx^r x^{-1} + x^r = 0$$

$$r(r-1)(r-2)x^r + 2r(r-1)x^r - rx^r + x^r = 0$$

Se divide la ecuación para x^r y se obtiene:

$$r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - r + 1 = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - (r-1) = 0$$

$$(r-1)(r(r-2) + 2r - 1) = 0$$

$$(r-1)(r^2 - 2r + 2r - 1) = 0$$

$$(r-1)(r^2 - 1) = 0$$

$$(r-1)(r-1)(r+1) = 0$$

$$(r-1)^2(r+1) = 0$$

La ecuación característica tiene 3 raíces: $r_1 = 1$; es un número real y se repite dos veces, $r^2 = -1$ un número real; Por lo tanto, la solución general (integral general), de su parte homogénea, de la ecuación diferencial es:

$$y^h = y_1(x) = C_1 x + C_2 x \ln(x) + C_3 \frac{1}{x}$$

Donde: C_1, C_2, C_3 son constantes cualesquiera.

5. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + 2xy' = 0$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de tercer orden homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y = x^r, \quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}, \quad y^{(3)} = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + 2xy' = 0$$

$$x^3 r(r-1)(r-2)x^{r-3} + 3x^2 r(r-1)x^{r-2} + 2xr x^{r-1} = 0$$

$$x^3 r(r-1)(r-2)x^r x^{-3} + 3x^2 r(r-1)x^r x^{-2} + 2xr x^r x^{-1} = 0$$

$$r(r-1)(r-2)x^r + 3r(r-1)x^r + 2rx^r = 0$$

Se divide la ecuación para x^r y se obtiene:

$$r(r-1)(r-2) + 3r(r-1) + 2r = 0$$

Se obtiene sus raíces, que en este caso son:

$$r(r-1)(r-2) + 3r(r-1) + 2r = 0$$

$$r(r^2 - 3r + 2) + 3r^2 - 3r + 2r = 0$$

$$r^3 - 3r^2 + 2r + 3r^2 - r = 0$$

$$r^3 + r = 0$$

$$r(r^2 + 1) = 0$$

La ecuación característica tiene 3 raíces: $r_1 = 0$; es un número real y $r_2 = i$ y $r_3 = -i$ números imaginarios; Por lo tanto, la solución general (integral general), de su parte homogénea, de la ecuación diferencial es:

$$y^h = y_1(x) = C_1 + C_2 \cos(\ln(x)) + C_3 \sin(\ln(x))$$

Donde: C_1, C_2, C_3 son constantes cualesquiera.

6. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^4 y^{(4)} + 6x^3 y''' + 5x^2 y'' - xy' + y = 0$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de cuarto orden homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$y = x^r, \quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}, \quad y^{(3)} = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

$$y^{(4)} = r(r-1)(r-2)(r-3)x^{r-4}$$

$$x^4 r(r-1)(r-2)(r-3)x^{r-4} + 6x^3 r(r-1)(r-2)x^{r-3} + 5x^2 r(r-1)x^{r-2} -$$

$$-xrx^{r-1} + x^r = 0$$

$$r(r-1)(r-2)(r-3)x^r + 6r(r-1)(r-2)x^r + 5r(r-1)x^r - rx^r + x^r = 0$$

Se divide la expresión para x^r :

$$r(r-1)(r-2)(r-3) + 6r(r-1)(r-2) + 5r(r-1) - r + 1 = 0$$

$$(r-1)[r(r-2)(r-3) + 6r(r-2) + 5r - 1] = 0$$

$$(r-1)[r(r^2 - 5r + 6) + 6r^2 - 12r + 5r - 1] = 0$$

$$(r-1)[r^3 - 5r^2 + 6r + 6r^2 - 12r + 5r - 1] = 0$$

$$(r-1)[r^3 + r^2 - r - 1] = 0 \longrightarrow (r-1)[r^2(r+1) - (r+1)] =$$

$$(r-1)[r^2(r+1) - (r+1)] = (r-1)(r+1)[r^2 - 1] = 0$$

$$(r-1)(r+1)[r^2 - 1] = (r-1)(r+1)(r-1)(r+1) = 0$$

$$(r-1)^2(r+1)^2 = 0$$

LA ecuación característica tiene las siguientes raíces: $r_1 = 1$ es número real y se repite dos veces, $r_2 = -1$ un número real y se repite dos veces; por lo tanto, su solución general de la ecuación diferencial de Euler de cuarto orden homogénea:

$$y^h = y_1(x) = x(C_1 + C_2 \ln(x)) + \frac{1}{x}(C_3 + C_4 \ln(x))$$

Donde : C_1, C_2, C_3, C_4

2.6.3. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Euler de segundo orden Homogéneas

1) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. $x^2y'' + xy' + y = 0$ | 1. $x^2y'' + xy' + 6y = 0$ |
| 2. $x^2y'' - 2y = 0$ | 2. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ |
| 3. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ | 3. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ |
| 4. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ | 4. $x^2y'' + 9xy' + 12y = 0$ |
| 5. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ | 5. $x^2y'' + 2xy - 2y = 0$ |
| 6. $x^2y'' + 2xy - 6y = 0$ | 6. $x^2y'' + xy' = 0$ |
| 7. $x^2y'' + xy' - y = 0$ | 7. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ |
| 8. $x^2y'' + 5xy + 4y = 0$ | 8. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ |
| 9. $x^2y'' - 2y = 0$ | 9. $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$ |
| 10. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ | 10. $x^3y''' + 3x^2y'' + 2xy' = 0$ |
| 11. $x^3y''' - 9x^2y'' + 37xy' - 64y = 0$ | 11. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$ |
| 12. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ | 12. $x^3y''' + xy' - y = 0$ |

2) Resolver las ecuaciones diferenciales de Euler si son dadas las condiciones iniciales.

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2y'' + 2xy' = 0$ | $y(1) = 3, \quad y(2) = 1$ |
| 2. $x^2y'' + 2xy' = 0$ | $y(-1) = 1, \quad y(2) = 1$ |
| 3. $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$ | $y(1) = 1, \quad y(2) = 8$ |
| 4. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ | $y(2) = 1, \quad y(1) = 8$ |
| 5. $x^2y'' + 2xy - 6y = 0$ | $y(0) = 1, \quad y(1) = 2$ |
| 6. $x^2y'' + xy' = 0$ | $y(0) = 1, \quad y(1) = 3$ |
| 7. $x^2y'' - 3xy + 3y = 0$ | $y(1) = 1, \quad y(2) = 2$ |
| 8. $x^2y'' - 3xy + 3y = 0$ | $y(-1) = 1, \quad y(0) = 2$ |

2.6.4. Ejercicios Resueltos de Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo y 'n' Orden No-homogéneas

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln(x)$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de segundo orden no-homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$\begin{aligned} y &= x^r, \quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \\ x^2 y'' - 3xy' - 5y &= 0 \longrightarrow x^2 r(r-1)x^{r-2} - 3rxr^{r-1} - 5x^r = 0 \\ r(r-1)x^r - 3rx^r - 5x^r &= 0 \end{aligned}$$

Se divide para x^r :

$$r(r-1) - 3r - 5 = 0$$

Se encuentra las raíces del polinomio de segundo orden:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 5$$

Las dos raíces son números reales, lo que nos permite encontrar la integral general, de la ecuación diferencial, su parte homogénea:

$$y^h = y_1(x) = C_1 x^5 + C_2 x^{-1}$$

Se encuentra la solución específica de la ecuación diferencial, su parte no-homogénea, se aplica el método de la variación de las constantes:

$$\begin{aligned} y^h &= y_1(x) = C_1 x^5 + C_2 x^{-1} \\ y_2(x) &= C_1(x)x^5 + C_2(x)x^{-1} \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1'(x)x^5 + C_2'(x)x^{-1} = 0 \\ C_1'(x)5x^4 + C_2'(x)(-1)x^{-2} = \frac{x^2 \ln(x)}{x^2} = \ln(x) \end{cases}$$

Al resolver el sistema, se obtiene:

$$C_1'(x) = \frac{1}{6}x^{-4} \ln(x); \quad C_2'(x) = -\frac{1}{6}x^2 \ln(x)$$

Después de integrar, se obtiene (el estudiante debe obtener las integrales):

$$C_1(x) = -\frac{1}{18}x^{-3} \ln(x) - \frac{1}{54}x^{-3}, \quad C_2(x) = -\frac{1}{18}x^3 \ln(x) + \frac{1}{54}x^3$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial de Euler:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = C_1(x)x^5 + C_2(x)x^{-1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{18}x^{-3}\ln(x)\right)x^5 + \left(-\frac{1}{18}x^3\ln(x) + \frac{1}{54}x^3\right)x^{-1}$$

Se simplifica la expresión:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = -\frac{1}{9}x^2\ln(x)$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x) = C_1x^5 + C_2x^{-1} - \frac{1}{9}x^2\ln(x)$$

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xy' - y = x^2$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de segundo orden no-homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$\begin{aligned} y &= x^r, \quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \\ x^2y'' + xy' - y &= 0 \longrightarrow x^2r(r-1)x^{r-2} + rx^{r-1} - x^r = 0 \\ r(r-1)x^r + rx^r - x^r &= 0 \end{aligned}$$

Se divide para x^r :

$$r(r-1) + r - 1 = 0$$

Se encuentra las raíces del polinomio de segundo orden:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 1$$

Las dos raíces son números reales, lo que nos permite encontrar la integral general, de la ecuación diferencial, su parte homogénea:

$$y^h = y_1(x) = C_1x^1 + C_2x^{-1}$$

Se encuentra la solución específica de la ecuación diferencial, su parte no-homogénea, se aplica el método de la adivinanza; ya que, $f(x) = x^2$ un polinomio de segundo orden:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Se deriva dos veces:

$$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}x^2 y'' + xy' - y &= x^2 \longrightarrow x^2(2a) + x(2ax + b) - (ax^2 + bx + cx) = x^2 \\2ax^2 + 2ax^2 + bx - ax^2 - bx - cx &= x^2 \\3ax^2 - cx &= x^2\end{aligned}$$

Se iguala los coeficientes del lado izquierdo con los coeficientes del lado derecho:

$$3a = 1 \longrightarrow a = \frac{1}{3}, \quad c = 0, \quad b = \text{cualquier valor}$$

Se reemplaza:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x) = C_1 x + C_2 x^{-1} + \frac{1}{3}x^2 + bx$$

3. Resolver la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + xy' = 12 \ln(x)$$

La ecuación dada, es una ecuación diferencial de Euler de segundo orden no-homogénea; por lo que, se obtiene su ecuación característica:

$$\begin{aligned}y &= x^r, \quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \\x^2 y'' + xy' &= 0 \longrightarrow x^2 r(r-1)x^{r-2} + rx^{r-1} = 0 \\r(r-1)x^r + rx^r &= 0\end{aligned}$$

Se divide para x^r :

$$r(r-1) + r = 0$$

Se encuentra las raíces del polinomio de segundo orden:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0$$

Se obtiene la solución de su parte homogénea:

$$y^h = y_1(x) = C_1 + C_2 \ln(x)$$

Se encuentra la solución específica de la ecuación diferencial, su parte no-homogénea, se aplica el método de la variación de las constantes:

$$y^h = y_1(x) = C_1 + C_2 \ln(x)$$

$$y_2(x) = C_1(x) + C_2 \ln(x)$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) \ln(x) = 0 \\ 0 + C_2'(x)x^{-1} = \frac{\ln(x)}{x^2} \end{cases}$$

Al resolver el sistema, se obtiene:

$$C_1'(x) = -\frac{12(\ln(x))^2}{x}, \quad C_2'(x) = \frac{12\ln(x)}{x}$$

Después de integrar, se obtiene (el estudiante debe integrar):

$$C_1(x) = -4(\ln(x))^3, \quad C_2(x) = 6(\ln(x))^2$$

Se reemplaza para obtener su solución específica. La solución a su parte no-homogénea:

$$y^{\sim h} = y_2(x) = C_1(x) + C_2(x) \ln(x) = -4(\ln(x))^3 + 6(\ln(x))^2 \ln(x) = 2(\ln(x))^3$$

La solución al ejercicio:

$$y = y^h + y^{\sim h} = y_1(x) + y_2(x) = C_1 + C_2 \ln(x) + 2(\ln(x))^3$$

Donde : C_1, C_2 son constantes cualesquiera.

2.6.5. Ejercicios Propuestos de Ecuaciones Diferenciales de Euler de Segundo y 'n' Orden No-homogéneas

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler no-homogéneas.

1. $x^2y'' + xy' + y = x$
2. $x^2y'' - xy' + y = 2x$
3. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$
4. $x^2y'' - 2xy' - 3y = -\frac{16\ln(x)}{x}$
5. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$
6. $x^2y'' - 6y = 12\ln(x)$
7. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$
8. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x$
9. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^5$
10. $x^2y'' + 6xy' = 12\ln(x)$
11. $x^2y'' - xy' + y = \frac{1}{x}$
12. $x^2y'' + xy' + y = 6x - x\ln(x)$
13. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2(\ln(x))^2 + 12x$
14. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$
- a) $x^2y'' + xy' = 6x\ln(x)$
- b) $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln(x))$
- c) $x^2y'' - xy' + y = 3x^3$
- d) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2ax + 12\frac{b}{x}$
- e) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^5\ln(x)$
- f) $x^3y''' + x^2y'' + 2xy' - 2y = 2x^3 + 3x$
- g) $x^2y'' - xy' + y = 2x^2$
- h) $x^2y'' + xy' = \frac{1}{\cos(x)}$
- i) $x^2y'' - xy' + y = \frac{1}{1 + e^x}$
- j) $x^2y'' + xy' = \frac{\ln(x)}{x}$
- k) $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{6\ln(x)}{x}$

2.7. Ciertas Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.

1. Encontrar todas las curvas, de las cuales su curvatura es igual a la función $f(x)$. El ejercicio nos indica que: la curvatura de una función es $f(x)$, lo cual se podría escribir:

$$k = f(x) = y \quad (2.72)$$

De calculo diferencial, se puede obtener la formula general para la curvatura de una función cualquiera, que esta definida por:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.73)$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$$f(x) = y = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.74)$$

Por lo general, se considera que, el elemento que se encuentra en el numerador de la formula definida para el calculo de curvaturas esta con valor absoluto, es decir, se puede utilizar una de las formulas:

$$f(x) = y = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad -f(x) = -y = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como se observa , en ninguna de las formulas aparece el elemento x ; por lo tanto:

$$y' = p, \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} \quad (2.75)$$

Se reemplaza (2.63) en la ecuación diferencial (2.62):

$$f(x) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \rightarrow f(x) = \frac{\frac{dp}{dx}}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow f(x) = \frac{dp}{dx(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Lo que representa una ecuación diferencial de primer orden de variables separables:

$$f(x)dx = \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Se integral a ambos lados de la identidad:

$$f(x)dx = \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \int f(x)dx + C_1 = \int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.76)$$

La expresión del lado izquierdo, representa una función cualquiera; por lo tanto, se integral el lado derecho, para lo cual, se realiza un cambio de variable:

$$p = \tan(\theta) \rightarrow dp = \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} \quad (2.77)$$

Se reemplaza (2.65) en (2.64) :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{dp}{[(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]^3} = \int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)[\sqrt{1+\tan^2(\theta)}]^3} = \\
 &= \int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)[\sqrt{1+\tan^2(\theta)}]^3} = \int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)[\sqrt{1+\tan^2(\theta)}]^3} = \\
 &= \int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)[\sqrt{1+\tan^2(\theta)}]^3} = \int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) \left[\frac{1}{\cos(\theta)} \right]^3} = \\
 &= \int \frac{\cos^3(\theta)d\theta}{\cos^2} = \int \cos(\theta)d\theta = \sin(\theta) + C \\
 \int f(x)dx + C_1 &= \sin(\theta) + C_2 \\
 \int f(x)dx + C_1 - C_2 &= \sin(\theta) \\
 \int f(x)dx + C &= \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

Donde: $C = C_1 - C_2$, son constantes cualesquiera. Se recuerda que: $f(x)$ no esta definida en el ejercicio y por lo tanto, sera cualquier tipo de función.

Pero, se tiene:

$$p = \tan(\theta) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} = \frac{\int f(x)dx + C}{\sqrt{1-(\int f(x)dx + C)^2}} = \\
 dy &= \frac{\int f(x)dx + C}{\sqrt{1-(\int f(x)dx + C)^2}} dx =
 \end{aligned}$$

Se integra a ambos lados de la identidad obtenida:

$$y = \int \frac{\int f(x)dx + C}{\sqrt{1-(\int f(x)dx + C)^2}} dx + C_1 =$$

Donde : C, C_1 son constantes cualesquiera.

La expresión obtenida representa el conjunto de curvas que cumple las condiciones del ejercicio.

En el caso de que: $f(x) = \frac{1}{R}$ donde: R es una constante.

$$y = \int \frac{\frac{1}{R}x + C}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{R}x + C\right)^2}} dx + C_1$$

Para integrar la última expresión se realiza un cambio de variable y se deriva:

$$z = \frac{1}{R}x + C \longrightarrow dx = R dz$$

se reemplaza en la integral y se integra:

$$y = \int \frac{\frac{1}{R}x + C}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{R}x + C\right)^2}} dx + C_1 = R \int \frac{z dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -R\sqrt{1 - z^2} + C_1$$

Se obtiene:

$$y - C_1 = -R\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R} + C\right)^2}$$

Se eleva al cuadrado ambos lados:

$$(y - C_1)^2 = R^2 - R^2\left(\frac{x}{R} + C\right)^2 \longrightarrow (y - C_1)^2 = R^2 - \left(\frac{Rx}{R} + RC\right)^2$$

Finalmente se obtiene:

$$(y - C_1)^2 + (x + RC)^2 = R^2$$

Que representa el conjunto de todas las circunferencias de radio R en el plano Oxy . Además, se demostró que, las únicas figuras en un plano con una curvatura constante y diferente de cero son las circunferencias. Si la curvatura:

$$k = f(x) = 0,$$

la ecuación toma la forma:

$$y'' = 0 \longrightarrow y' = C \longrightarrow y = Cx + C_1$$

Donde C, C_1 son constantes cualesquiera.

Por lo tanto, las únicas figuras de curvatura constante e igual a cero, es la función lineal.

2. Que forma toma una cadena uniforme, no-elástica por influencia de su propio peso, si esta sujeta a dos soportes.

El análisis se lo realiza en el plano Oxy, además, el punto más bajo, que la función toma, en el gráfico es el punto A.

La forma que toma la cadena, se la define ,como:

$$y = y(x) \quad (2.78)$$

Se considera un punto cualquiera $P(x, y(x))$. En el arco $\widehat{AP}$ de la cadena actúan tres fuerzas:

1. El peso Q , de la parte $\widehat{AP}$ de la cadena, el cual, se lo puede definir, como el producto de su densidad lineal δ y su longitud de arco s :
2. La fuerza tangencial a la curva en el punto A.
3. La fuerza tangencial N en cualquier punto del arco $\widehat{AP}$, en este caso, punto P

$$Q = \delta \cdot s \quad (2.79)$$

La cadena no tiene movimiento; por lo tanto, la sumatoria de fuerzas en el eje x e y igual a cero:

$$\sum f_x = 0 \rightarrow N_x + (-N_0) = 0 \rightarrow N_x = N_0 \rightarrow N \cos \theta = N_0$$

$$\sum f_y = 0 \rightarrow N_y + (-Q) = 0 \rightarrow N_y = Q \rightarrow N \sin \theta = \delta \cdot s$$

Donde: el ángulo θ es el ángulo de inclinación de la fuerza N con respecto el eje x. En todos los ejercicios de este tipo se encuentra la tangente:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{N \delta \cdot s}{N \cdot N_0} = \frac{\delta \cdot s}{N_0}$$

Por comodidad, se reemplaza:

$$a = \frac{N_0}{\delta}$$

Además, se recuerda que:

$$\tan \theta = y'(x)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$y'(x) = \frac{s}{a} \quad (2.80)$$

el problema en este momento es que, por el lado derecho de esta identidad (2.68), no se tiene algo con diferencial; por lo tanto, se deriva con respecto a x:

$$y'(x) = \frac{s}{a} \longrightarrow y''(x) = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx} \quad (2.81)$$

Se recuerda de cálculo integral, la derivada de longitud de arco de una función es:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} \quad (2.82)$$

Por lo tanto, se obtiene al reemplazar (2.70) en (2.69):

$$y'(x) = \frac{s}{a} \longrightarrow y''(x) = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2} \quad (2.83)$$

La última expresión es una ecuación diferencial de segundo orden, que no tiene el elemento x, se realiza un cambio de variable:

$$y' = p \longrightarrow y''(x) = \frac{dp}{dx} \quad (2.84)$$

Se reemplaza (2.72) en (2.71):

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{a} dx$$

Se integra ambos lados de la identidad obtenida:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \frac{1}{a} dx$$

Se obtiene después de integrar, las dos integrales son básicas:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{1}{a} x + C$$

Se debe obtener el valor de la constante, para lo cual se utiliza el punto A, donde $y'(x) = 0$; ya que, es paralela al eje x; por lo tanto,

$$p(x=0) = y'(x=0) = 0$$

Se obtiene:

$$C = 0$$

Así que:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{1}{a}x$$

Se necesita despejar p:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{1}{a}x \rightarrow p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{a}}$$

$$\sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{a}} - p$$

Se eleva al cuadrado:

$$1 + p^2 = (e^{\frac{x}{a}} - p)^2 \rightarrow 1 + p^2 = e^{\frac{2x}{a}} - 2pe^{\frac{x}{a}} + p^2$$

$$1 = e^{\frac{2x}{a}} - 2pe^{\frac{x}{a}} \rightarrow 2pe^{\frac{x}{a}} = e^{\frac{2x}{a}} - 1$$

$$p = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\frac{2x}{a}} - 1}{e^{\frac{x}{a}}} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{e^{\frac{x}{a}}} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right]$$

Se reemplaza p:

$$y' = p = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right]$$

Se integra a ambos lados:

$$y + C_1 = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right]$$

para encontrar el valor de la constante, se utiliza el punto A(0,a), por lo tanto:

$$y + C_1 = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right] \rightarrow a + C_1 = \frac{a}{2} [1 + 1] \rightarrow C_1 = 0$$

Finalmente, la ecuación de la forma que toma la cadena:

$$y = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right] = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

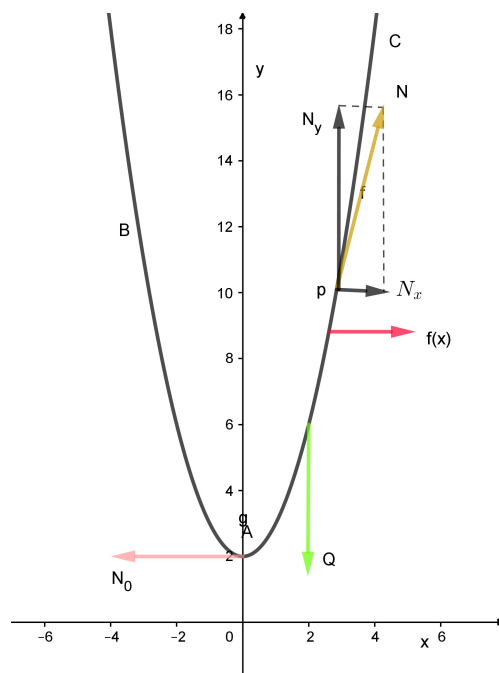


Figura 2.0

4. Un paracaídas desciende desde una altura 'h', sujetando una masa 'm'. Determinar la máxima velocidad con la cual llega a tierra y calcular el tiempo de caída, si la resistencia del aire es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

Se considera que la caída de paracaídas es perpendicular a la superficie.

La resistencia del aire en un momento 't' es :

$$f_a \propto v^2 \longrightarrow f_a = kv^2$$

Donde: k - coeficiente de proporcionalidad, una constante; a v - la velocidad de caída en un tiempo 't'.

La velocidad esta definida por:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Donde: s es el recorrido realizado por el paracaídas en un tiempo 't' dado. En todos estos ejercicios de este tipo o parecidos, se recurre a la segunda ley de Newton:

$$\sum f_i = m \cdot a$$

La cual indica, que la suma de todas las fuerza que actúan en un cuerpo es igual al producto de la masa por su aceleración (en este caso, ya que el cuerpo tiene movimiento). En este momento en el cuerpo actúan dos fuerzas, la de su propio peso (f_p) y la resistencia del aire (f_a); por lo tanto se escribe:

$$\sum f_i = m \cdot a \longrightarrow f_p + f_a = m \cdot a$$

Donde:

$$f_p = m \cdot g \quad \text{aceleración gravitacional}$$

$$f_a = k \cdot v^2 \quad \text{la resistencia del aire tiene signo negativo.}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{La aceleración del cuerpo}$$

Por lo que, se escribe:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

Esta expresión es una ecuación diferencial de segundo orden, que no tiene x , solamente y'' , y .

Se realiza un cambio de variable, que en este caso, se aprovecha de otra forma de representar la aceleración, en función de la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Entonces, se puede escribir:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - k(v)^2 \rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}(v)^2$$

Que representa una ecuación diferencial de primer orden de variables separables. Por comodidad, se realiza un cambio de las constantes:

$$r = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Con lo cual, se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}(r^2 - v^2)$$

En este momento, se puede realizar un análisis de lo escrito:

En este tipo de movimiento, la velocidad tiene que aumentar, es decir:

$$\frac{dv}{dt} > 0$$

Por lo tanto, $r > v$; 'r' puede ser igual pero nunca menor a v , esto permite obtener la velocidad máxima, que un cuerpo va a tener, en una caída libre:

$$v_{\text{limite}} = r = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Por lo tanto, si $t \rightarrow \infty$, entonces $v \rightarrow r$.

Se debe tener en cuenta, lo que se acaba de escribir y ahora se integra ambos lados de la identidad:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}(r^2 - v^2) \rightarrow \frac{dv}{r^2 - v^2} = \frac{k}{m}dt \rightarrow \int \frac{dv}{r^2 - v^2} = \int \frac{k}{m}dt$$

Al realizar la integración, se obtiene (El estudiante debe verificar el resultado):

$$\frac{1}{2r} \ln \left(\frac{r+v}{r-v} \right) = \frac{k}{m}t + C$$

Para obtener , el valor de C: si $t = 0$, $v = 0$; entonces, $C = 0$.

Por comodidad, se considera que:

$$\frac{2rk}{m} = a$$

En ese caso , se tiene:

$$\frac{r+v}{r-v} = e^{at}$$

Se despeja v:

$$v = r \cdot \frac{e^{at} - 1}{e^{at} + 1} \longrightarrow \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{e^{at} - 1}{e^{at} + 1}$$

$$ds = r \cdot \frac{e^{at} - 1}{e^{at} + 1} dt \longrightarrow s = r \int \frac{e^{at} - 1}{e^{at} + 1} dt$$

Se divide el numerador y denominador por $e^{\frac{at}{2}}$:

$$s = r \int \frac{e^{\frac{at}{2}} - e^{-\frac{at}{2}}}{e^{\frac{at}{2}} + e^{-\frac{at}{2}}} dt = r \int \tanh\left(\frac{at}{2}\right) dt$$

$$= \frac{2r}{a} \ln\left(\cosh\left(\frac{at}{2}\right)\right) + C_1$$

Se encuentra el valor de C_1 ; para lo cual, si $t = 0$, $s = 0$ y :

$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$$

Al reemplazar estos valores, se obtiene que: $C_1 = 0$.

Finalmente, reemplazando r y a:

$$s = \frac{m}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)\right)$$

La expresión obtenida nos indica, el recorrido del paracaídas en un tiempo 't'. El tiempo, en el cual, el paracaídas cae de la altura 'h'

$$h = \frac{m}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)\right)$$

Para encontrar el tiempo en función de la altura; es decir, $t = f(h)$, esto se despeja de la expresión obtenida:

$$t = \sqrt{\frac{m}{kg}} \left(e^{\frac{kh}{m}} + \sqrt{e^{\frac{2kh}{m}} - 1} \right)$$

El estudiante debe obtener la última expresión.

5. Un cuerpo de masa ' m ' se encuentra a una distancia ' a ', del centro de la tierra. En el momento $t = 0$, tiene una velocidad v_0 . El cuerpo tiene dirección al centro de la tierra. Que velocidad tiene el cuerpo por influencia de la fuerza de gravedad, si se acerca a la tierra una distancia ' s '.

Si la distancia ' a ' es bastante grande, se debe tomar en consideración la fuerza de atracción en el tiempo de su movimiento. La fuerza de atracción a la distancia ' a ' esta definida por:

$$f_a = k \frac{m_c m_t}{a^2} \rightarrow f_a \cdot a^2 = k m_c m_t$$

La fuerza de atracción a la distancia ' $a - s$ ' esta definida por:

$$f_{a-s} = k \frac{m_c m_t}{(a-s)^2} \rightarrow f_{a-s} \cdot (a-s)^2 = k m_c m_t$$

Donde: m_c - masa del cuerpo; m_t - masa de la tierra; k - una constante.

Esto permite obtener la identidad:

$$f_a a^2 = f_{a-s} \cdot (a-s)^2$$

Una fuerza esta definida por: $f = m \cdot a$, pero en este caso la fuerza sera: $f = m \cdot g$ donde g - aceleración .

$$m \cdot g_a \cdot a^2 = m \cdot g_{a-s} \cdot (a-s)^2$$

$$\frac{g_{a-s}}{g_a} = \frac{a^2}{(a-s)^2}$$

$$g_{a-s} = g_a \frac{a^2}{(a-s)^2}$$

La aceleración a la distancia ' s ' se define como:

$$g_s = \frac{d^2 s}{dt^2} = s''$$

Por lo tanto:

$$s'' = g_a \frac{a^2}{(a-s)^2}$$

Se puede facilitar el calculo, si se recurre a un pequeño truco matemático ; es decir, $(s'^2)' = 2s''ds$. Por lo tanto a ambos lados de la última identidad multiplicamos por $2ds$:

$$(s'^2)' = 2s''ds = 2g_a \frac{a^2}{(a-s)^2} ds$$

Se obtiene:

$$(s'^2)' = 2g_a \frac{a^2}{(a-s)^2} ds$$

Se integra ambos lados de la identidad:

$$\int (s'^2)' = 2 \int g_a \frac{a^2}{(a-s)^2} ds$$

$$(s'^2) = 2 \int g_a \frac{a^2}{(a-s)^2} ds$$

$$(s'^2) = 2g_a a^2 \int \frac{1}{(a-s)^2} ds = 2g_a a^2 \frac{1}{a-s} + C$$

Se conoce que:

$$s' = \frac{ds}{dt} = v$$

Lo cual, permite escribir:

$$v^2 = 2g_a a^2 \frac{1}{a-s} + C$$

Se determina el valor de C, ya que, $t = 0$; $s = 0$ y $v = v_0$

$$v_0^2 = 2g_a a^2 \frac{1}{a} + C \longrightarrow C = v_0^2 - 2g_a a^2 \frac{1}{a}$$

Se reemplaza:

$$v^2 = 2g_a a^2 \frac{1}{a-s} + C \longrightarrow v^2 = 2g_a a^2 \frac{1}{a-s} + v_0^2 - 2g_a a^2 \frac{1}{a}$$

Finalmente:

$$v^2 = v_0^2 + 2g_a a^2 \frac{1}{a-s} - 2g_a a^2 \frac{1}{a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2g_a a^2 \left[\frac{1}{a-s} - \frac{1}{a} \right]$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g_a a^2 \left[\frac{1}{a-s} - \frac{1}{a} \right]}$$

6. Un hombre con su perro están en el parque. El hombre se mueve con velocidad constante y se puede suponer que se mueve (en línea recta) por el eje 'x'. El perro persigue a su dueño, por una curva con velocidad constante, en dirección a su dueño. En el momento $t = 0$, el hombre se encuentra en el punto de origen y

el perro en un punto $P_0(0, y_0)$. Encontrar la función que represente la curva, por la cual, el perro persigue a su dueño hasta encontrarlo.

El ejercicio considera que las velocidades del hombre y del perro son constantes, esa es una facilidad para resolver el ejercicio. En el momento de encontrar la solución, las velocidades pueden ser diferentes y no constantes.

El hombre tiene una velocidad constante:

$$v_h = \frac{\xi}{t} \longrightarrow \xi = v_h t$$

La recta tangencial a la curva de persecución del perro, tiene por ecuación:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Donde : m- pendiente de la recta, también se lo puede escribir:

$m = \frac{dy}{dx}$; el punto (x_0, y_0) es el punto por el que pasa la recta, en este caso es el punto $W(\xi, 0)$

$$y - 0 = \frac{dy}{dx}(x - \xi)$$

$$y = \frac{dy}{dx}(x - \xi)$$

$$y = y'(x - \xi)$$

$$\xi = x - \frac{y}{y'}$$

$$v_h t = x - \frac{y}{y'}$$

Se deriva ambos lados de la última expresión con respecto a 't':

$$v_h = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{y'^2 - yy''}{y'^2} \frac{dx}{dt}$$

Por lo tanto:

$$v_h = \frac{yy''}{y'^2} \frac{dx}{dt}$$

Finalmente:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_h y'^2}{yy''}$$

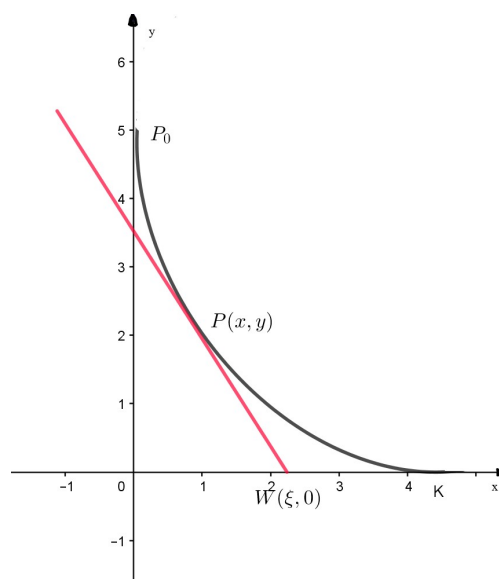


Figura 2.1

Se ha encontrado una expresión que representa el cambio de recorrido en el eje 'x' en función del tiempo.

Ahora, se hace lo mismo, tomando un punto que se mueve por la curva que sigue el perro: La velocidad del punto P en el momento 't' es igual:

$$v_p = \frac{ds}{dt}$$

Es una expresión que represente un cambio de 's' en función del tiempo, pero se requiere el cambio de 'x'; por lo tanto:

$$v_p = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

El primer elemento de esta identidad, representa el cambio sobre la curva, es decir, el cambio de la longitud de arco:

$$v_p = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + y'^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Se requiere encontrar, una relación entre: v_h y v_p , para lo cual, se utiliza:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_h y'^2}{y y''}$$

Y se reemplaza en la identidad:

$$v_p = \sqrt{1 + y'^2} \cdot \frac{v_h y'^2}{y y''}$$

Por comodidad, se reemplaza:

$$\lambda = \frac{v_p}{v_h}$$

$$v_p = \sqrt{1 + y'^2} \cdot \frac{v_h y'^2}{y y''} \longrightarrow \frac{v_p}{v_h} = \sqrt{1 + y'^2} \cdot \frac{y'^2}{y y''}$$

$$\lambda = \sqrt{1 + y'^2} \cdot \frac{y'^2}{y y''}$$

Se despeja la segunda diferencial:

$$y'' = \frac{1}{\lambda} \frac{y'^2}{y} \sqrt{1 + y'^2}$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial de segundo orden y en su estructura no hay 'x', se realiza un cambio de variable:

$$\frac{dy}{dx} = y' = p \longrightarrow y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

Se reemplaza:

$$\frac{dp}{dy}p = \frac{1}{\lambda} \frac{p^2}{y} \sqrt{1+p^2}$$

Es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables:

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{y}$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\lambda} \ln(y)$$

Se integral el lado izquierdo, para lo cual se realiza un cambio de variable:

$$\frac{1}{p} = q \longrightarrow \frac{1}{q} = p \longrightarrow \frac{dq}{q^2} = -dp$$

Se reemplaza en la integral, se integra y se obtiene:

$$\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} = \frac{1}{\lambda} \ln(y) + \ln(C)$$

$$\ln(q + \sqrt{1+q^2}) = \ln C(y)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$q + \sqrt{1+q^2} = C(y)^{\frac{1}{\lambda}}$$

Para encontrar el valor de C: $t=0$; $y = y_0$ en este momento la tangente es perpendicular el eje 'x':

$$q = \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = 0$$

Por lo tanto:

$$0 + \sqrt{1+0} = C \sqrt[{\lambda}]{y_0} \longrightarrow C = \frac{1}{\sqrt[{\lambda}]{y_0}}$$

Se reemplaza el valor de la constante:

$$q + \sqrt{1+q^2} = \frac{1}{\sqrt[{\lambda}]{y_0}} (y)^{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt[{\lambda}]{\frac{y}{y_0}}$$

Se despeja q:

$$q = \frac{1}{2} \left[\sqrt[\lambda]{\frac{y}{y_0}} - \sqrt[\lambda]{\frac{y_0}{y}} \right]$$

Se reemplaza q:

$$dx = \frac{1}{2} \left[\sqrt[\lambda]{\frac{y}{y_0}} - \sqrt[\lambda]{\frac{y_0}{y}} \right] dy$$

Se integra y se obtiene:

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt[\lambda]{y_0}} \frac{y^{\frac{1}{\lambda}+1}}{\frac{1}{\lambda}+1} - \sqrt[\lambda]{y_0} \frac{y^{1-\frac{1}{\lambda}}}{1-\frac{1}{\lambda}} \right] + C_1$$

$$x = \frac{\lambda}{2} y \left[\frac{1}{\lambda+1} \sqrt[\lambda]{\frac{y}{y_0}} - \frac{1}{\lambda-1} \sqrt[\lambda]{\frac{y_0}{y}} \right] + C_1$$

Se encuentra el valor de C_1 , si $x = 0$ e $y = y_0$:

$$0 = \frac{\lambda}{2} y_0 \left[\frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda-1} \right] + C_1$$

$$C_1 = \frac{y_0 \lambda}{\lambda^2 - 1}$$

Finalmente:

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt[\lambda]{y_0}} \frac{y^{\frac{1}{\lambda}+1}}{\frac{1}{\lambda}+1} - \sqrt[\lambda]{y_0} \frac{y^{1-\frac{1}{\lambda}}}{1-\frac{1}{\lambda}} \right] + \frac{y_0 \lambda}{\lambda^2 - 1}$$

El punto K, es punto en el cual, la curva corta al eje 'x'. es el punto de encuentro, x_K se obtiene cuando $y = 0$:

$$x_K = \frac{y_0 \lambda}{\lambda^2 - 1}$$

El tiempo que persigue el perro al dueño:

$$t_K = \frac{x_K}{v_h} = \frac{y_0 \lambda}{(\lambda^2 - 1) v_h}$$

El perro en este tiempo recorre la distancia:

$$s = v_p t_K = \frac{v_p}{v_h} \cdot \frac{y_0 \lambda}{(\lambda^2 - 1)} = \frac{y_0 \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)}$$

Este ejercicio se lo conoce como la curva de persecución.

7. Obtener las ecuaciones diferenciales que permiten realizar un análisis de un circuito eléctrico, que conste de los 3 elementos: Resistencias (R), inducciones (L) Condensadores (C) y por esto, que se les conoce como circuitos RLC:

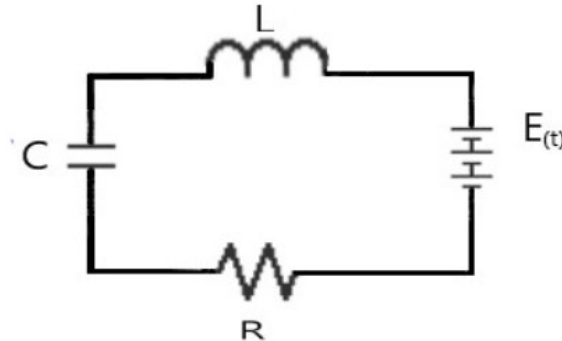


Figura 2.2

Este circuito RLC, es un elemento tecnológico bien cercano a la realidad, existe muchas aplicaciones de este circuito en la ingeniería y de ahí su necesidad de analizarlo. Por lo tanto, se requiere una ecuación diferencial para definir sus cambios con respecto al tiempo de cada una de las variables:es decir:

- 1) Se requiere una ecuación para el cambio de voltaje.
- 2) Se requiere una ecuación para el cambio de corriente eléctrica.
- 3) Se requiere una ecuación para el cambio de carga del circuito.

En cualquiera de los casos, se inicia aplicando la segunda ley de Kirchof , que indica:

La sumatoria de los voltajes de cada uno de los elementos, que forma el circuito eléctrico es igual al voltaje del circuito eléctrico, en la figura 2.2 es $E(t)$.

$$E(t) = \overbrace{L \frac{di}{dt}}^{\text{Voltaje de la bobina}} + \underbrace{iR}_{\text{Voltaje de la resistencia}} + \overbrace{\frac{q}{C}}^{\text{Voltaje para el condensador}}$$

En forma reducida:

$$E(t) = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C}$$

esta expresión **NO** se la puede tratar como una ecuación diferencial de primer orden, ya que existe una relación ente q e i , que

es:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La expresión se deriva con respecto al tiempo:

$$E'(t) = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}$$

$$E'(t) = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que son: R, L, y C, que permite analizar los cambios de i con respecto al tiempo de un circuito eléctrico.

En algunos libros realizan la substitución:

$$S = \frac{1}{C}$$

Se obtendría:

$$E'(t) = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + Si$$

Si se desea realizar un análisis con respecto q:

$$E(t) = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C}$$

Se reemplaza:

$$i = \frac{dq}{dt} \longrightarrow di = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

Se obtendría:

$$E(t) = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$E(t) = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + Sq$$

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Para definir una relación entre el voltaje y el tiempo, se utiliza la relación y sus derivadas entre q y V:

$$q = CV \longrightarrow \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt} \longrightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} = C \frac{d^2 V}{dt^2}$$

Se reemplaza en la identidad:

$$E(t) = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$E(t) = LC \frac{d^2 V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V$$

Lo obtenido es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, que permite realizar un análisis del cambio de voltaje en un circuito eléctrico con respecto al tiempo.

2.7.1. Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.

- 1) Un punto de masa 'm' es lanzado perpendicularmente hacia arriba. Obtener una relación matemática que represente el recorrido del punto en función del tiempo 't'. Si se conoce que: $S(t = 0) = S_0$ y $V(t = 0) = V_0$. No tome en cuenta la resistencia del aire y la *aceleración* g es constante e igual a $10 \frac{cm}{s^2}$
- 2) Un punto de masa 'm' es lanzado perpendicularmente hacia arriba. Obtener una relación matemática que represente el recorrido 'S' del punto en función del tiempo 't'. Si se conoce que: $S(t = 0) = 0$ y $V(t = 0) = 1 \frac{m}{s}$. En que tiempo alcanza su máxima altura. No tome en cuenta la resistencia del aire y la *aceleración* g es constante e igual a $10 \frac{cm}{s^2}$
- 3) Un cuerpo de masa 'm' se encuentra, cuando $t = 0$, a una distancia S_0 del centro de la tierra y tiene una velocidad V_0 con dirección al centro de la tierra. Determinar la velocidad del cuerpo por influencia de la fuerza de gravedad, cuando se acercado una distancia 'S' a la tierra. Considere, que la *aceleración* gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la tierra.
- 4) Una biga uniforme de longitud 'a' sujeta ambos a lados se dobla por su propio peso. Encontrar la ecuación de su doblamiento.
- 5) Un cuerpo de masa 'm' cae de una altura 'h'. Determinar el recorrido 'S' del cuerpo en función del tiempo y encontrar el tiempo, en el cual, el cuerpo recorre la altura 'h'. Considere que la resistencia del aire es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.
- 6) Analice el movimiento de un punto de masa 'm' que vibra por la influencia de la fuerza proporcional a su recorrido (-

lx) y tiene una resistencia $\left(-k \frac{dx}{dt}\right)$, si se conoce que : $x(0) = S_0$ y $x'(0) = V_0$, además:

$$1. m = 0.01 \text{ gr}, l = 6 \text{ cm}, k = 0.2, S_0 = 5 \text{ cm}, V_0 = -50 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$2. m = 0.01 \text{ gr}, l = 6 \text{ cm}, k = 1.2, S_0 = 2 \text{ cm}, V_0 = -12 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$3. m = 0.01 \text{ gr}, l = 6 \text{ cm}, k = \sqrt{0.24}, S_0 = 5 \text{ cm}, V_0 = -24 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

- 7) Una biga uniforme de longitud 'a' sujeta en uno de sus lados ($x = 0$), en el eje 'x', en el otro extremo ($x = a$) se dobla por su propio peso, tal que :

$$y'' = A(x - a)$$

Encontrar la ecuación de su doblamiento.

- 8) En cierto movimiento la relación de su aceleración con respecto a su recorrido es una constante igual (a - 9). Encontrar la ecuación del movimiento.
- 9) En cierto movimiento la relación de su aceleración con respecto a su velocidad es una constante igual a -3. Encontrar la ecuación del movimiento.
- 10) En cierto movimiento la relación de su aceleración $\frac{d^2x}{dt^2}$ es proporcional a su velocidad $\frac{dx}{dt}$ Encontrar la ecuación del movimiento si $k = 2$.
- 11) Encuentre la intensidad de corriente en función del tiempo $i = f(t)$ para el circuito eléctrico RLC, si para $t = 0$, la fuente f.e.m esta definida como: $u = U \sin(\omega t)$
- 12) Encuentre la ecuación lineal $x = f(t)$, si se conoce, que su recorrido es proporcional su aceleración $\frac{d^2x}{dt^2}$ y tiene dirección contraria al movimiento.
- 13) Encuentre la intensidad de corriente en función del tiempo $i = f(t)$ para el circuito eléctrico RLC, si para $t = 0$, fuente esta definida como: $u = U \cos(\omega t)$
- 14) Una cadena homogénea esta colgando en un clavo liso de tal modo que, por un lado cuelga 8 m de la cadena y por el otro 10 m de largo? Cuanto tiempo tardara la cadena en caer, deslizándose alrededor del clavo?

- 15) Una carga de masa de 4 Kg esta colgada de u resorte y lo alarga en 1 cm. Hállese la ley de movimiento de la caga, si el extremo superior del resorte realiza una oscilación armónica vertical $y = 2\sin(30t)$ (cm) y en el momento inicial la carga esta en reposo. (Se desprecia la resistencia del medio ambiente).
- 16) Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si el punto medio del segmento de su normal desde un punto cualquiera de la curva hasta el eje Ox, esta situado en la parábola $2y^2 = x$.
- 17) Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (3,1), si la longitud del segmento que se corta , por cualquier tangente suya sobre el eje de coordenadas, es igual a su subnormal.
- 18) Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,2) si el producto de la abscisa del punto de tangencia por la abscisa del punto de intersección, de la normal con el eje Ox, es igual al cuadrado duplicado de la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de tangencia.
- 19) Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(\sqrt{2}, 0)$, si la suma de las longitudes de su tangente y subtangente es igual al producto de coordenadas del punto de tangencia.
- 20)

Capítulo 3

Sistema de Ecuaciones Lineales Diferenciales Ordinarias

1. Características Básicas de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
2. Resolver un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con el Método de Transformar el Sistema una Sola Ecuación Diferencial.
3. Resolver un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con el Método de las Primeras Integrales.
4. Resolver un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes.

Si el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales (3.1), es decir, la funciones $f_i = (x, y_1, y_2, y_3, y_4, \dots y_n)$, para $i = (1, 2, 3 \dots n)$ son continuas en cierta cercanía V del punto $P(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}, y_4^{(0)}, \dots y_n^{(0)})$ y cumplen en esta cercanía las condiciones de Lipschitz con respecto a las variables $y_1, y_2, y_3, y_4 \dots y_n$ en ese caso, existe, en la cercanía del punto x_0 , una sola respuesta al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (3.1).

La solución al sistema de ecuaciones diferenciales tiene la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) \\ \dots = \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Donde las constantes $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, son constantes libres. A esta solución del sistema de ecuaciones (3.1), se la llama integral general del sistema de ecuaciones, también conocida como solución explícita (3.3). En el momento en el cual, no se pueda resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de la manera explícita, se obtendrá lo que se conoce como la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma implícita (3.4).

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = C_1 \\ \theta_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = C_2 \\ = ... \\ \theta_n(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = C_n \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Si cualquiera de las funciones $\theta(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ no es una identidad de la constante, pero toma un valor constante, cuando $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, se reemplaza en cualquiera de las soluciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), \dots, y_n(x)$ del sistema de ecuaciones diferenciales. La identidad:

$$\theta(y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), \dots, y_n(x)) = C \quad (3.5)$$

Se la llama la integral primera del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (3.1).

La solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, significa, obtener la integral general de este sistema, que esta

en la forma de un sistema de ' n ' integrales primeras. Si el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales cumple con el teorema de existencia de una solución, el sistema tiene ' n ' integrales primeras independientes. Si se logra de cualquier forma encontrar las ' n ' integrales primeras del sistema de ecuaciones diferenciales, lo que significa resolver el sistema con respecto a $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n$ estas serán las soluciones generales (integral general) del sistema de ecuaciones diferenciales (3.1). La condición suficiente y necesaria para que la ecuación:

$$\theta(x, y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n) = C \quad (3.6)$$

Sea presentada como la integral primera, es que exista la identidad siguiente y se cumpla:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \frac{\partial \theta}{\partial y_1} + \dots + f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \frac{\partial \theta}{\partial y_n} = 0 \quad (3.7)$$

Si se conoce una integral primera del sistema dado, el número de ecuaciones se reduce en una ecuación. Por lo tanto, es suficiente una integral primera despejar una ecuación y reemplazarla en las otras (n - 1) ecuaciones.

3.2. Método de Transformar el Sistema de Ecuaciones Diferenciales a una Sola Ecuación Diferencial

Este método consiste en que, se despega una de las variables de la función (lado derecho de las ecuaciones del sistema (3.1)) y se reemplaza en las otras ecuaciones del sistema de ecuaciones diferenciales. Como se puede entender es un método ya conocido por los estudiantes, conocido con el nombre método de sustitución, que es un método tradicional. Este procedimiento se lo puede representar:

$$F(x, y_n, y_n', y_n'', y_n''', \dots, y_n^{(n)}) = 0 \quad (3.8)$$

El siguiente paso es encontrar la integral general de la ecuación diferencial, la cual, consta de ' n ' constantes libres. Con las demás incógnitas $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), \dots, y_{n-1}(x)$ se despeja, se reemplaza, se simplifica, se integra si es posible. Los pasos del método se repite las veces que sea necesario.

3.3. Características Básicas de los Sistemas de Dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se llama al sistema de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \quad (3.9)$$

De las funciones $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son funciones continuas en cierto dominio de tres variables $\mathbf{V}$.

La solución al sistema de ecuaciones (3.9), se llama al conjunto de dos funciones:

$$y = y(x), \quad z = z(x) \quad (3.10)$$

Estas funciones son definidas en cierto intervalo (a, b) , donde se encuentra el sistema diferencial(3.9). Toda línea en el espacio cartesiano de tres ejes, que corresponde a la solución (3.10), se le denomina la curva integral del sistema (3.9). La solución al sistema de ecuaciones diferenciales (3.9) en el intervalo (a, b) , significa encontrar todas las funciones y' y z' que son la solución al sistema de ecuaciones diferenciales(3.9) en el intervalo dado. Estas funciones, si existen dependen de dos constantes cualesquiera C_1 y C_2 . Por lo tanto, se puede escribir:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \quad z = \psi(x, C_1, C_2) \quad (3.11)$$

Si se considera, que la condición , para cierto valor $x_0 \in (a, b)$ de la variable independiente (3.11) tome un valor dado y_0, z_0 el problema de encontrar la solución al sistema de ecuaciones diferenciales, se lo denomina el valor inicial para el sistema (3.9). La solución general del sistema diferencial(3.9) , se lo denomina a la solución (3.11) del sistema, que para todo valor de x_0 del intervalo $a < x < b$ es la solución del valor inicial; es decir, si la ecuación :

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \quad z_0 = \psi(x_0, C_1, C_2) \quad (3.12)$$

Son la solución con respecto C_1, C_2 en forma clara, por el punto (x_0, y_0, z_0) pasa exactamente una curva de la familia de dos parámetros (3.11) Si expresamos la solución general en forma de dos ecuaciones independientes que aparecen por la solución del sistema (3.11) con relación a C_1 y C_2 se obtiene dos ecuaciones en la forma:

$$\phi(x, y, z) = C_1 \quad \psi(x, y, z) = C_2 \quad (3.13)$$

Cada una de estas soluciones, se les denomina la primera integral del sistema de ecuaciones diferenciales (3.1).

3.4. Ejercicios Resueltos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Transformados a una Ecuación Diferencial

1. Encuentre la integral general del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + 2y + z \\ \frac{dz}{dx} = -1 - 2x - 3y - 2z \end{cases}$$

De la primera ecuación del sistema despejo la variable z y se deriva con respecto la variable x :

$$z = \frac{dy}{dx} - x - 2y \longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} - 1 - 2\frac{dy}{dx}$$

Se reemplaza en la segunda ecuación del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = -1 - 2x - 3y - 2\frac{dy}{dx} + 2x + 4y$$

Al simplificar queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

La ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes homogénea y ya se conoce el método de resolver, este tipo de ecuaciones diferenciales. Su solución es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \longrightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

El valor obtenido de y se reemplaza en la ecuación:

$$z = \frac{dy}{dx} - x - 2y \longrightarrow z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - x - 2C_1 e^x - 2C_2 e^{-x}$$

Al simplificar queda:

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - x - 2C_1 e^x - 2C_2 e^{-x}$$

La solución final es:

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = -x - C_1 e^x - 3C_2 e^{-x} \end{cases}$$

2. Encontrar la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases}$$

Después de observar el sistema, se concluye que la operación derivar nos ayuda a resolver el sistema, se deriva la primera ecuación y se reemplaza en la segunda: .

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \mapsto \frac{d^2x}{dt^2} = z$$

La ultima ecuación se vuelve a derivar, se obtiene: .

$$\frac{d^2x}{dt^2} = z \longrightarrow \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dz}{dt}$$

Al reemplazar se obtiene una ecuación diferencial de tercer orden con coeficientes constantes:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dz}{dt} \longrightarrow \frac{d^3x}{dt^3} - \frac{dz}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{d^3x}{dt^3} - x = 0$$

El método para resolver la ecuación obtenida es conocido, solo se escribe la respuesta: .

$$x = C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left[C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

La variable y se la obtiene al derivar la ecuación obtenida para x, se obtiene:

$$\begin{aligned} y = C_1 e^t - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \left[C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + \\ + e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \end{aligned}$$

La variable z se la obtiene al derivar, simplificar y asociar, se obtiene:

$$z = C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} C_2 - \frac{1}{2} C_3 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \left(\frac{1}{2} C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 \right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

3. Encontrar la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z + 2y \\ \frac{dz}{dx} = y + \sin x \end{cases}$$

De la primera ecuación se despeja z y se deriva con respecto a ' x ':

$$z = \frac{dy}{dx} - 2y \quad \longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx}$$

Se reemplaza en la segunda ecuación del sistema, se obtiene: .

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = y + \sin x \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - y = \sin x$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes. El método para resolver este tipo de ecuaciones ya se conoce. La solución a su parte homogénea es: .

$$y^h = C_1 e^{(1-\sqrt{2}x)} + C_2 e^{(1+\sqrt{2}x)}$$

Se aplica el método de la adivinanza, lo que permite encontrar la solución a su parte no-homogénea: .

$$y^{\sim h} = -\frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

La solución de y es: .

$$y = y^h + y^{\sim h} = C_1 e^{(1-\sqrt{2}x)} + C_2 e^{(1+\sqrt{2}x)} + \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \sin x$$

Con este valor es fácil obtener el valor de z : .

$$z = \frac{dy}{dx} - 2y =$$

$$= C_1 (\sqrt{2} - 1) e^{(1-\sqrt{2})x} - C_2 (\sqrt{2} + 1) e^{(1-\sqrt{2})x} + \frac{1}{4} (\sin x - 3 \cos x)$$

4. Encontrar la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-z} \end{cases}$$

Por facilidad de resolver el ejercicio se escribe $\frac{dz}{dx} = z'$ así mismo, se lo hace para $\frac{dy}{dx}$. De la segunda ecuación se despeja y' y se deriva:

$$y - x = \frac{1}{z'} \quad \longrightarrow \quad y' - 1 = -\frac{z''}{z'^2}$$

De la primera, se escribe:

$$y' - 1 = -\frac{1}{z}$$

Se iguala las dos ultimas ecuaciones:

$$-\frac{1}{z} = -\frac{z''}{z'^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{z''}{z'^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{z'}{z} = \frac{z''}{z'}$$

Ahora se integra:

$$\ln z' = \ln z + \ln C_1 \quad \longrightarrow \quad z' = zC_1$$

Se integra por segunda vez:

$$z' = zC_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{z'}{z} = C_1 \quad \longrightarrow \quad \ln z = C_1 x + \ln C_2$$

Lo integrado se puede escribir:

$$\ln z = C_1 x + \ln C_2 \quad \longrightarrow \quad z = C_2 e^{C_1 x}$$

Se reemplaza en la ecuación:

$$y - x = \frac{1}{z'} \quad \longrightarrow \quad y = x + \frac{1}{C_1} C_2 e^{C_1 x}$$

Las siguientes relaciones son las integrales generales:

$$z = C_2 e^{C_1 x} \quad \longrightarrow \quad y = x + \frac{1}{C_1 C_2 e^{C_1 x}}$$

5. Encontrar la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$$

Las condiciones iniciales: $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$

De la primera ecuación se resta la segunda: .

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -2(x-y) \quad \longrightarrow \quad (x-y)' = -2(x-y)$$

La ultima ecuación , se integra: .

$$\frac{(x-y)'}{x-y} = -2$$

$$(x-y)' = -2(x-y) \quad \longrightarrow \quad \frac{(x-y)'}{x-y} = -2$$

Se integra la ultima ecuación: .

$$\frac{(x-y)'}{x-y} = -2 \ln(x-y) = -2t + \ln C_1$$

Se obtiene: .

$$\ln(x-y) = -2t + \ln C_1 \quad \longrightarrow \quad x-y = C_1 e^{-2t}$$

Ahora se suma las dos ecuaciones del sistema:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2z$$

Se utiliza la tercera ecuación del sistema derivando con respecto x:

$$\frac{dz}{dt} = x + y + z \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$$

En base a lo escrito , se puede obtener la ecuación:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 2z + \frac{dz}{dt}$$

Finalmente, se tiene:

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} - 2z = 0$$

Es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes. El método para resolver este tipo de ecuación diferencial es conocido; por lo tanto, se escribe su solución:

$$z = C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}$$

Ya se tiene el valor de z, una de las variables, ahora toca ver en cual de las ecuaciones diferenciales del sistema, se puede hacer algo para obtener

el valor de las otras variables. En este caso, resulta que en la ecuación tercera del sistema, se puede reemplazar su derivada y su función de z :

$$-C_2 e^{-t} + 2C_3 e^{-2t} = x + y + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t}$$

Se simplifica y se obtiene:

$$-2C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t} = x + y$$

Se tiene dos ecuaciones diferenciales formamos un sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t} \\ x - y = C_1 e^{-2t} \end{cases}$$

De donde, fácilmente se obtiene los valores de x e y :

$$x = \frac{1}{2}C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}C_3 e^{-2t} \quad y = -\frac{1}{2}C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}C_3 e^{-2t}$$

La solución general al sistema de ecuaciones diferenciales seria:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}C_3 e^{-2t} \\ y = -\frac{1}{2}C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}C_3 e^{-2t} \\ z = C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \end{cases}$$

Para encontrar la solución específica del sistema de ecuaciones diferenciales reemplazamos en estas ecuaciones el valor de $t = 0$:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}C_1 - C_2 + \frac{1}{2}C_3 \\ 0 = -\frac{1}{2}C_1 - C_2 + \frac{1}{2}C_3 \\ 0 = C_2 + C_3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema por cualquiera de los métodos conocidos, se obtiene: $C_1 = 1$, $C_2 = -\frac{1}{3}$, $C_3 = \frac{1}{3}$. Al reemplazar los valores de las constantes en la solución general, se obtiene la solución específica del sistema de

ecuaciones diferenciales que cumple con las condiciones iniciales.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ y = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-2t} \\ z = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{cases}$$

3.4.1. Ejercicios Propuestos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Transformados a una Ecuación

1. Encuentre las integrales generales de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$a) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = x + y + z \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 5z \\ \frac{dz}{dx} = y - 3z \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 3z \\ \frac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - z \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{x^2}y - \ln x \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 2z \\ \frac{3dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = y + 9z \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = -y + 3z + \sin x \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = y + e^x + e^{-x} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = -y \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2z - 3y + e^x \\ \frac{dz}{dx} = y - 6z + e^{-2x} \end{cases}$$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales encontrando sus integrales generales:

$$\begin{array}{ll}
 a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3 - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2t \end{array} \right. & a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y \end{array} \right. \\
 b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{array} \right. & b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = -y \end{array} \right. \\
 c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -3x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{array} \right. & c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{array} \right. \\
 d) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{array} \right. & d) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 2z - 3y + e^x \\ \frac{dz}{dx} = y - 6z + e^{-2x} \end{array} \right. \\
 e) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{array} \right. & e) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x \end{array} \right. \\
 f) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -7x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5y - 2x \end{array} \right. & f) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 8y \\ \frac{dy}{dt} = -z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{array} \right. \\
 g) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = -5y - 5z \end{array} \right. &
 \end{array}$$

3. Resolver los sistemas de ecuaciones con las condiciones iniciales:

$$a) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y + z - 36x \\ \frac{dy}{dt} = -2x + z - 2e^x \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = 0, \quad z(0) = 1$$

$$b) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y - 4z + 2x \\ \frac{dz}{dx} = x + y + z \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = 0, \quad z(0) = 0$$

$$c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y - z \\ \frac{dy}{dt} = y - z \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

$$d) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

$$e) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = -3y - x \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = 6, \quad z(0) = -2$$

$$f) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5y - 2x \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

$$g) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = -5y - 5z \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = x(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

$$b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = x(0) = z(0) = 1$$

$$c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = x(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

$$d) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + t \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2t \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = x(0) = t(0) = 1$$

$$e) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = x(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

$$f) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y \\ \frac{dy}{dt} = -z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases} \quad \text{Condición: } y(0) = z(0) = 0, \quad x(0) = 1$$

3.5.1. Ejercicios Resueltos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Método de la Primera Integral

1. Encontrar la integral general de el sistema de ecuaciones diferenciales por el método de la primera integral:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2} \end{cases} \quad (3.17)$$

Para aplicar el método de la primera integral al sistema de ecuaciones diferenciales, se lo debe transformar a su forma simétrica, en este proceso se trata de encontrar algo en común, como es en este caso:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

Con el objetivo de encontrar la primera integral, se toma una parte de la ecuación de la forma simétrica:

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \longrightarrow y \cdot dy = z \cdot dz$$

$$\int y dy = \int z dz \longrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \frac{C_1}{2}$$

Se obtiene:

$$y^2 - z^2 = C_1 \longrightarrow \text{La primera integral}$$

Aplicando una de las propiedades de proporciones se puede obtener la identidad:

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \longrightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{z}{y} \longrightarrow \frac{dy - dz}{dz} = \frac{z - y}{y} \longrightarrow \frac{dy - dz}{z - y} = \frac{dz}{y}$$

De la forma simétrica, se obtiene:

$$\frac{dy - dz}{z - y} = \frac{dz}{y} \longrightarrow \frac{dy - dz}{z - y} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z - y)^2}$$

Al simplificar y aplicar la propiedad de cálculo integral, se obtiene:

$$\frac{dy - dz}{z - y} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z - y)^2} \longrightarrow d(y - z) = \frac{dx}{(z - y)}$$

Al aplicar la propiedad de los paréntesis, se obtiene:

$$d(y-z) = \frac{dx}{(z-y)} \longrightarrow -(y-z)d(y-z) = dx$$

Se integra y se obtiene finalmente:

$$(y-z)d(y-z) = -dx \longrightarrow \int (y-z)d(y-z) = - \int dx$$

$$\int (y-z)d(y-z) = - \int dx \longrightarrow \frac{(y-z)^2}{2} = -x + \frac{C_2}{2}$$

Por lo tanto, la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales (3.17) tiene la forma:

$$\begin{cases} \frac{(y-z)^2}{2} + 2x = C_2 \\ y^2 - z^2 = C_1 \end{cases}$$

2. Por el método de las primeras integrales encontrar la integral general del sistema de ecuaciones: Para aplicar el método de la primera integral al sistema de ecuaciones diferenciales se lo debe transformar a su forma simétrica, en este ejercicio ya se presenta el sistema en su forma simétrica:

$$\frac{dx}{(y-z)} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \quad (3.18)$$

El ejercicio permite obtener una conclusión; la suma de los denominadores es igual a cero; por lo tanto, la suma de sus numeradores también tiene que ser igual a cero; es decir:

$$dx + dy + dz = 0$$

Se puede integrar:

$$x + y + z = C_1 \quad \text{Es la primera integral} \quad (3.19)$$

Para encontrar la segunda primera integral multiplicamos al primer quebrado por x al segundo por y y al tercero por z : por lo tanto:

$$\frac{xdx}{x(y-z)} = \frac{ydy}{y(z-x)} = \frac{zdz}{z(x-y)}$$

En esta forma, se logro que todos los denominadores al sumarles sean igual a cero, lo que , permite escribir:

$$xdx+yd y+zd z=0 \rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=C_2 \quad \text{La segunda primera integral} \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales (3.18) tiene la forma:

$$\begin{cases} x+y+z=C_1 \\ x^2+y^2+z^2=C_2 \end{cases}$$

3. Encontrar la integral general de el sistema de ecuaciones diferenciales por el método de la primera integral:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{z}{x-y} \quad (3.21)$$

Para aplicar el método de la primera integral al sistema de ecuaciones diferenciales se lo debe transforma a su forma simétrica , en este proceso, se trata de encontrar algo en común y fácilmente se lo puede observar como es en este caso:

$$\frac{dx}{x-y}=\frac{dy}{x+y}=\frac{dz}{z}$$

Entre las operaciones que mas se utilizan en la resolución de este tipo de ejercicios en este método es: al primer quebrado multiplicar por ' x ' y al segundo por ' y ':

$$\frac{xdx}{x(x-y)}=\frac{ydy}{y(x+y)}=\frac{dz}{z} \rightarrow \frac{xdx}{x^2-xy}=\frac{ydy}{yx+y^2}=\frac{dz}{z}$$

Ahora es propicio aplicar propiedades de proporciones:

$$\frac{xdx}{x^2-xy}=\frac{ydy}{yx+y^2}=\frac{dz}{z} \rightarrow \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{z}$$

Se observa , lo que se tiene en el denominador, la derivada de esta expresión es $(2x+2y\frac{dy}{dx})dx$ Ya con esto, se trata de que aparezca en el numerador la derivada del denominador; se saca factor común en el numerador:

$$\frac{dx\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)}{x^2+y^2}=\frac{dz}{z}$$

Lo que falta ahora, es multiplicar por 2 y dividir por 2:

$$\frac{1}{2} \frac{dx \left(2x + 2y \frac{dy}{dx} \right)}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z}$$

Al integrar, se obtiene:

$$\ln C_1 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln z$$

Por lo tanto:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_1 \quad \text{Es la primera integral.}$$

Para encontrar la segunda primera integral, se pone atención en la primera ecuación del sistema, el cual, esta en función de una sola $y(x)$, por el método conocido se puede integrar, ya que es una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$; por lo tanto, su solución tendría la forma:

$$\ln(\sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}) = C_2 \quad (3.22)$$

4. Encontrar la integral general de el sistema de ecuaciones diferenciales por el método de la primera integral:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x - y}$$

Para aplicar el método de la primera integral al sistema de ecuaciones diferenciales se toma en cuenta la primera parte del ejercicio:

$$\frac{dx}{zx} = \frac{dy}{yz}$$

Después de simplificar se integra:

$$\frac{dx}{zx} = \frac{dy}{yz} \rightarrow \ln y = \ln x + \ln C_1$$

Finalmente:

$$\ln y = \ln x + \ln C_1 \rightarrow \frac{y}{x} = C_1 \quad \text{Es la primera integral}$$

De la proporción inicial del ejercicio, se puede obtener:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)} \rightarrow \frac{(x^2 + y^2)}{x} dx = -z dz$$

Se reemplaza el valor de y' y z' :

$$\frac{(x^2 + y^2)}{x} dx = -z dz \rightarrow \frac{(x^2 + x^2 C_1^2)}{x} dx = -z dz$$

La expresión algebraica tiene un factor común, al aplicar distributiva y simplificar, se tiene:

$$\frac{(x^2 + x^2 C_1^2)}{x} dx = -z dz \rightarrow x(1 + C_1^2) = -z dz$$

Al integrar se tiene:

$$\int x(1 + C_1^2) dx = \int -z dz \rightarrow \frac{x^2}{2}(1 + C_1^2) = -\frac{z^2}{2} + \frac{C_2}{2}$$

Finalmente, se escribe:

$$\frac{x^2}{2}(1 + C_1^2) = -\frac{z^2}{2} + \frac{C_2}{2} \rightarrow x^2(1 + C_1^2) + z^2 = C_2$$

La expresión obtenida no es una primera integral ya que contiene C_1 , al reemplazar $\frac{y}{x}$, se tiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{Es la segunda primera integral}$$

La primera integral y la segunda primera integral son la solución al sistema de ecuaciones diferenciales.

5. Encontrar la integral general de el sistema de ecuaciones diferenciales por el método de la primera integral:

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)},$$

Se observa que la suma de los denominadores es igual a cero; por lo tanto, la suma de todos los numeradores tiene que ser es igual a cero:

$$dx + dy + dz = 0 \rightarrow x + y + z = C_1 \quad \text{Es la primera integral}$$

Para encontrar la segunda primera integral dividimos y multiplicamos a la primera fracción por x , a la segunda por y , y a la tercera por z , se obtiene:

$$\frac{\frac{dx}{x}}{(y-z)} = \frac{\frac{dy}{y}}{(z-x)} = \frac{\frac{dz}{z}}{(x-y)},$$

Se observa que la suma de los denominadores es igual a cero; por lo tanto, la suma de los numeradores tiene que ser igual a cero:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

Se integra:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0 \rightarrow \ln x + \ln y + \ln z = \ln C_2$$

Se aplica propiedades de una función logarítmica:

$$\ln x + \ln y + \ln z = \ln C_2 \rightarrow xyz = C_2 \quad \text{Es la segunda primera integral.}$$

3.5.2. Ejercicios Propuestos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Método de la Primera Integral

1. Encuentre la integral general por el método de la primera derivada de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

$$a) \frac{dx}{xz-y} = \frac{dy}{yz-x} = \frac{dz}{1-z^2}$$

$$b) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$c) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}$$

$$d) \frac{dx}{x^2(y^3-z^3)} = \frac{dy}{y^2(z^3-x^3)} = \frac{dz}{z^2(x^3-y^3)}$$

$$e) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{1}$$

$$f) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{yz^2}$$

$$g) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{1}$$

$$h) \frac{dx}{x(y^2+z)} = \frac{dy}{-y(x^2+z)} = \frac{dz}{z(x^2-y^2)}$$

$$i) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$$

$$j) \frac{dx}{1} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{-26y-z}$$

$$k) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{yz^2}$$

$$l) \frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}$$

$$m) \frac{dx}{1} = \frac{dy}{3x^2} = \frac{dz}{z}$$

$$n) \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

$$\tilde{n}) \frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

$$o) \frac{dx}{x(y^3 - 2x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3 - x^3)} = \frac{dz}{3z(x^3 - y^3)}$$

$$p) \frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}$$

$$q) \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$s) \frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{\cos x \cos y}$$

$$t) \frac{dx}{y(x+y) + az} = \frac{dy}{x(x+y) - az} = \frac{dz}{z(x+y)}$$

$$u) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z}$$

$$v) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{4}$$

$$w) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{1}$$

$$x) \frac{dx}{2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z}$$

$$y) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z}$$

3.6. Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes

Un sistema homogéneo de n ecuaciones diferenciales tiene la forma (3.23):

[illegible]

En este caso la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23) tiene la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = A_{11}e^{r_1t} + A_{12}e^{r_2t} + A_{13}e^{r_3t} + \cdots + A_{1n}e^{r_nt} = \sum_{k=1}^n A_{1k}e^rk^t \\ x_2 = A_{21}e^{r_1t} + A_{22}e^{r_2t} + A_{23}e^{r_3t} + \cdots + A_{2n}e^{r_nt} = \sum_{k=1}^n A_{2k}e^rk^t \\ x_3 = A_{31}e^{r_1t} + A_{32}e^{r_2t} + A_{33}e^{r_3t} + \cdots + A_{3n}e^{r_nt} = \sum_{k=1}^n A_{3k}e^rk^t \\ x_4 = A_{41}e^{r_1t} + A_{42}e^{r_1t} + A_{43}e^{r_1t} + \cdots + A_{4n}e^{r_nt} = \sum_{k=1}^n A_{4k}e^rk^t \\ \\ x_n = A_{n1}e^{r_1t} + A_{n2}e^{r_1t} + A_{n3}e^{r_1t} + \cdots + A_{nn}e^{r_nt} = \sum_{k=1}^n A_{nk}e^rk^t \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Las constantes:

$$A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, \dots A_{1n}, \quad (3.27)$$

Son constantes libres y las constantes:

$$A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}, A_{k4}, \dots A_{kn}, \quad k = 2, 3, 4, 5, \dots n \quad (3.28)$$

Las constantes (3.28) son proporcionales a las primeras constantes (3.27):

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_{k1} = p_{k1} \cdot A_{11} & para \ k = 2, 3, 4, \dots n \\ A_{k2} = p_{k2} \cdot A_{12} & para \ k = 2, 3, 4, \dots n \\ A_{k3} = p_{k3} \cdot A_{13} & para \ k = 2, 3, 4, \dots n \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{kn} = p_{kn} \cdot A_{1n} & para \ k = 2, 3, 4, \dots n \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Las constantes (3.28) $A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}, A_{k4}, \dots A_{kn}, \quad k = 2, 3, 4, 5, \dots n$ son definidas por las formulas $A_{kn} = p_{kn} \cdot A_{1n}$ para $k = 2, 3, 4, \dots n$ y calculadas del siguiente sistema de ecuaciones:

[illegible]

Donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$ y r_k es una de las raíces (3.25).

a) La integral de un sistema homogéneo :

$$\frac{dx_p}{dy} + \sum_{k=1}^n a_{pk} x_p = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.33)$$

b) La integral específica de un sistema no-homogéneo, se aplica generalmente el método de la constante

3.6.1. Ejercicios Resueltos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes

1.) Encuentre la integral general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (3.34):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x - 4y + 5z = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 12x - 11y + 10z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.34) significa encontrar las raíces de la ecuación característica del sistema de ecuaciones diferenciales (3.34), para lo cual, se escribe el determinante del sistema de ecuaciones diferenciales (3.35):

$$\begin{vmatrix} (3+r) & -4 & 5 \\ 12 & (-11+r) & 10 \\ -4 & 2 & (-4+r) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

Al resolver el determinante, lo mejor, es siempre aplicar propiedades de determinantes, que el estudiante debe conocer:

$$\begin{vmatrix} (3+r) & -4 & 5 \\ 12 & (-11+r) & 10 \\ -4 & 2 & (-4+r) \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_3(2)+f_1 \\ f_3(2)+f_2}} \begin{vmatrix} (-5+r) & 0 & (-3+2r) \\ 0 & (-5+r) & (2+3r) \\ -4 & 2 & (-4+r) \end{vmatrix}$$

Ya que se tiene la mayor cantidad de ceros en el determinante, se desarrolla el determinante:

$$(-5+r) \begin{vmatrix} (-5+r) & (-2+3r) \\ 2 & (-4+r) \end{vmatrix} + (-3+2r) \begin{vmatrix} 0 & (-5+r) \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &(-5+r)[20-5r-4r+r^2-4-6r]+(-3+r)(-1)(-4)(-5+r) \\
 &(-5+r)[r^2-15r+16]+(-3+2r)(4)(-5+r)
 \end{aligned}$$

Se aplica la ley distributiva:

$$\begin{aligned}
 &(-5+r)[r^2-15+16-12+8r] \\
 &(-5+r)[r^2-7r+4]
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Las raíces de la ecuación característica del sistema de ecuaciones diferenciales (3.34) son (3.37):

$$(-5+r)(r-4)(r-3)=0 \rightarrow r_1=3, r_2=4, r_3=5, \tag{3.37}$$

En base a la teoría general, la solución específica que corresponde a la raíz $r_1=3$, tiene la forma (3.38):

$$x=A_1e^{3t}, \quad y=B_1e^{3t}, \quad z=C_1e^{3t}, \tag{3.38}$$

Se necesita encontrar los valores de B_1 , C_1 en función de A_1 , para lo cual, reemplazamos la raíz $r=3$ en el determinante característico del sistema de ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} (3+3) & -4 & 5 \\ 12 & (-11+3) & 10 \\ -4 & 2 & (-4+3) \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 6A_1 & -4B_1 & 5C_1 \\ 12A_1 & -8B_1 & 10C_1 \\ -4A_1 & 2B_1 & -1C_1 \end{vmatrix} = 0$$

Se desea encontrar la solución general del sistema, para lo cual, se considera que, A_1 es conocida y se debe obtener B_1 , C_1 en función de A_1 . Por lo tanto, se forma un sistema con la primera y la tercera ecuación del sistema ecuaciones (parece el mas sencillo, sino se busca otro determinante de segundo orden) y se lo resuelve en función de A_1 . En este caso , se obtiene:

$$\begin{cases} 4B_1+5C_1=6A_1 \\ 2B_1-1C_1=-4A_1 \end{cases} \tag{3.39}$$

Se obtiene los valores:

$$B_1=\frac{7}{3}A_1, \quad C_1=\frac{2}{3}A_1, \tag{3.40}$$

Con lo cual , se obtiene una solución específica-general correspondiente a la primera raíz (3.41)y tiene la forma:

$$x = A_1 e^{3t}, \quad y = \frac{7}{3} A_1 e^{3t}, \quad z = \frac{2}{3} A_1 e^{3t}, \quad (3.41)$$

Donde A_1 sera una constante cualquiera.

En forma similar , se lo resuelve para la segunda raíz:

$$x = A_2 e^{4t}, \quad y = B_2 e^{4t}, \quad z = C_2 e^{4t}, \quad (3.42)$$

Se necesita encontrar los valores de B_2 , C_2 en función de A_2 , para lo cual, reemplazamos la raíz $r = 4$ en el determinante característico del sistema de ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} (3+4) & -4 & 5 \\ 12 & (-11+4) & 10 \\ -4 & 2 & (-4+4) \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 7A_2 & -4B_2 & 5C_2 \\ 12A_2 & -7B_2 & 10C_2 \\ -4A_2 & 2B_2 & 0C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

Se desea encontrar la solución general del sistema de ecuaciones (3,43), para lo cual, se considera que A_2 es conocida y se pueda obtener B_2 , C_2 en función de A_2 . Por lo tanto, se forma un sistema con la segunda y la tercera ecuación del sistema ecuaciones y se lo resuelve en función de A_2 . En este caso , se obtiene:

$$B_2 = 2A_2, \quad C_2 = \frac{1}{5}A_2,$$

Con lo cual , se obtiene una solución específica-general correspondiente a la segunda raíz y tiene la forma:

$$x = A_2 e^{3t}, \quad y = 2A_2 e^{3t}, \quad z = \frac{1}{5}A_2 e^{3t},$$

Donde A_2 sera una constante cualquiera.

En forma similar , se lo resuelve para la tercera raíz (3.44):

$$x = A_3 e^{5t}, \quad y = B_3 e^{5t}, \quad z = C_3 e^{5t}, \quad (3.44)$$

Se necesita encontrar los valores de B_3 , C_3 en función de A_3 , para lo cual, reemplazamos la raíz $r = 5$ en el determinante ca-

racterístico del sistema de ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} (3+5) & -4 & 5 \\ 12 & (-11+5) & 10 \\ -4 & 2 & (-4+5) \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 8A_3 & -4B_3 & 5C_3 \\ 12A_3 & -6B_3 & 10C_3 \\ -4A_3 & 2B_3 & 1C_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.45)$$

Se desea encontrar la solución general del sistema de ecuaciones (3.45), para lo cual, se considera que A_3 es conocida y se pueda obtener B_3 , C_3 en función de A_3 . Por lo tanto, se forma un sistema con la primera y la tercera ecuación del sistema ecuaciones y se lo resuelve en función de A_3 . En este caso, se obtiene:

$$B_3 = 2A_3, \quad C_3 = 0A_2, \quad (3.46)$$

Con lo cual, se obtiene una solución específica-general correspondiente a la segunda raíz y tiene la forma (3.47):

$$x = A_3 e^{5t}, \quad y = 2A_3 e^{5t}, \quad z = 0 \quad (3.47)$$

Donde A_3 sera una constante cualquiera.

De lo calculado, se obtiene la solución general (3.40) del sistema de ecuaciones diferenciales y que tiene la forma (3.48):

$$\begin{cases} x = A_1 e^{3t} + A_2 e^{4t} + A_3 e^{5t} \\ y = \frac{7}{3} A_1 e^{3t} + 2A_2 e^{4t} + 2A_3 e^{5t} \\ z = \frac{2}{3} A_3 e^{3t} + \frac{1}{3} A_2 e^{4t} \end{cases} \quad (3.48)$$

Donde A_1 , A_2 , A_3 son constantes libres.

- 2.) Encuentre la integral general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (3.49):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2x + y + 3z = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 4x - 2y + 6z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - 6x + 5y - z = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

La solución del sistema significa encontrar la ecuación característica del sistema de ecuaciones diferenciales (3.49), para lo cual, se escribe el determinante característico (3.50) del sistema (3.49):

$$\begin{vmatrix} (-2+r) & 1 & 3 \\ 4 & (-2r+r) & 10 \\ -6 & 2 & (-1+r) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.50)$$

Al resolver el determinante, lo mejor, es siempre aplicar sus propiedades de determinantes, que el estudiante debe conocer:

$$\begin{vmatrix} (-2+r) & 1 & 3 \\ 4 & (-2+r) & 6 \\ -6 & 5 & (-1+r) \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1(-2)+f_2} \begin{vmatrix} (-2+r) & 1 & 3 \\ 8-2r & (-4+r) & 0 \\ -6 & 5 & (-1+r) \end{vmatrix}$$

En la segunda fila se tiene un factor $(-4+r)$, el cual, sale delante del determinante:

$$(-4+r) \begin{vmatrix} (-2+r) & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -6 & 5 & (-1+r) \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2(2)+C_1} \begin{vmatrix} r & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & (-1+r) \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante con respecto la segunda fila, se obtiene:

$$(-4+r) \begin{vmatrix} r & 3 \\ 4 & (-1+r) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-4+r)(r^2 - r - 12)$$

Finalmente, se obtiene las raíces de la ecuación característica del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$r_1 = r_2 = 4, \quad r_3 = -3 \quad (3.51)$$

Como $r_1 = 4$ es una doble, por lo que, la solución al sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde a esta raíz, tiene la forma:

$$x = (A_1 + A_2 \cdot t)e^{4t}, \quad y = (B_1 + B_2 \cdot t)e^{4t}, \quad z = (C_1 + C_2 \cdot t)e^{4t}, \quad (3.52)$$

Con el fin de encontrar los coeficientes A_k , B_k , C_k , donde $k = 1, 2$. Estas respuestas se reemplazan en el sistema de ecuaciones

diferenciales (3.49), se simplifica el elemento e^{4t} que es elemento común y se obtiene:

$$\begin{cases} 2A_1 + A_2 + B_1 + 3C_1 + (2A_2 + B_2 + 3C_2) \cdot t & = 0 \\ 4A_1 + 2B_1 + B_2 + 6C_2 + (4A_2 + 2B_2 + 6C_2) \cdot t & = 0 \\ -6A_1 + 5B_1 + 3C_1 + C_2 + (-6A_2 + 5B_2 + 3C_2) \cdot t & = 0 \end{cases}$$

Al igualar los coeficientes libres y los coeficientes multiplicados por t a cero, en ese caso, se obtiene seis ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A_1 + B_1 + 3C_1 + A_2 & = 0 \\ 4A_1 + 2B_1 + 6C_1 + B_2 & = 0 \\ -6A_1 + 5B_1 + 3C_1 + C_2 & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2A_2 + B_2 + 3C_2 & = 0 \\ 4A_2 + 2B_2 + 6C_2 & = 0 \\ -6A_2 + 5B_2 + 3C_2 & = 0 \end{cases}$$

Se toma en consideración las 3 primeras ecuaciones del sistema de ecuaciones del lado derecho. Es un sistema homogéneo y su determinante es igual a cero. Para encontrar su solución se toma un determinante de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \quad (3.53)$$

Se toma en consideración la segunda y la tercera ecuación del sistema del lado derecho, se considera además que, A_2 es conocida. Por lo que, en función de esto se puede obtener B_2, C_2 sus valores son:

$$B_2 = 2A_2 \quad C_2 = -\frac{4}{3}A_2 \quad (3.54)$$

Se reemplaza estos valores en el sistema del lado izquierdo, se obtiene:

$$\begin{cases} B_1 + 3C_1 & = -2A_1 - A_2 \\ 2B_1 + 6C_1 & = -4A_1 - 2A_2 \\ 5B_1 + 3C_1 & = 6A_1 + \frac{4}{3}A_2 \end{cases}$$

En este último sistema de ecuaciones, se considera que A_1, A_2 son conocidos y teniendo en cuenta que :

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$$

De las dos últimas ecuaciones del sistema, se encuentra B_1, C_1 , se obtiene:

$$B_1 = 2A_1 + \frac{7}{12}A_2 \quad C_1 = -\frac{4}{3}A_1 - \frac{19}{36}A_2 \quad (3.55)$$

Considerando las ultimas ecuaciones, se tiene la solución del sistema que corresponden a la raíz $r_1 = 4$ (3.56)

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^{4t} \\ y = \left(2A_1 + \frac{7}{12}A_2 + 2A_2 t\right)e^{4t} \\ z = \left(-\frac{4}{3}A_1 - \frac{19}{36}A_2 - \frac{4}{3}A_2 t\right)e^{4t} \end{cases} \quad (3.56)$$

Donde A_1, A_2 son constantes libres.

La solución con respecto a la raíz r_3 tiene la forma:

$$x = A_3 e^{-3t}, \quad y = 2A_3 e^{-3t}, \quad z = A_3 e^{-3t} \quad (3.57)$$

Lo que permite encontrar la integral general del sistema y tiene forma:

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^{4t} + A_3 e^{-3t} \\ y = \left(2A_1 + \frac{7}{12}A_2 + 2A_2 t\right)e^{4t} + 2A_3 e^{-3t} \\ z = \left(-\frac{4}{3}A_1 - \frac{19}{36}A_2 - \frac{4}{3}A_2 t\right)e^{4t} + A_3 e^{-3t} \end{cases} \quad (3.58)$$

Donde A_1, A_2, A_3 son constantes libres.

- 3.) Encuentre la integral general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x + 4y + 2z = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 4x - y + z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - 36x - 28y - 13z = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

La solución del sistema significa encontrar las raíces de la ecuación característica del sistema, para lo cual, se escribe el deter-

minante del sistema:

$$\begin{vmatrix} (5+r) & 4 & 2 \\ 4 & (-1+r) & 1 \\ -36 & -28 & (-13+r) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.60)$$

Al resolver el determinante (3.60), lo mejor, es siempre aplicar sus propiedades, que el estudiante debe conocer. La ecuación característica del sistema de ecuaciones tiene tres raíces $r_1 = r_2 = r_3 = 3$, como es una raíz que se repite tres veces la solución que corresponde a la raíz, tiene la forma:

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2) e^{3t} \\ y = (B_1 + B_2 t + B_3 t^2) e^{3t} \\ z = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{3t} \end{cases} \quad (3.61)$$

Con el objetivo de encontrar los coeficientes A_k, B_k, C_k donde $K = 1, 2, 3$, Las ultimas expresiones reemplazamos en el sistema de ecuaciones del ejercicio (3.59), realizando operaciones algebraicas y al simplificar e^{3t} se obtiene:

$$\begin{cases} A_2 + 8A_1 + 4B_1 + 2C_1 + (2A_3 + 8A_2 + 4B_2 + 2C_2) \cdot t + (8A_3 + 4B_3 + 2C_3) \cdot t^2 = 0 \\ B_2 + 4A_1 + 2B_1 + C_1 + (2B_3 + 4A_2 + 2B_2 + C_2) \cdot t + (4A_3 + 2B_3 + C_3) t^2 = 0 \\ C_2 - 36A_1 - 28B_1 - 10C_1 + (2C_3 - 36A_2 - 28B_2 - 10C_2) \cdot t + (-36A_3 - 28B_3 - 10C_3) \cdot t^2 = 0 \end{cases}$$

Al igualar los coeficientes libres y de t y t^2 , se consigue nueve ecuaciones:

$$\begin{cases} A_2 + 8A_1 + 4B_1 + 2C_1 = 0 \\ B_2 + 4A_1 + 2B_1 + C_1 = 0 \\ C_2 - 36A_1 - 28B_1 - 10C_1 = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\begin{cases} 2A_3 + 8A_2 + 4B_2 + 2C_2 = 0 \\ 2B_3 + 4A_2 + 2B_2 + C_2 = 0 \\ 2C_3 - 36A_2 - 28B_2 - 10C_2 = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\begin{cases} 8A_3 + 4B_3 + 2C_3 = 0 \\ 4A_3 + 2B_3 + C_3 = 0 \\ -36A_3 - 28B_3 - 10C_3 = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

El ultimo sistema de los tres escritos (3.64), tiene su determinante igual a cero. Para encontrar su solución , se busca un determinante diferente de cero, y el cual debe ser de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -10 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Por lo tanto, de las dos ultimas ecuaciones del tercer sistema, se encuentra B_3, C_3 , se tiene:

$$B_3 = \frac{1}{2}A_3, \quad C_3 = -5A_3 \quad (3.65)$$

Los valores obtenidos, se reemplaza en el segundo sistema (3.63) de los tres sistemas definidos, se obtiene:

$$\begin{cases} 4B_2 + 2C_2 & = & -2A_3 - 8A_2 \\ 2B_2 + C_2 & = & -A_3 - 4A_2 \\ -28B_2 - 10C_2 & = & 10A_3 + 36A_2 \end{cases} \quad (3.66)$$

En el ultimo sistema A_2 , y A_3 , se considera como datos conocidos y se encuentra el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -10 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Por lo tanto, se encuentra B_2 , y C_2 , se tiene:

$$B_2 = \frac{1}{2}A_2, \quad C_2 = -5A_2 - A_3$$

Con estos valores, se reemplaza en el primer sistema (3.62) de los tres escritos, se obtiene:

$$\begin{cases} 4B_1 + 2C_1 & = & -A_2 - 8A_1 \\ 2B_1 + C_1 & = & -\frac{1}{2}A_2 - 4A_1 \\ -28B_1 - 10C_1 & = & 5A_2 + 36A_1 + A_3 \end{cases}$$

En este ultimo sistema A_1 , A_2 , y A_3 se considera como datos conocidos, se tiene:

$$B_1 = \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{8}A_3, \quad C_1 = -5A_1 - \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{4}A_3$$

Con los valores $B_3, C_3, B_2, C_2, B_1, C_1$. al reemplazarlo en la solución general del ejercicio:

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2t + A_3t^2)e^{3t} \\ y = \left(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{8}A_3 + \frac{1}{2}A_2t + \frac{1}{2}t^2\right)e^{3t} \\ z = \left[-5A_1 - \frac{1}{2}A_2t + \frac{1}{4}A_3 + (-5A_2 - A_3)t - 5A_3t^2\right]e^{3t} \end{cases} \quad (3.67)$$

Donde A_1, A_2, A_3 son constantes libres.

- 4.) Encuentre la integral general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 4x + 2y + 5z = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 7y + 10z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - 5x - 6y - 10z = 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales significa, encontrar las raíces de la ecuación característica del sistema de ecuaciones diferenciales, para lo cual, se escribe el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} (4+r) & 2 & 5 \\ 2 & (7+r) & 10 \\ -5 & -6 & (-10+r) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.69)$$

Se obtiene el resultado del determinante, se resuelve el determinante aplicando las propiedades, se obtiene la ecuación característica del sistema:

$$r^3 + r^2 - r + 15 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$r_1 = -3, \quad r_2 = 1 + 2i, \quad r_3 = 1 - 2i \quad (3.70)$$

La solución específica que corresponde a la raíz $r_1 = -3$ tiene la forma:

$$x = A_1e^{-3t}, \quad y = B_1e^{-3t}, \quad z = C_1e^{-3t}$$

Estas expresiones reemplazamos en el sistema de ecuaciones (3.68) del ejercicio y después de haber simplificado y transformado, se obtiene en función de A_1 , B_1 , C_1 el sistema:

$$\begin{cases} A_1 + 2B_1 + 5C_1 = 0 \\ 2A_1 + 4B_1 + 10C_1 = 0 \\ -5A_1 - 6B_1 - 13C_1 = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

El ultimo sistema (3.71) es lineal homogéneo y por lo tanto, tiene su determinante igual a cero. Para encontrar su solución, se busca un determinante diferente de cero, el cual, debe ser de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 13 \end{vmatrix} = 112 \neq 0$$

Por lo tanto, de las dos ultimas ecuaciones del sistema (3.71), se encuentra B_1, C_1 , en función de A_1 a la cual, se considera como conocida y en ese caso, se tiene:

$$B_1 = -3A_1, \quad C_1 = A_1 \quad (3.72)$$

Estas expresiones (3.71, 3.72) se reemplazan en la solución específica del sistema que corresponde a la raíz r_1 , se obtiene:

$$x = A_1 e^{-3t}, \quad y = -3A_1 e^{-3t}, \quad z = A_1 e^{-3t} \quad (3.73)$$

La solución específica que corresponde a la raíz $r_2 = 1 + 2i$ tiene la forma:

$$x = A_2 e^{(1+2i)t}, \quad y = B_2 e^{(1+2i)t}, \quad z = C_2 e^{(1+2i)t} \quad (3.74)$$

Reemplazando estas expresiones en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.68) y después de haber simplificado y transformado, se obtiene un sistema en función de: A_2 , B_2 , C_2

$$\begin{cases} (5 + 2i)A_2 + 2B_2 + 5C_2 = 0 \\ 2A_2 + (8 + 2i)B_2 + 10C_2 = 0 \\ -5A_2 - 6B_2 - (-9 + 2i)C_2 = 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

Se considera a A_2 como elemento conocido y de la primera y segunda ecuación de (3.75), se obtiene:

$$B_2 = 2A_2, \quad C_2 = -\left(\frac{9}{5} + \frac{2}{5}i\right)A_2 \quad (3.76)$$

Donde A_2 es una constante libre

En forma muy similar encontramos la solución específica de la tercera raíz $r = (1 - 2i)$

$$x = A_3 e^{(1-2i)t}, \quad y = 2B_3 e^{(1-2i)t}, \quad z = -\left(\frac{9}{5} - \frac{2}{5}\right) A_3 e^{(1-2i)t} \quad (3.77)$$

Donde A_3 es una constante libre

Considerando las soluciones específicas de las diferentes raíces, se obtiene la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales (3.68), en la forma:

$$\begin{cases} x = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{(1+2i)t} + A_3 e^{(1-2i)t} \\ y = -3A_1 e^{-3t} + 2A_2 e^{(1+2i)t} + 2A_3 e^{(1-2i)t} \\ z = A_1 e^{-3t} - \left[\left(\frac{9}{5} + \frac{2}{5}i\right) A_2 e^{(1+2i)t} + \left(\frac{9}{5} - \frac{2}{5}i\right) A_3 e^{(1-2i)t}\right] \end{cases}$$

Donde A_1, A_2, A_3 son constantes cualesquiera.

- 5.) Encuentre la integral general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x - 4y + 5z = t \\ \frac{dy}{dt} + 12x - 11y + 10z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - 4x + 2y - 4z = \sin t \end{cases} \quad (3.78)$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.78) significa encontrar la solución al sistema de ecuaciones diferenciales homogéneos y no-homogéneo. El primero lo resolvemos por medio de su ecuación característica del sistema, para lo cual, se escribe el determinante del sistema, lo cual ya se hizo en el primer ejemplo de esta sección:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x - 4y + 5z = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 12x - 11y + 10z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad (3.79)$$

Su solución es:

$$\begin{cases} x = A_1 e^{3t} + A_2 e^{4t} + A_3 e^{5t} \\ y = \frac{7}{3} A_1 e^{3t} + 2A_2 e^{4t} + 2A_3 e^{5t} \\ z = \frac{2}{3} A_3 e^{3t} + \frac{1}{3} A_2 e^{4t} \end{cases} \quad (3.80)$$

Donde A_1 , A_2 , A_3 son constantes libres.

Ahora, se calcula la solución específica del sistema de ecuaciones no-homogéneo. En este caso las constantes A_1 , A_2 , A_3 se transforman en variables, es decir: $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ se tiene:

$$\begin{cases} x = A_1(t)e^{3t} + A_2(t)e^{4t} + A_3(t)e^{5t} \\ y = \frac{7}{3}A_1(t)e^{3t} + 2A_2(t)e^{4t} + 2A_3(t)e^{5t} \\ z = \frac{2}{3}A_3(t)e^{3t} + \frac{1}{3}A_2(t)e^{4t} \end{cases} \quad (3.81)$$

Las funciones $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ se las calcula en tal forma que, el sistema sea definido. Con este objetivo, se deriva con respecto de t este ultimo sistema (3.81):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_1' e^{3t} + 3A_1 e^{3t} + A_2' e^{4t} + 4A_2 e^{4t} + A_3' e^{5t} + 5A_3 e^{5t} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{7}{3}A_1' e^{3t} + 7A_1 e^{3t} + 2A_2' e^{4t} + 8A_2 e^{4t} + (2A_3' e^{5t} + 10A_3 e^{5t}) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{2}{3}A_3' e^{3t} + 2A_3 e^{3t} + \frac{1}{3}A_2' e^{4t} + \frac{4}{3}A_2 e^{4t} \end{cases}$$

Al reemplazar los valores de x , y , y z sus derivadas en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.78). Se realiza simplificaciones y se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A_1' e^{3t} + A_2' e^{4t} + 5A_3' e^{5t} = t \\ 7A_1' e^{3t} + 6A_2' e^{4t} + 6A_3' e^{5t} = 0 \\ 10A_1' e^{3t} + 3A_2' e^{4t} = 15 \sin t \end{cases} \quad (3.82)$$

En este sistema A_1' , A_2' , A_3' son las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales. La solución por cualquier de los métodos conocidos es:

$$\begin{cases} A_1' = -6te^{-3t} \\ A_2' = 5e^{-4t} \sin t + 20te^{-4t} \\ A_3' = -5e^{-5t} \sin t - 13te^{-5t} \end{cases}$$

Después de integrar, se obtiene:

$$\begin{cases} A_1(t) = 2e^{-3t} \left(t + \frac{1}{3} \right) \\ A_2(t) = -5e^{-4t} \left(t + \frac{1}{4} + \frac{4}{17} \cos t \right) \\ A_3(t) = e^{-5t} \left(\frac{13}{5}t + \frac{13}{25} + \frac{25}{26} \sin t + \frac{5}{26} \cos t \right) \end{cases}$$

Finalmente, se reemplaza en el sistema de las soluciones específicas del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{5}t - \frac{19}{300} - \frac{95}{442} \sin t - \frac{45}{442} \cos t \\ y = -\frac{2}{15}t + \frac{43}{450} - \frac{95}{221} \sin t - \frac{45}{221} \cos t \\ z = \frac{1}{3}t + \frac{7}{36} - \frac{4}{17} \sin t - \frac{1}{17} \cos t \end{cases}$$

La integral general del sistema de ecuaciones diferenciales es la suma de la integral general de su parte homogéneo mas la parte no-homogéneo.

3.6.2. Ejercicios Propuestos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes

Encuentre la integral general de los siguientes ejercicios:

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y - z = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x + y - z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - z \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = z - x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + y - 4z = 0 \\ \frac{dz}{dt} + 4z - x = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - y \\ \frac{dy}{dt} = z - 2x \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y = 0 \\ \frac{dz}{dt} = 3x + z \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y - z = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x - y - z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y \\ \frac{dy}{dt} = -2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} - y - 4z = e^x \\ \frac{dy}{dt} + 4y - 5z = 1 \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + y = t^2 \\ \frac{dy}{dt} + y + z = 2t \\ \frac{dz}{dt} + z = t \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x - 2y = e^t \\ \frac{dy}{dt} - x + 6y = e^{2t} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2x - 4y = \cos t \\ \frac{dy}{dt} + x + 2y = \sin t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y + 5z \\ \frac{dy}{dt} = 6x - y - 6z \\ \frac{dz}{dt} = -8x + 3y + 9z \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 21x - 8y - 19z \\ \frac{dy}{dt} = 18x - 7y - 15z \\ \frac{dz}{dt} = 16x - 6y - 15z \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y + z = \cos t \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 3x - 4y + 5z = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 12x - 11y + 10z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 3y - 9z \\ \frac{dy}{dt} = -18x + 7y + 18z \\ \frac{dz}{dt} = 18x - 6y - 17z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y + t \\ \frac{dz}{dx} = x - 1y + 2t \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4x - 5y \\ \frac{dz}{dx} = x \end{cases}$$

Capítulo 4

Transformada Laplace

,

1. Características Básicas de la Transformada Laplace.
2. Propiedades de la Transformada Laplace.
3. Transformada Laplace de la Derivada
4. Ejercicios Resueltos de Transformada Laplace,
5. Ejercicios Propuestos de Transformada Laplace,

4.1. Características Básicas de la Transformada Laplace

La Transformada de Laplace, es una técnica Matemática que forma parte de ciertas transformadas integrales, como la transformada de Fourier, la transformada de Hilbert y otras. Estas transformadas están definidas por medio de una integral impropia y cambian una función de una variable de entrada en otra función.

En muchos procesos técnicos, así como, en la Física muy a menudo, se aplica la transformación Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y no-constantes, pero es más a menudo que, se aplica para resolver una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

La transformación Laplace permite resolver ecuaciones diferenciales utilizando fórmulas de una tabla ya lista, la cual permite obtener la solución de la ecuación cumpliendo con las condiciones iniciales del problema y por lo tanto, nos libera de los problemas de integración, que muchas veces son tediosas y largas; así como, del calculo de las constantes de integración.

La integral de Laplace de una función $f(t)$, se llama a la integral impropia en la forma:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

La metodología consiste en aplicar la transformada a la ecuación diferencial y posteriormente usar las propiedades de la transformada.

Los fundamentos de la transformación de la Laplace, son las propiedades de una función, es decir, la transformación es biyectiva. Lo que nos indica esta propiedad es que, para cada elemento de un dominio de una función tendrá uno y solamente un valor en el dominio de la transformación Laplace.

Si se considera una función $f(t)$ definida para todos los valores del conjunto de los $\mathbb{R}$ en tal forma que:

1. La función $f(t)$ cumple las condiciones:

$$f(t) = \begin{cases} f(t) \geq 0 & \text{para todo } t > 0 \\ f(t) = 0 & \text{para todo } t < 0 \end{cases}$$

2. Y además:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$$

3. Para todos los valores del conjunto de los números imaginarios:

$$s = r + ip$$

De tal forma que :

$$re\ s = r > r_0$$

Exista la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

La formula:

$$y(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

Define en la plano $re\ s = r > r_0$ la función $y(s)$ de la variable s .

De la función $y(s)$ se dice, que se la obtuvo por sencillas transformaciones de la Laplace de la función $f(t)$; conocida como la transformación del original de la función $f(t)$ y se lo escribe $\mathcal{L}[f(t)]$; es decir:

$$y(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

La última formula representa el ordenamiento de la función variable real $f(t)$ en los valores de la función variable $y(s)$.

Este ordenamiento, también permite en la dirección contraria; es decir, conociendo los valores de $y(s)$ se puede calcular $f(t)$ con la ayuda de la formula:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{r-iu}^{r+iu} F(s)e^{st} ds$$

Donde: r es un número real cualquiera mayor a r_0 ; ($r > r_0$). Se puede demostrar que el lado derecho de la identidad escrita tiene sentido y no depende de t .

En este momento, es cuando se utiliza la tabla de la transformación Laplace. En este libro se adjunta una tabla elemental de estas transformaciones, que es lo que más se utiliza en la practica.

Este cambio de la transformación ($y(s)$) para obtener el original ($f(t)$), definido en la última formula, se la conoce como la transformación inversa de Laplace y se la denota:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

4.2. Propiedades de la Transformación Laplace

El estudiante debe tener en mente que, la transformación de Laplace y su inversa son funciones basadas en una integral; por lo tanto, sus propiedades deben ser en función de las propiedades de las integrales.

1. Si la transformación Laplace tiene una constante, la constante sale delante del signo de la transformación Laplace.

$$\mathcal{L}[c \cdot f(t)] = c \cdot \mathcal{L}[f(t)]$$

2. La transformación Laplace de una suma de funciones es igual a la transformación de Laplace de cada una de las funciones, sumandos:

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

3. La transformación de Laplace de la transformación inversa de Laplace es igual a su argumento:

$$\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[F(s)]] = F(s)$$

Las mismas propiedades tiene la transformación inversa de Laplace:

1. Si la transformación inversa de Laplace tiene una constante, la constante sale delante del signo de la transformación inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}[c \cdot F(s)] = c \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

2. La transformación inversa de Laplace de una suma de funciones es igual a la transformación inversa de Laplace de cada una de las funciones:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$$

3. La transformación inversa de Laplace de la transformación de Laplace es igual a su argumento:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]] = f(t)$$

En función de las propiedades y su definición, ya se esta en condiciones de ir obteniendo la transformación de Laplace de cierta funciones, con lo cual, se obtiene la tabla de transformaciones de Laplace y eso es lo que se va hacer. Se comenzara con funciones básicas:

1. Si la función $f(t) = 0$; es decir, su transformación de Laplace es:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 0 \cdot e^{-st} dt = 0$$

Por lo tanto, su transformada de cero es cero.

2. La función unidad, que esta definida:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

La transformada de esta función:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty}} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{s} [\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-s\alpha} - \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-s\beta}] \\ &= \frac{1}{s} [1 - 0] = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

3. Dada la función:

$$f(t) = \begin{cases} f(t) = e^{at} & \text{para } t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Donde 'a' es una constante, se tiene:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty}} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_{\alpha}^{\beta} = \\ &= \frac{1}{a-s} [\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{(a-s)\beta} - \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{(a-s)\alpha}] = \frac{1}{a-s} [\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{(a-s)\beta} - 1] = \\ &= \frac{1}{a-s} [0 - 1] = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

Finalmente se puede escribir:

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \text{re } s > a$$

Si $a = 1$, se obtiene:

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1} \quad \text{re } s > 1$$

Si $a = -1$, se obtiene:

$$\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1} \quad \text{re } s > -1$$

4. Dada la función $f(t) = \sinh t$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\sinh t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}[e^t] - \mathcal{L}[e^{-t}]] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+1 - (s-1)}{s^2-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{s^2-1}\right] = \frac{1}{s^2-1} \end{aligned}$$

Finalmente se puede escribir:

$$F(s) = \mathcal{L}[\sinh t] = \frac{1}{s^2-1} \quad \text{re } s > 1$$

5. Dada la función $f(t) = \cosh t$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\cosh t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}[e^t] + \mathcal{L}[e^{-t}]] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+1 + (s-1)}{s^2-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2-1}\right] = \frac{s}{s^2-1} \end{aligned}$$

Finalmente se puede escribir:

$$F(s) = \mathcal{L}[\cosh t] = \frac{s}{s^2-1} \quad \text{re } s > 1$$

4.3. Propiedades de la Transformada Laplace

Todas las propiedades de la transformada de Laplace están basadas en la continuidad de la función a ser transformada, en un definido Dominio para cada función.

La continuidad permite definir que, tanto la función como la transformada, cumple con la propiedad de biyectiva; así mismo, tiene la misma propiedad de continuidad con la inversa de la transformada.

1. Propiedad de la Derivada de la Transformada Laplace. En la sección anterior, se presento la forma de obtener la transformada de diferentes funciones. Al desear obtener la transformada de otras funciones en muchas ocasiones son tediosas y largas, es por esto que, se busco la manera de facilitar este proceso. El conocimiento y la aplicación de las propiedades de la transformación de Laplace facilita este proceso de transformación.

En el caso de la propiedad de la derivada, se aplica el mismo procedimiento, que en casos anteriores; es decir, se parte de su definición:

$$\mathcal{L}[f(t)] \longrightarrow \mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

La integral, se integra por partes, se aplica la formula, cuyos elementos son:

$$f(t) = e^{-st} \longrightarrow f'(t) = -se^{-st} dt$$

$$g'(t) = f'(t) dt \longrightarrow \int g'(t) = \int f'(t) dt \longrightarrow g(t) = f(t)$$

Se aplica la formula de integración por partes:

$$\int f(t)g(t)dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)dt$$

Se obtiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) s dt$$

Se analiza independiente los dos términos obtenidos:

$$a) [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} = e^{-s\infty} f(t = \infty) - e^{-s0} f(t = 0) = 0 - 1 \cdot f(t = 0) = -f(t = 0)$$

$$b) s \int_0^{\infty} se^{-st} f(t) s dt = s \overbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt}^{\mathcal{L}[f(t)]} = s\mathcal{L}[f(t)]$$

Finalmente, se puede escribir:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = s\mathcal{L}[f(t)] - f(t = 0)$$

En algunos libros, la trasformada de la derivada, se escribe:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)^+$$

En forma muy parecida, se puede obtener la transformada de la segunda derivada:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = \mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

En este momento, se aplica el resultado de la transformada de la primera derivada; es decir:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right] = s\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}$$

Se puede definir que:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = t_1$$

Y:

$$s\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = s(s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)^+) = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0)^+$$

Finalmente, se puede escribir:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0)^+ - t_1 = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0)^+ - f'_1(t=0^+)$$

Si, se realiza un procedimiento parecido, se puede obtener la transformada de la tercera derivada y en este caso se obtiene:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3y}{dt^3}\right] = s^3\mathcal{L}[f(t)] - s^2t_0 - st_1 - t_2$$

Donde:

$$y_2 = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{t=0}$$

En forma general se puede escribir:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^ny}{dt^n}\right] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - (s^{n-1}t_0 + s^{n-2}t_1 + \cdots + t_{n-1})$$

Donde:

$$t_k = \left(\frac{d^ky}{dt^k}\right)_{t=0}$$

2. La Propiedad del Teorema de Traslación.

En muchas de las transformaciones de Laplace, se tiene la siguiente estructura:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$$

Donde: a es un número que pertenece a los reales, $a \in \mathbb{R}$. La función $f(t)$ puede ser, cualquier función que, se este analizando; por lo tanto, se tendría al aplicar la propiedad de traslación:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s \rightarrow (s-a)}.$$

Como, se puede observar, la parte e^{at} ha desaparecido, con lo cual, se facilita la transformación Laplace. Lo que, se debe tener en cuenta, es que, en la transformación del lado izquierdo de la identidad obtenida, se debe reemplazar ' s ' por ' $(s - a)$ '.

Su demostración esta basado en la aplicación de la definición; es decir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st+at} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)\end{aligned}$$

La estructura de la integral impropia, con un exponente ' $-(s - a)$ ' es la misma, que con un exponente ' $-s$ '; por lo tanto, también sera una transformación Laplace e igual a la inicial.

3. Segunda Propiedad de la Derivada de la Transformación Laplace.

Esta propiedad tiene su aplicación en el momento en el cual, su estructura es:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} [\mathcal{L}[f(t)]]$$

Como se puede observar, en la transformada del lado derecho, no aparece la variable ' t ', pero aparece la primera derivada con el signo negativo; con lo cual, se facilita el calculo de la transformada Laplace.

Esta propiedad indica que, para obtener la transformada Laplace, compuesta por el producto de t y $f(t)$, se puede aplicar esta propiedad, que dice, obtén la transformada de Laplace de $f(t)$ y después se deriva este elemento en función de ' s '.

Su demostración consta de dos pasos, en el primero, se demuestra un teorema, que se obtiene de su definición y en el segundo es una aplicación de este teorema:

1. Se toma en cuenta el siguiente teorema:

$$\int_s^{\infty} \mathcal{L}[f(t)] ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

Se debe observar, que el limite inferior de la integral es el valor cualquiera de 's'.

Su demostración parte de la definición de la transformada Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

A esta identidad, se toma la integral impropia desde 's' al infinito:

$$\int_s^{\infty} \mathcal{L}[f(t)] ds = \int_s^{\infty} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt ds =$$

Se ordena el lado derecho de la identidad:

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_s^{\infty} f(t)e^{-st} ds \right] dt = \int_0^{\infty} \left[f(t) \int_s^{\infty} e^{-st} ds \right] dt =$$

Al integrar la parte interna en función de 's', se obtiene:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \left[f(t) \frac{1}{-t} e^{-ts} \right]_s^{\infty} dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{f(t)}{-t} (e^{-ts})_s^{\infty} \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\frac{f(t)}{-t} \left(\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-ts} - \lim_{s \rightarrow s} e^{-ts} \right) \right] dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{f(t)}{-t} \left(0 - \lim_{s \rightarrow s} e^{-ts} \right) \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\frac{f(t)}{t} e^{-st} \right] dt = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \end{aligned}$$

De lo desarrollado, se puede escribir:

$$\int_s^{\infty} \mathcal{L}[f(t)] ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

2. El teorema anterior, se demostró que:

$$= \int_s^{\infty} \mathcal{L}[f(t)] ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

Para nuestra demostración, se utiliza $f(t) = t f(t)$, y se reemplaza :

$$= \int_s^{\infty} \mathcal{L}[t f(t)] ds = \mathcal{L}\left[\frac{t f(t)}{t}\right] = \mathcal{L}[f(t)]$$

De calculo integral, se define que; al integrar una función, se obtiene la función primitiva definida y en este caso, sus limites serian de 's' a infinito; es decir:

$$\int_s^{\infty} \mathcal{L}[t f(t)] ds = F(s)|_s^{\infty}$$

Como es una integral impropia, se puede escribir:

$$\int_s^{\infty} \mathcal{L}[t f(t)] ds = F(s)|_s^{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) - F(s = s)$$

El primer limite de $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s)$ es igual a cero. El segundo limite es igual a un valor en función de 's'; por lo tanto, se obtiene:

$$\int_s^{\infty} \mathcal{L}[t f(t)] ds = F(s)|_s^{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) - F(s) = 0 - F(s)$$

Lo que, se puede escribir:

$$\int_s^{\infty} \mathcal{L}[t f(t)] ds = -F(s)$$

A lo obtenido, se puede aplicar la derivada en función de 's':

$$\frac{d}{ds} \left[\int_s^{\infty} \mathcal{L}[t f(t)] ds \right] = \frac{d}{ds} [-F(s)]$$

Aplicando propiedades de integrales, se obtiene:

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds} [F(s)]$$

Aplicando la definición de Laplace, se obtiene:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}[F(s)] = -\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[f(t)]] =$$

Con lo cual se demuestra que:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[f(t)]]$$

4. Propiedad de la Integral con la transformada de Laplace

Esta propiedad esta definida como:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

Su demostración esta basada en la definición de:

a) Calculo integral:

$$\int_0^x f(x)dx = F(x) \longleftrightarrow F'(x) = f(x)$$

b) Transformada Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

c) La propiedad de la derivada de la transformada Laplace:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(t=0)$$

Se considera que, F(s) es la función primitiva, que por terminología se lo escribe con mayúscula; por lo tanto, se reemplaza:

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] - \int_0^{t=0} f(t)dt$$

El segundo elemento por propiedad de integrales es igual a cero, se obtiene:

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] - 0$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

El estudiante debe tener en cuenta, que la transformada Laplace cumple la propiedad biyectiva; por lo tanto, las propiedades analizadas y demostradas, se las puede aplicar en la obtención de la transformada Laplace inversa.

4.4. Ejercicios Resueltos de la Transformada Laplace.

1. Obtenga la transformada de la $f(t) = \sin t$

$$y(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\sin t] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \sin(t)e^{-st}dt$$

Se debe integrar la integral impropia, para lo cual, se aplica el método de integración por partes:

$$\int_0^{\infty} \sin(t)e^{-st}dt = (-\cos t \cdot e^{-st})_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-se^{-st})\cos t dt$$

$$\int_0^{\infty} \sin(t)e^{-st}dt = (-\cos t \cdot e^{-st})_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} (e^{-st})\cos t dt$$

Se trabaja el primer termino:

$$(-\cos x \cdot e^{-st})_0^{\infty} = (-\cos \infty \cdot e^{-s\infty}) - (-\cos 0 \cdot e^{-s0}) = \left(\frac{-\cos \infty}{e^{s\infty}}\right) + (1 \cdot 1) = 0 + 1 = 1$$

Se trabaja con el segundo elemento:

$$s \int_0^{\infty} (e^{-st})\cos t dt = s\mathcal{L}[y(s)]$$

Se trabaja con la integral que apareció y nuevamente se aplica el método de integración por partes:

$$\int_0^{\infty} (e^{-st})\cos t dt = (\sin t \cdot e^{-st}) - \int_0^{\infty} (-se^{-st})(-\sin t)dt$$

$$\int_0^{\infty} (e^{-st}) \cos t dt = (\sin t \cdot e^{-st})_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} (e^{-st})(\sin t) dt$$

Se trabaja el primer termino:

$$(\sin t \cdot e^{-st})_0^{\infty} = (\sin \infty \cdot e^{-s\infty}) - (\sin 0 \cdot e^{-s0}) = \left(\frac{\sin \infty}{e^{s\infty}} \right) + (0 \cdot 1) = 0 + 0 = 0$$

Se trabaja con el segundo elemento:

$$s \int_0^{\infty} (e^{-st}) \sin t dt =$$

Finalmente se obtiene:

$$\int_0^{\infty} (e^{-st}) \cos t dt = 0 - s \int_0^{\infty} (e^{-st})(\sin t) dt = -s \int_0^{\infty} (e^{-st})(\sin t) dt$$

Se reemplaza en la integral y se obtiene la ecuación:

$$\int_0^{\infty} \sin(t) e^{-st} dt = 1 + s \left(-s \int_0^{\infty} (e^{-st}) \sin t dt \right)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(t) e^{-st} dt + s^2 \left(\int_0^{\infty} (e^{-st}) \sin t dt \right) = 1$$

$$\int_0^{\infty} \sin(t) e^{-st} dt (1 + s^2) = 1$$

$$\int_0^{\infty} \sin(t) e^{-st} dt = \frac{1}{(1 + s^2)}$$

Si en el argumento de la función trigonométrica tuviese la estructura:

$$\int_0^{\infty} \sin(wt) e^{-st} dt = \frac{w}{(s^2 + w^2)}$$

2. Obtenga la transformada de la función $f(x) = \cos t$. En este ejercicio se aplicara la propiedad de la derivada de la transformación de Laplace:

$$y(s) = \mathcal{L}[\cos t] = \mathcal{L}[(\sin t)'] = s\mathcal{L}[\sin t] - t_0 = s \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - 0 =$$

$$\mathcal{L}[(\sin t)'] = s\mathcal{L}[\sin t] - t_0 = s \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - 0 = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Finalmente:

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Se puede observar la facilidad de la transformada aplicando sus propiedades.

Si el argumento tiene la forma: $f(x) = \cos(wt)$ en ese caso la transformada es iguala a:

$$\mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

3. Encuentre la transformada de Laplace de:

$$\mathcal{L}[e^{2t} \cos(wt)]$$

El ejercicio tiene la forma $e^{at} f(t)$ y se lo puede resolver por diferentes métodos:

- Aplicando la definición de la transformada de Laplace, pero como, se pueden imaginar, esto tomaría tiempo; ya que, se debería aplicar el método de integración por partes, tres veces.
- Aplicar la tabla, esto facilita el trabajo, ya que, esta hecho:

$$\mathcal{L}[e^{2t} \cos(wt)] = \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + w^2}$$

- También, se podría aplicar la propiedad de traslación, y esto se va a hacer, para verificar esta propiedad, la cual es:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \mathcal{L}[f(xt)]_{s \rightarrow (s-a)}.$$

En este caso $a = 2$ y se escribiría:

$$\mathcal{L}[f(t)]_{s \rightarrow (s-2)}.$$

Lo que significa que, se encuentra la transformada Laplace de:

$$\mathcal{L}[\cos(wt)].$$

Que es igual a:

$$\mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

En esta transformada obtenida, se reemplaza s por $s - 2$, con lo cual:

$$\mathcal{L}[\cos(wt)]_{s \rightarrow (s-2)} = \frac{s}{s^2 + w^2} = \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + w^2}$$

4. Encuentre la transformada de Laplace de:

$$\mathcal{L}[t \sin(t)]$$

El ejercicio tiene la forma $tf(t)$ y se lo puede resolver por diferentes métodos:

- a) Aplicando la definición de la transformada de Laplace, pero como, se pueden imaginar, esto tomaría tiempo; ya que, se debería aplicar el método de integración por partes, varias veces.
- b) Aplicar la tabla, esto facilita el trabajo, ya que, la transformada esta hecha:

$$\mathcal{L}[t \sin(t)] = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

- c) También, se podría aplicar la propiedad de la segunda derivada, y esto se va a hacer, para verificar esta propiedad, la cual es:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[f(t)]].$$

En este caso el exponente de t es uno. Lo que significa que, se encuentra primero la transformada y después se deriva.

$$\mathcal{L}[\sin(t)].$$

Que es igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(t)] &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ \mathcal{L}[t \sin(t)] &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

5. Encuentre la transformada de Laplace de:

$$\mathcal{L}[t^2 \sin(t)]$$

El ejercicio tiene la forma $tf(t)$ y se lo puede resolver por diferentes métodos:

- a) Aplicando la definición de la transformada de Laplace, pero como, se pueden imaginar, esto tomaría tiempo; ya que, se debería aplicar el método de integración por partes, varias veces.
- b) Aplicar la tabla, la tabla presentada en este libro, no dispone este tipo de transformada. El estudiante debería encontrar una tabla mas completa.
- c) También, se podría aplicar la propiedad de la segunda derivada, y esto se va a hacer, para verificar esta propiedad, la cual es:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[f(t)]].$$

En este caso el exponente de t es dos, por lo que, se debería escribir:

$$\mathcal{L}[t^2f(t)] = \mathcal{L}[t[tf(t)]] = -\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[tf(t)]].$$

Se vuelve aplicar la propiedad:

$$-\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[tf(t)]] = -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[f(t)]]\right] =$$

Por lo que, se puede escribir, en la siguiente forma:

$$-\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[f(t)]]\right] = \frac{d^2}{ds^2}[\mathcal{L}[f(t)]] =$$

Lo que significa que, se encuentra primero la transformada y después se deriva dos veces.

$$\mathcal{L}[\sin(t)].$$

Que es igual a:

$$\mathcal{L}[\sin(t)] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}[t^2 \sin(t)] = \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \frac{d}{ds}\left[\frac{2s}{(s^2 + 1)^2}\right]$$

Se vuelve a derivar y se obtiene la transformada:

$$\mathcal{L}[t^2 \sin(t)] = \frac{-2(3s^2 - 1)}{(s^2 + 1)^3}$$

6. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 0 \quad \text{si } y(0) = y_0$$

Es una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes homogénea.

Como es una ecuación, es una identidad y por lo tanto, se puede aplicar la transformación de Laplace y se hace a ambos lados:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt} - 2y\right] = \mathcal{L}[0]$$

Se aplica propiedades de la Transformación Laplace:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - \mathcal{L}[2y] = 0$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - 2\mathcal{L}[y] = 0$$

$$s\mathcal{L}[y] - y_0 - 2\mathcal{L}[y] = 0$$

$$\mathcal{L}[y](s - 2) = y_0$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{y_0}{s - 2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[y]] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{y_0}{s - 2}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[y]] = y_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - 2}\right]$$

Se aplica las formulas de la tabla:

$$y = y_0 e^{-2t}$$

Que es la integral especifica de la ecuación diferencial, que cumple la condición $y = y_0$

7. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = \sin(wt)$$

Donde: w es una constante; su condición inicial $x(0) = a$, $x'(0) = 0$.

Es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes no-homogénea, con respecto la variable x.

Como es una ecuación, es una identidad y por lo tanto, se puede aplicar la transformada de Laplace y se lo hace a ambos lados:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x\right] = \mathcal{L}[\sin(wt)]$$

Se aplica propiedades de la Transformada la Place:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + \mathcal{L}[w^2x] = \mathcal{L}[\sin(wt)]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + w^2\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[\sin(wt)]$$

Se analiza cada elemento de la transformada:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2\mathcal{L}[x] - sx_0 \quad \text{donde : } x_0 = a$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2\mathcal{L}[x] - sa$$

De la tabla se obtiene el valor:

$$\mathcal{L}[\sin(wt)] = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

Se reemplaza en la ecuación y se realiza operaciones algebraicas:

$$s^2\mathcal{L}[x] - sa + w^2\mathcal{L}[x] = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$\mathcal{L}[x](s^2 + w^2) - sa = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$\mathcal{L}[x](s^2 + w^2) = \frac{w}{s^2 + w^2} - sa$$

$$\mathcal{L}[x] = \left(\frac{1}{(s^2 + w^2)}\right)\left(\frac{w}{s^2 + w^2} - sa\right)$$

$$\mathcal{L}[x] = \left(\frac{w}{(s^2 + w^2)^2} - \frac{sa}{s^2 + w^2}\right)$$

Se observa las expresiones obtenidos y se los compara con las expresiones de la tabla de transformación y si es necesario, se realiza operaciones para que estas expresiones sean idénticos a los de la tabla.

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{w} \cdot \frac{w^2}{(s^2 + w^2)^2} - a \cdot \frac{s}{s^2 + w^2}$$

En este momento, ya se esta en condiciones de aplicar la inversa de la transformación de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[x]] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{w} \cdot \frac{w^2}{(s^2 + w^2)^2} - a \cdot \frac{s}{s^2 + w^2}\right]$$

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{w} \cdot \frac{w^2}{(s^2 + w^2)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[a \cdot \frac{s}{s^2 + w^2}\right]$$

Se recuerda que, a y w son constantes:

$$x = \frac{1}{w} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w^2}{(s^2 + w^2)^2}\right] - a \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + w^2}\right]$$

Los elementos de la tabla permite obtener:

$$x = \frac{1}{2w^2}(\sin(wx) - \cos(wx)) + a \cos(wx)$$

Que es la solución específica de la ecuación diferencial del ejercicio.

8. Obtenga la transformada de $f(t) = t^n$. Para obtener esta formula, se comienza:

- a) Cuando $n = 0$; es decir, $f(t) = t^0 = 1$. Para lo cual, se aplica la propiedad de la derivada.

$$f(t) = 1 \longrightarrow f'(t) = 0; f(t=0) = 1$$

$$\mathcal{L}[f(t) = 1] = \mathcal{L}[f'(t) = 0] = s\mathcal{L}[f(t) = 1] - f(0)$$

$$0 = s\mathcal{L}[f(t) = 1] - 1$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}$$

- b) Cuando $n = 1$; es decir, $f(t) = t$.

$$f(x) = t \longrightarrow f'(t) = 1; f(t=0) = 0$$

$$\mathcal{L}[f(t) = t] = \mathcal{L}[f'(t) = 1] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} = s\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[f(t) = t] = \frac{1}{s^2}$$

c) Cuando $n = 2$; es decir, $f(t) = t^2$.

$$f(x) = t^2 \longrightarrow f'(t) = 2t; f(t=0) = 0$$

$$\mathcal{L}[f(t) = t^2] = \mathcal{L}[f'(t) = 2t] = s\mathcal{L}[f(t) = t^2] - f(0)$$

$$\mathcal{L}[2t] = \frac{1}{s} = s\mathcal{L}[f(t)]$$

$$2\mathcal{L}[f(t) = t] = 2\frac{1}{s^2} = s\mathcal{L}[f(t) = t^2]$$

$$\mathcal{L}[f(t) = t^2] = 2\frac{1}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

En función de los ejercicios realizados, se puede escribir:

$$\mathcal{L}[f(t) = t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Se ha obtenido una formula que representa la solución del ejercicio, la forma para verificar, si la formula es correcta, seria aplicando el método de inducción matemática.

9. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 5e^{2t} \quad \text{si } y(0) = 4$$

Se observa que, es una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes no-homogénea, por lo cual, se puede aplicar la transformación de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt} + 3y\right] = \mathcal{L}[5e^{2t}]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + \mathcal{L}[3y] = \mathcal{L}[5e^{2t}]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + 3\mathcal{L}[y] = 5\mathcal{L}[e^{2t}]$$

$$s\mathcal{L}[y] - f(0) + 3\mathcal{L}[y] = 5\mathcal{L}[e^{2t}]$$

$$s\mathcal{L}[y] - 4 + 3\mathcal{L}[y] = 5\mathcal{L}[e^{2t}]$$

$$s\mathcal{L}[y] - 4 + 3\mathcal{L}[y] = \frac{5}{s-2}$$

$$\mathcal{L}[y](s+3) - 4 = \frac{5}{s-2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s+3) &= \frac{5}{s-2} + 4 \\ \mathcal{L}[y](s+3) &= \frac{5+4(s-2)}{s-2} \\ \mathcal{L}[y](s+3) &= \frac{5+4s-8}{s-2} \\ \mathcal{L}[y](s+3) &= \frac{4s-3}{s-2} \\ \mathcal{L}[y] &= \frac{4s-3}{(s-2)(s+3)}\end{aligned}$$

Lo obtenido al lado derecho de la identidad, no es en nada parecido a ningún de los elementos de la tabla; por lo tanto, lo mejor es aplicar fracciones parciales.

Y lo que se tiene, es una fracción propia y para cada factor una fracción; es decir:

$$\begin{aligned}\frac{4s-3}{(s-2)(s+3)} &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} \\ \frac{4s-3}{(s-2)(s+3)} &= \frac{A(s+3)+B(s-2)}{(s-2)(s+3)} \\ 4s-3 &= A(s+3)+B(s-2)\end{aligned}$$

Se aplica el método de relaciones:

Si $s = 2$

$$4(2)-3 = A(2+3)+B(2-2) \longrightarrow 5 = 5A \longrightarrow A = 1$$

Si $s = -3$

$$4(-3)-3 = A(-3+3)+B(-3-2) \longrightarrow -15 = -5B \longrightarrow B = 3$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{4s-3}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s+3}$$

Se aplica la inversa de la transformada:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[y]] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} + \frac{3}{s+3}\right] \\ y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+3}\right] \\ y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]\end{aligned}$$

Se busca expresiones iguales que en la tabla, se obtiene:

$$y = e^{2t} + 3e^{-3t}$$

Que es la integral especifica de la ecuación diferencial, que cumple las condiciones iniciales dadas.

Las aplicaciones de la Transformación de Laplace son muchas, entre ellas, se debe recalcar la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales

10. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} 3\frac{dy}{dt} - 2\frac{dz}{dt} = 2y + 3z \\ \frac{dy}{dt} + 4\frac{dz}{dt} = -4y + z \end{cases} \quad \text{Si } y(0) = 0; \quad z(0) = 1$$

Para cada una de las ecuaciones se aplica la transformación de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[3\frac{dy}{dt} - 2\frac{dz}{dt}\right] = \mathcal{L}[2y + 3z]$$

$$\mathcal{L}\left[3\frac{dy}{dt}\right] - \mathcal{L}\left[2\frac{dz}{dt}\right] = \mathcal{L}[2y] + \mathcal{L}[3z]$$

$$3\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - 2\mathcal{L}\left[\frac{dz}{dt}\right] = 2\mathcal{L}[y] + 3\mathcal{L}[z]$$

$$3(s\mathcal{L}[y] - f(y=0)) - 2(s\mathcal{L}[z] - f(z=0)) = 2\mathcal{L}[y] + 3\mathcal{L}[z]$$

$$3(s\mathcal{L}[y] - 0) - 2(s\mathcal{L}[z] - 1) = 2\mathcal{L}[y] + 3\mathcal{L}[z]$$

$$3s\mathcal{L}[y] - 2s\mathcal{L}[z] + 2 = 2\mathcal{L}[y] + 3\mathcal{L}[z]$$

$$3s\mathcal{L}[y] - 2\mathcal{L}[y] - 2s\mathcal{L}[z] - 3\mathcal{L}[z] = -2$$

$$\mathcal{L}[y](3s - 2) - \mathcal{L}[z](2s + 3) = -2$$

El mismo procedimiento para la segunda ecuación:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt} + 4\frac{dz}{dt}\right] = \mathcal{L}[-4y + z]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + \mathcal{L}\left[4\frac{dz}{dt}\right] = \mathcal{L}[-4y] + \mathcal{L}[z]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + 4\mathcal{L}\left[\frac{dz}{dt}\right] = -4\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[z]$$

$$s\mathcal{L}[y] - f(y=0) + 4(s\mathcal{L}[z] - f(z=0)) = -4\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[z]$$

$$s\mathcal{L}[y] - 0 + 4(s\mathcal{L}[z] - 1) = -4\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[z]$$

$$s\mathcal{L}[y] + 4s\mathcal{L}[z] - 4 = -4\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[z]$$

$$s\mathcal{L}[y] + 4s\mathcal{L}[z] + 4\mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[z] = 4$$

$$\mathcal{L}[y](s+4) + \mathcal{L}[z](4s-1) = 4$$

Se forma un sistema con lo que se obtuvo:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y](3s-2) - \mathcal{L}[z](2s+3) = -2 \\ \mathcal{L}[y](s+4) + \mathcal{L}[z](4s-1) = 4 \end{cases}$$

Un sistema donde: $\mathcal{L}[y]$ y $\mathcal{L}[z]$ son las variables a calcular. Para facilidad de cálculo, se puede escribir el sistema, con un cambio de variable; es decir, $\mathcal{L}[y] = a$; $\mathcal{L}[z] = b$: se obtendría:

$$\begin{cases} a(3s-2) - b(2s+3) = -2 \\ a(s+4) + b(4s-1) = 4 \end{cases}$$

Se puede resolver por cualquier método, pero el mas aconsejable es Cramer:

$$a = \frac{-2(4s-1) + 4(2s+3)}{(3s-2)(4s-1) + (s+4)(2s+3)} = \frac{14}{14s^2 + 14} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$b = \frac{4(3s-2) + 2(s+4)}{(3s-2)(4s-1) + (s+4)(2s+3)} = \frac{14s}{14s^2 + 14} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$a = \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2 + 1}; \quad b = \mathcal{L}[z] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Se aplica la inversa de la transformada y se obtiene:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right]; \quad z = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right]$$

Al observar la tabla se obtiene:

$$y = \sin(t); \quad z = \cos(t)$$

Que representa la integral especifica del ejercicio y que cumple con las condiciones iniciales.

Como, se puede observar, en los ejercicios resueltos presentados, el proceso de resolver los ejercicios de la transformada Laplace, es el mismo:

- a) Se aplica la transformada de Laplace a la expresión dada,
- b) Se aplica propiedades de la transformada Laplace,
- c) Se despeja un elemento de la forma $\mathcal{L}[f(y)]$
- d) En la mayoría de ejercicios, se aplica fracciones parciales; con lo cual, facilita la aplicación de la inversa de la transformada Laplace $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(y)]]$, con lo cual, se obtiene la solución de la expresión dada.

En algunas ocasiones el proceso de la inversa de Laplace, se complica y en esos casos, se debe aplicar las propiedades de la transformada Laplace.

11. Obtenga la inversa de la transformada Laplace de:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+2}{s}\right)\right],$$

En este caso y en casos parecidos, lo mejor es aplicar propiedades que anteriormente, se analizo:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]$$

Se aplica a ambos lados la inversa de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[tf(t)]] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]\right]$$

Se puede escribir:

$$tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]\right]$$

Se recuerda la definición de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Se aplica la inversa de Laplace a la definición:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Se obtiene:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Se reemplaza en la propiedad:

$$x\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} F(s) \right]$$

Lo último escrito nos indica que, para encontrar la inversa de Laplace de una transformada de Laplace ($F(s)$), se debe:

- a) Encontrar la derivada de $F(s)$,
- b) Encontrar la inversa de Laplace de la derivada.

En este ejercicio, $F(s) = \ln\left(\frac{s+2}{s}\right)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\ln\left(\frac{s+2}{s}\right) \right] &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} F(s) \right] = \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} \left(\ln\left(\frac{s+2}{s}\right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} (\ln(s+2) - \ln(s)) \right] = \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[-\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} (\ln(s+2) - \ln(s)) \right] = \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right] = \end{aligned}$$

Se aplica propiedades de la transformada de Laplace y se obtiene:

$$= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right] = \frac{1}{t} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] \right]$$

Al revisar la tabla de transformaciones se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\ln\left(\frac{s+2}{s}\right) \right] = \frac{1}{t} (1 - e^{-2t})$$

12. Obtenga la inversa de la transformada Laplace de:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 - 2)} \right]$$

En este caso y en casos parecidos, lo mejor es aplicar propiedades que anteriormente, se analizo y un elemento que nos indica que se debe aplicar la transformada de Laplace con integrales, es $\frac{1}{s}$.

La propiedad de la transformada de Laplace con integrales es:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)]$$

Se aplica a ambos lados la inversa de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] \right]$$

Se puede escribir:

$$\int_0^t f(t) dt = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] \right]$$

Se recuerda la definición de la transformada Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Se aplica la inversa de Laplace a la definición:

$$\mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[f(t)]] = \mathcal{L}^{-1} [F(s)]$$

Se obtiene:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)]$$

Se reemplaza en la propiedad:

$$\int_0^t \mathcal{L}^{-1} [F(s)] dt = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} F(s) \right]$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} F(s) \right] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1} [F(s)] dx$$

Lo último escrito nos indica, que para encontrar la inversa de Laplace de una transformada de Laplace ($F(s)$), se debe:

- Encontrar la inversa de la transformada Laplace de $F(s)$,
- Encontrar la integral de esa inversa de Laplace.
- En el caso de que, el componente $\frac{1}{s}$ estuviese al exponente 'n', en ese caso, se deberá integrar 'n' veces.

En este ejercicio, $F(s) = \frac{1}{(s^2 - 2)}$, se debe encontrar su inversa Laplace; es decir:

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 - 2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{s^2 - 2} \right] \right]$$

Se aplica propiedades de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{s^2 - 2} \right] \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}}{s^2 - 2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}x)$$

Se encuentra la integral:

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sinh(\sqrt{2}t) dt =$$

Se realiza un cambio de variable $\sqrt{2}t = k$, se deriva $\sqrt{2}dt = dk$, se reemplaza :

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sinh(k) \frac{dk}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(k) dk = \frac{1}{2} \cosh k|_0^t = \frac{1}{2} \cosh(\sqrt{2}t)|_0^t$$

Por lo tanto, se reemplaza los limites:

$$\frac{1}{2} \cosh t|_0^t = \frac{1}{2} [\cosh t - 1]$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s^2 - 2} \right) \right] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 - 2} \right] dt = \frac{1}{2} [\cosh t - 1]$$

13. Resuelva la ecuación diferencial aplicando solamente propiedades de Laplace:

$$y'' + 4y' + 4y = (\cos t + 2 \sin t)e^{-2t} \quad \text{si } y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \quad (4.1)$$

La ecuación (1.1) es una identidad y se aplica propiedades de álgebra, a ambos lados aplica la operación de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 4y\} = \mathcal{L}\{(\cos t + 2 \sin t)e^{-2t}\} \quad (4.2)$$

A cada lado de la ecuación (1.2) se aplica propiedades de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos t\} + 2\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin t\} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \mathcal{L}\{y\} - s(f(t=0) - y'(t=0)) = s^2 \mathcal{L}\{y\} + s(1) - 1 \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} + 1 \quad (4.5)$$

Se aplica propiedades de Laplace al lado derecho de la ecuación (1.2):

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos t\} = \mathcal{L}\{\cos t\}_{s \rightarrow s+2} = \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right)_{s \rightarrow s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin t\} = \mathcal{L}\{\sin t\}_{s \rightarrow s+2} = \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)_{s \rightarrow s+2} = \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \quad (4.7)$$

De las expresiones (4.4) a (4.7) se reemplaza en la ecuación (4.3):

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} + s - 1 + 4s \mathcal{L}\{y\} + 4 + 4 \mathcal{L}\{y\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{(s+2)^2+1} \quad (4.8)$$

Se aplica asociativa y distributiva:

$$\mathcal{L}\{y\} [s^2 + 4s + 4] + s + 3 = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{(s+2)^2+1} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}\{y\} [s^2 + 4s + 4] = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1} - (s+3) \quad (4.10)$$

Se despeja $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\mathcal{L}\{y\} = \left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1} - (s+3) \right] \left[\frac{1}{s^2+4s+4} \right] \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \left[\frac{s+4}{(s+2)^2+1} - (s+3) \right] \left[\frac{1}{[(s+2)^2]} \right] \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \left[\frac{s+4}{[(s+2)^2+1](s+2)^2} \right] - \left[\frac{s+3}{(s+2)^2} \right] \quad (4.13)$$

Ahora, se aplica la inversa de Laplace a ambos lados de (4.13) y aplicamos las propiedades de la inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{y\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[\frac{s+4}{[(s+2)^2+1](s+2)^2} \right] - \left[\frac{s+3}{(s+2)^2} \right] \right\}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[\frac{s+4}{[(s+2)^2+1](s+2)^2} \right] \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[\frac{s+3}{(s+2)^2} \right] \right\}$$

Se tiene dos inversas que resolver, se lo hará independientemente y se aplicará sus propiedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[\frac{s+3}{(s+2)^2} \right] \right\} &= e^{-2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[\frac{s+3}{(s+2)^2} \right] \right\} \begin{matrix} s+2 \rightarrow s \\ s \rightarrow s-2 \end{matrix} = e^{-2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[\frac{s-2+3}{(s)^2} \right] \right\} \\ &= e^{-2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[\frac{s+1}{(s)^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Se divide en dos fracciones y se aplica propiedades:

$$= e^{-2t} \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{(s)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \right] = e^{-2t} \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \right] = \quad (4.14)$$

Se utiliza la tabla de Laplace básica:

$$= e^{-2t} [1 + t] = e^{-2t} + te^{-2t} \quad (4.15)$$

En forma similar se trabaja con el segundo elemento:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \mathcal{L} \{ y \} \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+4}{[(s+2)^2+1](s+2)^2} \right\} \begin{matrix} s+2 \rightarrow s \\ s \rightarrow s-2 \end{matrix} = e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{[(s)^2+1](s)^2} \right\}$$

La última parte de la expresión (4.13) se la puede comparar con la propiedad de la inversa:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} F(s) \right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \} dt$$

En el ejercicio se tiene $\frac{1}{s^2}$; por lo tanto, se tendrá la doble integral:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} F(s) \right\} = \int_0^t \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{s^2+1} \right\} dt$$

Se encuentra la inversa, para lo cual, se separa en dos fracciones:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{s^2+1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+1} \right\} = \cos t + 2 \sin t$$

Se integra:

$$\int_0^t (\cos t + 2 \sin t) = \int_0^t \cos t + 2 \int_0^t \sin t = \sin t|_0^t - 2 \cos t|_0^t = \sin t - 2(\cos t - 1)$$

La segunda integral:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\sin t - 2(\cos t - 1)) dt &= \int_0^t \sin t dt - 2 \int_0^t \cos t dt + 2 \int_0^t dt = \\ &= e^{-2t} (-\cos t|_0^t - 2(\sin t|_0^t) + 2t|_0^t) = -(\cos t - 1) - 2 \sin t + 2t \end{aligned}$$

La respuesta seria:

$$\begin{aligned} &= e^{-2t} + te^{-2t} + e^{-2t} (-\cos t|_0^t - 2(\sin t|_0^t) + 2t|_0^t) = -(\cos t - 1) - 2 \sin t + 2t \\ &e^{-2t} (3t - \cos t - \sin t + 2) \end{aligned}$$

4.5. Ejercicios Propuestos de la Transformada de Laplace.

1. Encontrar las transformadas de:

$$a) f(t) = \cosh(t) + \cos(t)$$

$$a) f(t) = \sinh(t) + \sin(t)$$

$$b) f(t) = \cosh(t) - \cos(t)$$

$$b) f(t) = \sinh(t) - \sin(t)$$

$$c) f(t) = \sin^2(t)$$

$$c) f(t) = \cos^2(t)$$

$$d) f(t) = \cos(at)\cos(bt)$$

$$d) f(t) = \sin(at)\cos(bt)$$

$$e) f(t) = t \sinh(at)$$

$$e) f(t) = t^2 \sin(at)$$

$$f) f(t) = e^{-t} \cosh(t)$$

$$f) f(t) = \sinh(t) - t$$

$$g) f(t) = t \cos(at)$$

2. Aplicando la transformada de Laplace resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, dadas la condiciones iniciales:

$$a) y' + 2y = 6$$

$$y(0) = 0$$

$$b) y' - y = xe^{2x}$$

$$y(0) = 0$$

$$c) y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x$$

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 2$$

$$d) y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \sin(x)$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$e) y'' - 4y' + 4y = x^2 - 8$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$f) y'' + y' = \cos(t)$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

$$g) 2y'' + y = 0$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$h) y''' - y'' - 4y' + 4y = 8xe^{-x}$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 1$$

$$i) y''' - 3y' + 2y = 8e^{-x}$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0$$

$$j) y'' + w^2 y = \cos(wt)$$

$$y(0) = a \quad y'(0) = 1$$

$$k) x'' + a^2 x = ce^{-bt}$$

$$x(0) = 0 \quad x'(0) = 1$$

$$l) y'' + 4y = x \sin(2x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$m) y''' - y = x^4$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$n) y''' - y' = \sin(x)$$

$$y(1) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$\tilde{n}) y''' - 2y' + y = \sin(x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$o) y'' + \frac{5}{2}y' = \frac{5}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$$

$$p) y'' + 2y = x^2 + 2$$

$$y(0) = 0 \quad y'(1) = 3$$

$$\begin{array}{lll}
 q) \ y'' - 3y' + 2y = e^x & y(0) = 2 & y'(0) = 1 \\
 r) \ y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \sin(x) & y(1) = 0 & y'(0) = 2 \\
 s) \ y'' + 4y = x^2 + e^{2x} \sin(x) & y(0) = 0 & y'(0) = 0 \\
 t) \ y'' + 4y = x \sin(x) & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \\
 u) \ y'' - 3y' + 2y = 3x + 5 \sin(2x) & y(0) = 2 & y'(0) = 0 \\
 v) \ y'' + 3y' + 2y = \sin(2x) + \cos(x) & y(0) = 0 & y'(0) = 0 \\
 w) \ y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + 3 \sin(2x) + 1 & y(0) = 2 & y'(0) = 1
 \end{array}$$

TABLA DE TRANSFORMACIONES LAPLACE

N°	Núcleo $f(x)$; $x > 0$	Transformada $\mathcal{L}[f(x)]$
1	1	$\frac{1}{s}; \text{ re } s > 0$
2	e^{ax}	$\frac{1}{s-a} \text{ re } s > \text{ re } a > 0$
3	$\cos(wx)$	$\frac{s}{s^2 + w^2} \text{ re } s > 0$
4	$\sin(wx)$	$\frac{w}{s^2 + w^2} \text{ re } s > 0$
5	$\sinh(wx)$	$\frac{w}{s^2 - w^2} \text{ re } s > w $
6	$\cosh(wx)$	$\frac{s}{s^2 - w^2} \text{ re } s > w $
7	xe^{ax}	$\frac{1}{(s-a)^2} \text{ re } s > \text{ re } a$
8	$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}} \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{)}$

9	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \text{re } s > 0$
10	$\frac{t}{2w} \sin(wx)$	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2} \quad \text{re } s > 0$
11	$e^{ax} \cos(wx)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2} \quad \text{re } s > 0$
12	$e^{ax} \sin(wx)$	$\frac{w}{(s-a)^2 + w^2} \quad \text{re } s > 0$
13	$e^{ax} \cosh(wx)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - w^2}$
14	$e^{ax} \sinh(wx)$	$\frac{w}{(s-a)^2 - w^2}$

Bibliografía

- [1] ZAKOSWKI WOJCIECH *Matematyka*, editorial Técnico-científica, Polonia, Lodz 2006.
- [2] STEINHAUS HUGON *105 Zadan z Matematiki*, Gis Wroclaw 2005.
- [3] ROMAN LEITNER y WOJCIECH ZAKOWSKI *Matematyka* editorial técnico-científico, Varsovia, 1980.
- [4] ROMAN LEITNER *Zaris Matematyki Wyzszej*, editorial técnico-científico, Varsovia, 1981.
- [5] H. HALL y R. KNIGHT *Algebra Superior*, editorial Hispano Americana, Mexico, 1980,2005,2015.
- [6] JOSE LUIS MATAIX *Mil Problemas de Aritmetica y Algebra*, editorial Dossat, Madrit, España, 1970,1983,2015.
- [7] ANDRZEJ FLISOWSKI y RADOSLAW GRZYMKOWSKI *Matematyka*, Polonia, Gliwice, 2002.
- [8] RICHARD JOHNSONBAUGH *Matemáticas Discretas* editorial Iberoamericana, Mexico,2012.
- [9] OSWIN CRESPO *Ejercicios y Problemas de Algebra* editorial Alameda, España, Madrid 1970.
- [10] IZYDOR DZIUBINSKI y LUCJAN SIEWIERSKI *Elementy Matematyki Wyzszej* editorial Politechniki lodzkiej, Polonia, Lodz 1980, 1997.
- [11] WACLAW LEKSINSKI BOHDAN MACUKOW y WOJCIECH ZAKOWSKI *Matematyka dla maturzystow* editorial Técnico-científico Varsovia, 1991
- [12] RAYMOND A. BARNETT *Algebra y Trigonometria* editorial McGraw-Hill, Mexico,1988.
- [13] YAKOVLIEV G. N *Algebra y Principios del Análisis* editorial MIR, Moscu 1985.

- [14] JACK R. BRITTON y IGNACIO BELLO editorial Latinoamericana, Mexico, 1979.
- [15] NORBERT DROBKA y *Matematyka* editorial Técnico-científico, Polonia, Varsovia 1991
- [16] POPOV A. DANKO P. y KOZHEVNIKOVA *Matemáticas Superiores* editorial MIR, Moscu, 1985.
- [17] DEMIDOVICH B. YAMPOLSKI A. EFIMOV A. BOLGOV V. y POSPELOV S. *Problemas de las Matemáticas Superiores* editorial MIR, Moscu 1981.
- [18] DEBORAH HUGHES y ANDREW M. GLEASON *Cálculo* editorial Continental, Mexico, 2000.
- [19] LECH WŁODARSKI y EWA HENS *Matematyka na Wyższe Uczelnie* editorial Técnico-científico, Polonia, Varsovia, 2005.
- [20] GRIMALDI RALPH *Matemáticas Discretas* editorial Iberoamericana, Mexico, 2015.
- [21] SULLIVAN MICHAEL *Precálculo* sexta edición, Mexico, 2009.
- [22] C. LIU *Matemáticas Discretas* editorial McGraw-Hill, Mexico, 2007.
- [23] MACUKOW BOHDAN *Matematyka w Zadaniach* editorial Técnico-científica, Polonia, Varsovia, 2008.
- [24] ARCOS GARCIA JOE *Problemas de Lógica; Mil Problemas en Matemática* editorial ESPE, Ecuador, Quito, 2008, 2009.
- [25] KIELBASE ANDRZEJ *zadan z matematyki* editorial Técnico-científico Polonia, Varsovia 2015.
- [26] W. KRYSICKI y L. WŁODARSKI *Analiza Matematyczna w Zadaniach* editorial Técnico-científico, Polonia, Varsovia, 2015.
- [27] EDWIN DIMITRI NIETO GUERRERO *Cálculo de Proposiciones y de Predicados* Editorial Casadelpolo, Ecuador, Manabi, 2016.
- [28] EDWIN DIMITRI NIETO GUERRERO *Compendio de Matemáticas Volumen I* Editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2018.
- [29] EDWIN DIMITRI NIETO GUERRERO *Compendio de Matemáticas Volumen II* Editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2019.

- [30] EDWIN DIMITRI NIETO GUERRERO *Compendio de Matemáticas Volumen III* Editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2020.
- [31] EDWIN DIMITRI NIETO GUERRERO *Compendio de Matemáticas Volumen VII. Ecuaciones Diferenciales* Editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2021.
- [32] EDWIN DIMITRI NIETO GUERRERO *Compendio de Matemáticas Volumen VI: Calculo Integral* Editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2024.
- [33] BARTOSZNSKI R. CZAPLINSKI W. DZIUBINSKI I. KACKI E. KOLUPA M. OTTO E. SRODKA T. SWIATKOWSKI T. WALISZEWSKI W y WŁODARSKI L *Poradnik Matematyczny* editorial Técnico-científico Polonia, Varsovia 1982.
- [34] PISKUNOV N. *Cálculo Diferencial e Integral* Editorial MIR, Moscu 1973,1985,2006,2012.
- [35] KUROSCH A.G. *Curso de Álgebra Superior* editorial MIR, Moscu 1981, 1998.
- [36] KUDRIAVTSEV L. D. *Curso de Análisis Matemático* Editorial MIR, Moscu, 1984, 2010.