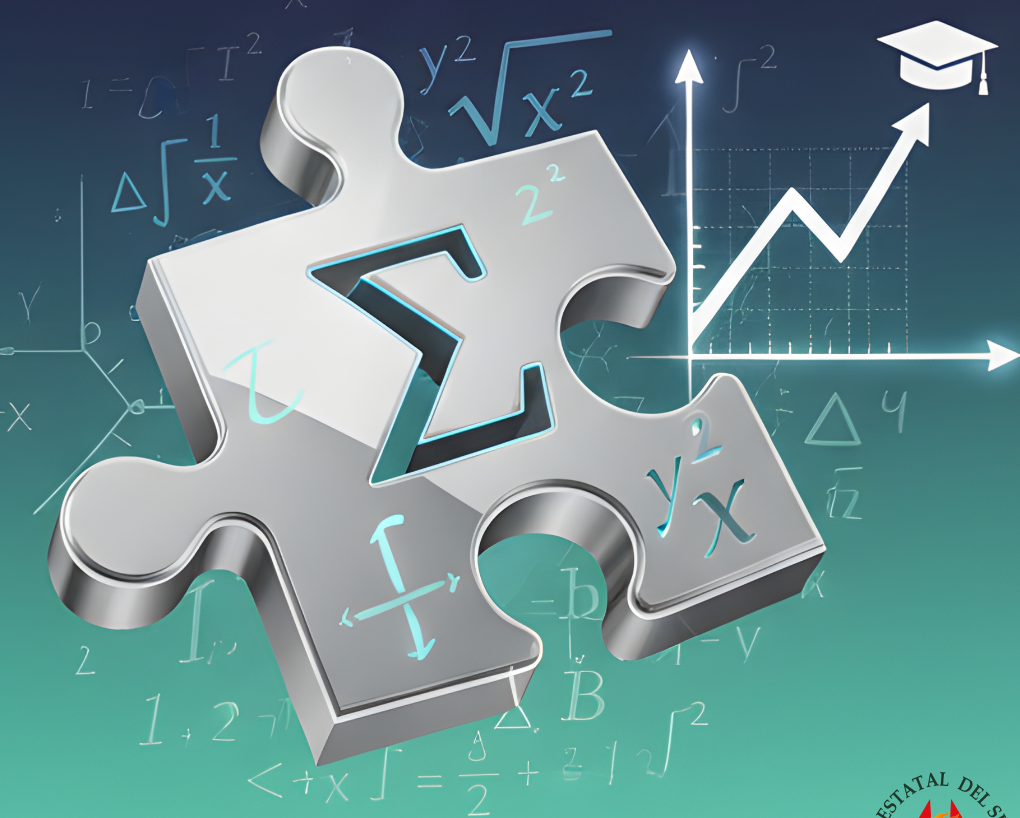
SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR



SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

eBook

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Ignacio Estévez Valdés

Alberto Rodríguez Rodríguez

Segundo Gilfredo Aliaga Céspedes

Kleber Dionisio Orellana Suarez

Na Gyun Yoon García

Wilter Leonel Solórzano Álava

Autores Investigadores

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

AUTORES
INVESTIGADORES

Dr. Ignacio Estévez Valdés, PhD
Universidad Estatal del Sur de Manabí
ignacio.estevez@unesum.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-8143-8466

Dr. Alberto Rodríguez Rodríguez, PhD
Universidad Estatal del Sur de Manabí
alberto.rodriguez@unesum.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-1238-0106

Dr. Segundo Gilfredo Aliaga Céspedes, PhD
Universidad de Granma
segundoaliaga1952@gmail.com

Ing. Kleber Dionisio Orellana Suarez, Mg.CA
Universidad Estatal del Sur de Manabí
kleber.orellana@unesum.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-7835-9708

Ing. Na Gyun Yoon García, Mg.
Universidad Estatal del Sur de Manabí
na.yoon@unesum.edu.ec
https://orcid.org/0009-0004-0551-6249

Ing. Wilter Leonel Solórzano Álava Mg.
Universidad Estatal del Sur de Manabí
wilter.solorzano@unesum.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-3146-0312

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

REVISORES
ACADÉMICOS

Edesmin Wilfrido Palacios Paredes PhD.
Doutor em Educacao;
Mestre em Educacao;
Mestre em Filosofia;
Licenciado en Ciencias de la Educación y Profesor de Segunda Enseñanza en la Especialización de Filosofía
Docente Investigador de la Universidad Central del Ecuador
wilfrido.palacios@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2591-4602

Eduardo Lázaro Rodríguez Rodríguez
Master en Ciencias Físicas;
Licenciado en Física;
Docente Universidad Central del Ecuador;
elrodriguez@uce.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-1780-5756

CATALOGACIÓN **BIBLIOGRÁFICA**

AUTORES:
Ignacio Estévez Valdés
Alberto Rodríguez Rodríguez
Segundo Gilfredo Aliaga Céspedes
Kleber Dionisio Orellana Suarez
Na Gyun Yoon García
Wilter Leonel Solórzano Álava

Título: Soluciones razonadas de ejercicios integradores de matemática para ingresar a la educación superior, tomo 1
Descriptores: Educación superior; Investigación pedagógica; Modelo educacional; Indicadores educativos.
Código UNESCO: 12 Matemáticas
Clasificación Decimal Dewey/Cutter: 510/ Es859
Área: Ciencias Naturales y Matemáticas
Edición: 1era
ISBN: 978-9942-654-51-9
Editorial: Mawil Publicaciones de Ecuador, 2025
Ciudad, País: Quito, Ecuador
Formato: 148 x 210 mm.
Páginas: 141
DOI: https://doi.org/10.26820/978-9942-654-51-9
URL: https://mawil.us/repositorio/index.php/academico/catalog/book/185

Texto para docentes y estudiantes universitarios

El proyecto didáctico **Soluciones razonadas de ejercicios integradores de Matemática para ingresar en la Educación Superior,** es una obra colectiva escrita por varios autores y publicada por MAWIL; publicación revisada por el equipo profesional y editorial siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento de publicaciones de MAWIL de New Jersey.

© Reservados todos los derechos. La reproducción parcial o total queda estrictamente prohibida, sin la autorización expresa de los autores, bajo sanciones establecidas en las leyes, por cualquier medio o procedimiento.

Usted es libre de:
Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.
Adaptar — remezclar, transformar y construir a partir del material para cualquier propósito, incluso comercialmente.

Director Académico: PhD. Lenin Suasnabas Pacheco
Dirección Central MAWIL: Office 18 Center Avenue Caldwell; New Jersey # 07006
Gerencia Editorial MAWIL-Ecuador: Mg. Vanessa Pamela Quishpe Morocho
Direción de corrección: Mg. Ayamara Galanton.
Editor de Arte y Diseño: Leslie Letizia Plua Proaño
Corrector de estilo: Lic. Marcelo Acuña Cifuentes

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Índices

Contenidos

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Índices

Figuras

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

Índices

Tablas

MAWIL
Publicaciones Impresas
y Digitales

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Prólogo

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

El acceso a la educación superior es un desafío que exige una preparación sólida y multifacética. En este primer tomo de "Soluciones Razonadas de Ejercicios Integradores de Matemática para Ingresar en la Educación Superior", hemos recopilado una serie de unidades fundamentales que abarcan los pilares básicos del conocimiento matemático, esencial para cualquier aspirante a la educación superior.

Este libro está diseñado para guiar al estudiante a través de cinco unidades clave: Cálculo Numérico, Estadística Descriptiva, Trabajo con Variables, Ecuaciones e Inecuaciones, y Funciones de una Variable Real. Cada unidad se presenta de manera didáctica, con ejercicios cuidadosamente seleccionados y soluciones detalladamente razonadas, para garantizar una comprensión profunda y aplicable de los conceptos.

El propósito de esta obra es no solo proporcionar respuestas, sino cultivar en los estudiantes la capacidad de razonamiento crítico y la habilidad para enfrentar problemas matemáticos con confianza y pericia. Al desglosar cada ejercicio, buscamos fomentar una apreciación más profunda del proceso matemático y su relevancia en el mundo real.

Esperamos que este tomo se convierta en una herramienta valiosa en la preparación académica de los estudiantes, y que inspire un amor por las matemáticas que trascienda las aulas y se refleje en su éxito futuro.

¡Los autores!

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Introducción

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

La matemática constituye uno de los pilares fundamentales en la formación académica de todo estudiante que aspira a ingresar a la Educación Superior. Este libro nace de la necesidad de proporcionar una herramienta didáctica que facilite la preparación integral de los estudiantes, ofreciendo un enfoque metódico y razonado para la resolución de ejercicios matemáticos que comúnmente aparecen en los exámenes de ingreso universitario.

A lo largo de cinco capítulos cuidadosamente estructurados, esta obra aborda temas esenciales como el cálculo numérico, la teoría de conjuntos, la estadística descriptiva, ecuaciones e inecuaciones, y sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Cada capítulo ha sido diseñado para proporcionar no solo las soluciones a los ejercicios, sino también el razonamiento detallado detrás de cada paso, permitiendo al estudiante comprender a profundidad los procesos matemáticos involucrados.

La característica distintiva de este libro radica en su enfoque pedagógico: cada ejercicio se presenta acompañado de una explicación paso a paso, destacando los conceptos clave y las estrategias de resolución más efectivas. Este método permite al estudiante desarrollar no solo la capacidad de resolver problemas similares, sino también fortalecer su pensamiento lógico-matemático y su habilidad para enfrentar nuevos desafíos académicos.

Este primer tomo está dirigido tanto a estudiantes que se preparan de manera autodidacta como a docentes que buscan material de apoyo para sus clases. La selección de ejercicios integradores permite una comprensión holística de las matemáticas, estableciendo conexiones entre diferentes áreas y conceptos, lo cual es fundamental para el éxito en los estudios superiores.

El objetivo principal de esta obra es proporcionar una base sólida en matemáticas fundamentales, facilitando la transición entre la educación media y superior. A través de la práctica sistemática y el entendimiento profundo de los conceptos presentados, los estudiantes podrán desarrollar la confianza y las competencias necesarias para enfrentar con éxito los desafíos académicos que encontrarán en su futura formación universitaria.

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Capítulo 1

Cálculo Numérico

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

Introducción

Realice un resumen de los procedimientos para:

- El cálculo con números naturales.
- El cálculo con números fraccionarios.
- El cálculo con números racionales.

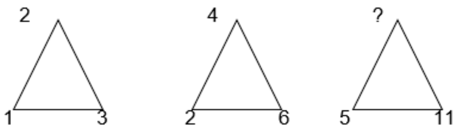
Ejercicios 1. Cálculo Numérico

1. ¿Cuál es el doble del menor número de cuatro cifras distintas?

2. ¿Cuál es el número que falta en el triángulo de la derecha?

Figura 1.

Cálculo Numérico en los triángulos.



3. Completa el siguiente cuadrado mágico.

Figura 2.

Cuadrado mágico.

10		$\frac{16}{3}$	9
	$\frac{25}{3}$	8	
	7		$\frac{26}{3}$
6			5

4.Hoy es domingo ¿Qué día de la semana será dentro de 100 días?

5.¿Qué parte de la semana representa los días que no asistes a la escuela?

6.Han transcurrido 7 meses del año ¿Qué parte del año falta por transcurrir?

7.El profesor de Matemática tiene un total de 36 libretas

1.Si le das tres libretas a Dayana ¿Qué parte del conjunto recibió Dayana?

2.¿Cuántas libretas son 2/3 del resto?

3. Si le das 3 libretas a Yosiel ¿Qué parte del total falta por repartir?

8. Un alumno que estudia sus lecciones para el día siguiente, empleó 3/4 horas para estudiar Matemática, 1/2 horas para Español y 1/4 horas para Historia ¿Cuántos minutos emplea en total?

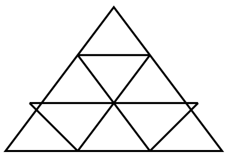
9. En un grupo de 9° grado de una escuela, 1/3 de los estudiantes practica béisbol, 5/6 del resto practica natación y los restantes esgrima ¿Qué parte práctica esgrima?

10. El número de huevos que hay en una caja se duplica cada minuto y al cabo de 3/4 de horas se llena ¿Cuándo estuvo la caja por la mitad?

11. ¿Cuántos triángulos se han formado en la figura?

Figura 3.

Figura de triángulos para calculo numérico.



12. Un joven invierte un tercio de su tiempo en estudiar, la sexta parte en practicar deportes y la octava parte en resolver problemas matemáticos. ¿Qué parte del tiempo tiene libre? ¿A cuántas horas equivale el tiempo libre?

13. Las partes de un número es el doble del número 15. ¿Cuál es el número?

14. El promedio de tres fracciones es 1. Dos de ellas son y ¿Cuál es la otra fracción?

15. Halle todos los números naturales n que cumplen simultáneamente todas las condiciones siguientes:

- $1000 < n < 1550$,
- es divisible por 51,
- es par,
- la suma de las cifras básicas del número es 9.

16. Halle los números que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- 300 < n < 400
- n es divisible por 2 y 11 a la vez.

17.¿Cuáles son los números naturales cuyo producto es 114 y su suma 41?

18. ¿Cuáles son los números naturales cuyo producto es 180 y su suma un cubo perfecto?

19. ¿Cuál es la suma de los números naturales del 1 al 50?

20. María gastó en la tienda $60,00. Esto representa 3/8 de su dinero. ¿Cuánto dinero había gastado si hubiera utilizado 1/8 del total?

21. ¿Cuántos y cuáles son los divisores de los siguientes números?

a) 36; b) 48; c) 150; d) 180

Respuestas ejercicios 1

1. El menor número de cuatro cifras distintas es 1023 y su doble es 2046

2. El que falta es el 8, pues si suma los tres números correspondientes a los 3 vértices de los respectivos triángulos, la suma del primero es seis, la suma de los vértices del segundo es el doble de seis y el tercero debe ser el doble de la suma de los tres vértices del segundo que seria 24, por eso, el vértice que falta es el 8.

Figura 4.

Respuesta cuadrado mágico.

3.

10	$\frac{17}{3}$	$\frac{16}{3}$	9
$\frac{19}{3}$	$\frac{25}{3}$	8	$\frac{22}{3}$
$\frac{23}{3}$	7	$\frac{20}{3}$	$\frac{26}{3}$
6	$\frac{27}{3}$	$\frac{30}{3}$	5

4. 100 días divididos por 7 días por semana da un residuo de 2 días (porque 100÷7=14100 \div 7 = 14 semanas y 2 días).

Esto significa que, dentro de 100 días, será 2 días después de domingo. Entonces, sumamos 2 días a domingo: lunes, martes.

5. Representa 2/7 de la semana, pues no se asiste a clases ni el sábado ni el domingo.

6. Faltan 5/12

7. a) Recibió 1/12 de 36

b) Serian 20 libretas.

c) Falta por repartir 10 libretas.

8. Emplea en total 90 minutos.

9. Practican esgrima 1/9 del total de estudiantes de la escuela.

10. Estuvo por la mitad a los 44 minutos.

11. Se forman en la figura 10 triángulos.

12. El joven tiene libre 3/8 de su tiempo, lo que equivale a 3/8. 24h = h

13. El número que buscamos es **75**.

14. La otra fracción es 3/10.

15. Los números que cumplen simultáneamente todas las condiciones son: **1224** y **1530**

16. Los números que cumplen ambas condiciones simultáneamente son: 308, 330, 352, 374, 396.

17. Los números naturales que cumplen con las condiciones son 38 y 3.

18. La solución correcta es el par de números **12** y **15**, cuya suma es el cubo perfecto **19**. La suma de los números naturales del 1 al 50 es **1275**.

20. Si María hubiera utilizado un octavo de su dinero total, habría gastado **$20**.

21. Para encontrar los divisores de 36, buscamos todos los números que dividen a **36** sin dejar residuo

a) Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

b) Los divisores de 48 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

c) Los divisores de 150 son: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150

d) Los divisores de 180 son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180, 23

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Capítulo 2

Teoría de Conjuntos Numéricos

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

Introducción

Aspectos para tratar:

1. Conjuntos

2. Unión de conjuntos

3. Diferencia de conjuntos.

4.Intersección de conjuntos

5. Los números naturales

6. Los números enteros.

7. Los números impares.

8. Los números pares.

9. Los números fraccionarios.

10. Los números racionales.

11. Los números irracionales.

12. Los números reales.

Contenidos de Educación Superior relacionados con los Conjuntos y los Dominios Numéricos.

- Cálculo de valores funcionales.
- Determinación de propiedades de funciones lineales, cuadráticas, potenciales, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas a partir de su ecuación o su gráfico.
- Comparación por intervalos de valores funcionales.
- Determinar soluciones en diferentes dominios numéricos en ecuaciones e inecuaciones lineales, cuadráticas, fraccionarias, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas e inecuaciones lineales, cuadráticas, fraccionarias, exponenciales y logarítmicas, en sistemas de ecuaciones lineales, con dos y tres incógnitas y en sistemas cuadráticos.
- Geometría plana y del espacio.

Aspectos teóricos básicos para tratar en este curso inicial.

Conjunto

Se denomina conjunto a una colección de objetos bien definida. Por bien definida se entiende que siempre es posible decidir si un objeto está o no en el conjunto.

Formas de representar Conjuntos

- El conjunto de días de una semana.

A = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

1. El conjunto de todas las letras del alfabeto .
2. El conjunto A =
3. Los conjuntos formados por intervalos.

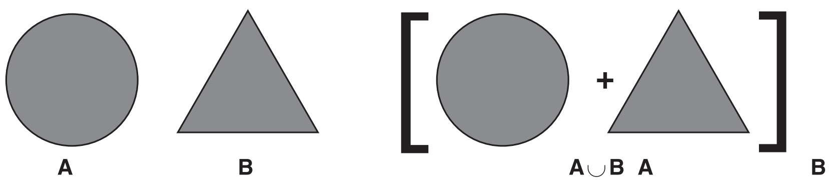
Operaciones entre conjuntos

Unión

La unión de los conjuntos y se denota por , es el conjunto formado por todos los elementos de y y se lee unión (Huertas Sánchez, s/f).

Figura 5.

Unión de conjuntos.

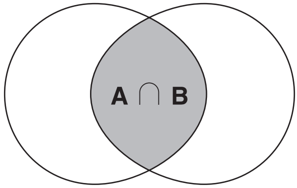


Intersección

La intersección de los conjuntos y se denota por , es el conjunto formado por todos los elementos comunes de y y se lee intersección (Huertas Sánchez, s/f).

Figura 6.

Intersección de conjuntos.

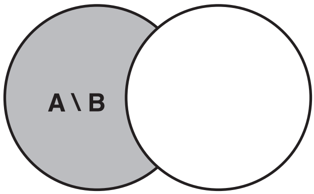


Diferencia

La diferencia de los conjuntos y se denota por \ es el conjunto de todos los elementos que están en , pero que no están en .

Figura 7.

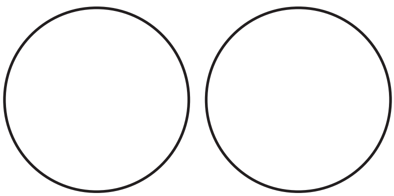
Diferencia de conjuntos.



Dos conjuntos son disjuntos si su intersección es igual al conjunto vacío.

Figura 8.

Conjunto vacío.



Subconjunto

Un conjunto es subconjunto de otro conjunto y se denota por , si todos los elementos de están también en . Si es un subconjunto de , entonces decimos que el conjunto está incluido en .

- $\emptyset \subset A$(para todo conjunto).

Algunas Definiciones Útiles Relativas A Este Dominio Numérico:

- El sucesor o consecutivo de todo número natural es *n* el número natural *n+1*.
- El antecesor de todo número natural *n≥1*, es el número natural
- Los números pares {0,2,4,6,8,10...} se expresan de la forma 2n
- Siempre que sumamos dos números pares cualquieras el resultado es otro número par.
- Los números impares {1,3,5,7,9,11,13...}se expresan de la forma *2n+1*
- Siempre que sumamos dos números impares cualquiera el resultado es un número par.
- Un número natural compuesto es aquel que tiene más de dos divisores. Por ejemplo, el número 27 es compuesto, porque sus divisores son: 1, 3, 9 y 27. El número 7 no es un número compuesto, pues solamente tiene dos divisores. El único número natural par que no es compuesto es el número 2.
- Los números primos {2,3,5,7,11,13,17,19,23,...} son aquellos que sólo son divisibles por 1 y por el mismo.

Los Números Fraccionarios

Los números fraccionarios son aquellos que se expresan de las formas $\frac{a}{b}\left(a, b \in \mathbb{N} : b \neq 0\right)$ o como una expresión decimal periódica y se denota por Q+.

- En la fracción $\frac{a}{b}\left(a, b \in \mathbb{N} : b \neq 0\right)$, a es el numerador y el denominador.
- En una fracción, el denominador indica en cuántas partes se dividirá un entero y el numerador indica cuántas de esas partes vamos a tomar.
- Una fracción es una representación de una división a través de la siguiente notación: $\frac{a}{b} = r$ donde a es el dividendo, llamado numerador en la fracción, es el divisor, llamado denominador en la fracción y r es el cociente.
- Se dice que dos fracciones son equivalentes si tienen exactamente el mismo cociente. Por ejemplo, las fracciones: $\frac{4}{5}$ y $\frac{12}{15}$ son equivalentes.

- Cuando el numerador de una fracción es mayor al denominador de la misma, decimos que la fracción es impropia. Lo que significa, si el cociente r de la fracción es mayor a 1, entonces la fracción es impropia.
- Cuando el numerador de una fracción es menor al denominador de la misma, decimos que la fracción es propia. Lo que significa, si el cociente r de la fracción es menor a 1, entonces la fracción es propia.
- Aquella fracción que cumple que sus elementos (numerador y denominador) tienen factores comunes es una fracción reductible o simplificable.
- Aquella fracción que cumple que sus elementos (numerador y denominador) no tienen factores comunes es una fracción irreductible. Lo que significa, el numerador y el denominador de la fracción son primos relativos cuando la fracción es irreducible.
- Cuando un número se escribe con una parte entera y una fraccionaria, por ejemplo $2\frac{3}{7}$ es una fracción mixta.

Los Números Enteros

El conjunto de los números enteros es: “El conjunto formado por los números naturales y sus opuestos” y se denota por .

Z= {…,, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}

Los Números Racionales

El conjunto de los números racionales es el conjunto formado por los números enteros y los números fraccionarios y sus opuestos. Se denota por .

- Un número es racional cuando se puede expresar de la forma $\frac{a}{b} a, b \in \mathbb{Z} : b \neq 0)$ o como una expresión decimal periódica.

Números irracionales

Es aquel que está formado por números que no pueden expresarse de la forma y se expresan por expresiones decimales, infinitas no periódicas y se denotan por I.

e ≈ 2,718281828459045235360287471352…

π ≈ 3,141592653…

Los Números Reales

Los números reales es el conjunto formado por los números racionales y el conjunto de los números irracionales y se denotan por R.

$$N \subset Z \subset Q \subset R \qquad y \qquad N \subset Q_+ \subset Q \subset R$$

Resumiendo

- Existen números naturales, fraccionarios, enteros, racionales y reales.
- Los números naturales se emplean para indicar cantida¬des de objetos concretos, ordenamientos, medidas de conocidas magnitudes.
- Los números fraccionarlos se escriben en forma de fracciones o en notación decimal, un número fraccionario se puede identificar con cualquiera de las fracciones que lo forman, se emplean para describir partes de un todo y procesos de distribución, para indicar una medida de una magnitud, para representar determinados puntos en el rayo numérico.
- Los números enteros se emplean para representar mag¬nitudes en sentido contrario en la recta numérica, para describir la posición de un punto de la recta respecto a un punto de referencia (punto O).
- Los números racionales se emplean para representar mag¬nitudes en sentido contrario, segmentos orientados (mediante flechas) en la recta numérica, para describir la posición de un punto de la recta respecto a un punto de referencia (punto O).
- Con los números reales se puede hacer corresponder a cada punto de la recta un número y viceversa.

Limitaciones de los Dominios Numéricos estudiados

1. Los números naturales (N); La substracción $a-b$ cuando $a<b$

2. Los números enteros (Z); La multiplicación $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$ cuando b no es un múltiplo a

3. Los números racionales (Q); La radicalización $x^2 - a = b \quad (b > |a|)$

4. Los números reales R; La radicalización $x^2 + a = 0 \quad (a \in Q, a > 0)$

Ejercicios 2. Teoría de Conjuntos Numéricos

1. De acuerdo con tus conocimientos sobre los conjuntos y dominios numéricos estudiados hasta el momento, completa la columna B según se indica:

Columna B:
Dos números naturales
Dos números fraccionarios
Dos números cuyo dominio más restringido sean los enteros
Dos números racionales
Dos números cuyo dominio más restringido sean los reales
Un número que sea racional y no sea fraccionario
Un número que sea real y no sea racional
Un número cuya raíz cuadrada sea un número natural,
Un número al que no se le pueda calcular su raíz cuadrada.
Un número que su recíproco sea un número entero.
Para un conjunto *H* se cumple que *H* \ *N* = Ø.entonces.
X es un conjunto de números reales de manera que $X \notin \mathbb{Q}$ entonces

Proposición	**Posible Respuesta**
Dos números naturales	3 ; 100
Dos números fraccionarios.	$\frac{3}{4}; \frac{35}{6}$
Dos números cuyo dominio más restringido sean los enteros	-5 ; -10
Dos números racionales.	$-\frac{5}{4}; 0.3333\ldots$
Dos números cuyo dominio más restringido sean los reales.	$\sqrt{2}; \pi$
Un número que sea racional y no sea fraccionario.	-3
Un número que sea real y no sea racional.	$\sqrt{5}; 3.54312\ldots$
Un número que su raíz cuadrada sea un número natural,	$\sqrt{4}$
Un número al que no se le pueda calcular su raíz cuadrada.	$\sqrt{-9}$
Un número que su recíproco sea un número entero.	$\frac{1}{5}$
Para un conjunto *H* se cumple que *H* \ *N* = Ø.entonces.	$H = \left\{-1, -3, 4.645, -\frac{5}{4}\right\}$
X es un conjunto de números reales de manera que $X \notin \mathbb{Q}$ entonces	$X = \left\{\sqrt{2}; -0.0876\ldots\right\}$

2. Determina cuáles de las siguientes expresiones representan números racionales o irracionales. Argumenta tu respuesta.

a) $a = 3{,}2\overline{7}$ Racional, pues es un decimas periódico, periodo 7.

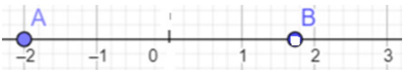
b) *b*= 1, 010 010 001 000 01... Irracional, es decimal no periódico.

c) $c = 3{,}\,275\,8\overline{43}$ Racional, pues es un decimas periódico, periodo 43.

d) $\frac{1}{\pi}$ Irracional, es el cociente de un número natural por uno irracional.

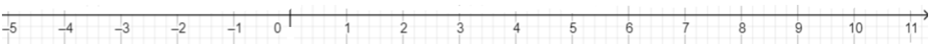
3.Resolver gráficamente.

Representa sobre la recta real el conjunto de los números reales mayores o iguales que y menores que √3.



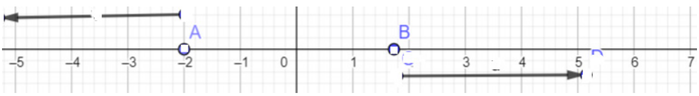
a=-2   b= √3 ≈ 1.73205

-Representa sobre la recta real el conjunto de los números reales.



a=-2   b= √3 ≈ 1.73205

Representa sobre la recta real el conjunto de los números reales menores y mayores que √3.



4. Di si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta.

a. _______ $\mathrm{N} \subset Q$

b. _______ $\mathrm{N} \subset Q \subset \mathrm{Z}$

c. _______ $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \Re$

d. _______ $\mathrm{N} \subset \Re \subset \mathrm{Z}$

e. _______ $\{x \in \Re : x \leq 3\} \subset \{x \in \Re : x < \sqrt{20}\}$

f. ——— $\{x \in \Re : \sqrt{2} \le x \le \pi\} \subset \{x \in \Re : \sqrt{2} < x \le 3\}$

g. ——— $\phi \subset Z$

h. ——— $-2 \subset Z$

i. ——— $-2 \not\subset Z$

j. ——— $-2 \in Z$

k. ——— $5 \in Q$

l. ——— $\frac{4}{5} \in N$

m. ——— $\sqrt{2} \notin \Re$

n. ——— $2\frac{1}{5} \in Q$

o. ——— $3{,}4\overline{5} \in Q$

p. ——— $N \subset \Re$

q. ——— $Q \subset \Re$

r. ——— $Z \subset Q$

Respuestas

a._V___ $N \subset Q$.

b.__F__ $N \subset Q \subset Z$

c.__V__ $N \subset Z \subset \Re$

d.__F__ $N \subset \Re \subset Z$

e.__V__. $\{x \in \Re : x \le 3\} \subset \{x \in \Re : x < \sqrt{20}\}$. Observar que √20≈4.4721...

f.__F__. $\{x \in \Re : \sqrt{2} \le x \le \pi\} \subset \{x \in \Re : \sqrt{2} < x \le 3\}$.

g.__V__. $\phi \subset Z$

h.__V__ $-2 \subset Z$

i.__F__ $-2 \not\subset Z$

j.__V__ $5 \in Q$.

k.__F_: $\frac{4}{5} \in N$.

l._F__ $\sqrt{2} \notin \Re$.

m.___V_ $2\frac{1}{5} \in Q$.

n.__V__ $3{,}4\overline{5} \in Q$.

o.__V__ $N \subset \Re$.

p.__V__ $Q \subset \Re$.

q.__V__ $Z \subset Q$.

Nota: Lo dispuesto en el literal (g) se basa en un principio lógico llamado principio de vacuidad, que establece que una afirmación sobre todos los elementos de un conjunto vacío es verdadera porque no hay contraejemplos. Dado que no hay elementos en el conjunto vacío que puedan fallar en estar en cualquier otro conjunto.

5. Completa utilizando los símbolos $\in, \notin, \subset, \not\subset$ de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) $-9\frac{1}{5}$ ___ Z

b) $7\frac{1}{8}$ ___ $\Re$

c) $9,\overline{3}$ ___ N

d) Z ___ $\Re$

e) $\sqrt{2}$ ___ Q

f) $\Re$ ___ Q

g) $9{,}48\overline{32}$ ___ $\Re$.

h) N ___ Q

i) π ____ Q

j) $\sqrt{2}$ _____ Z

k) $\sqrt{2}$ _____ Q

l) $\sqrt{2}$ _____ $\Re$

m) $\frac{1}{3}$ _____ $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

n) $\sqrt{2}$ _ $[-2,0]$

o) 2 ___ $[-2,2]$

p) (a,b) ___ $[a,b]$

q) $[a,b]$ ___ (a,b)

Respuestas

a. $-9\frac{1}{5} \notin Z.$
b. $7\frac{1}{8} \in \Re.$
c. $9,\overline{3} \notin N.$
d. $Z \subset \Re.$
e. $\sqrt{2} \notin Q.$
f. $\Re \not\subset Q.$
g. $9,48\overline{32} \in \Re.$
h. $N \subset Q$
i. $\pi \notin Q$
j. $\sqrt{2} \notin Z$
k. $\sqrt{2} \notin Q$
l. $\sqrt{2} \in \Re$
m. $\frac{1}{3} \notin \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$
n. $\sqrt{2} \in [-2,0].$
o. $2 \in [-2,2].$
p. $(a,b) \in [a,b]$
q. $[a,b]\, nopertenece\, (a,b)$

6. Complete cada línea de manera que se cumpla las afirmaciones siguientes:

r) $a \in Q$ y $a \notin Q_+$ entonces: a es negativo

s) $a \in \Re$ y $a \notin Q$ entonces: a es un número irracional

t) Si A es el conjunto de todas las fracciones propias y B el conjunto de los números fraccionarios entonces $A \setminus B$ es: el conjunto de todas las fracciones impropias.

7.Si es el conjunto de los números primos y el conjunto de los múltiplos de 3 menores que 30 entonces

$A \cap B = 3.$

$B \cap A = 3$

$A \cup B = 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29, ...$

$B \cup A = 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29, ...$

$A \setminus B = 2,5,7,11,13,17,19,23,29$

$B \setminus A = 6,9,12,15,18,21,24,27$

8.Dados los intervalos:

$A = [-3, +\infty)$ y $B = (-\sqrt{3}, 2)$ y el conjunto $P = \{2n : n \in \mathrm{N}\}$ completa los espacios en blanco con el símbolo o valor adecuado, de forma que se obtenga una proposición verdadera.

a) 2 ___ P.

b) 6 ___ A.

c) A ___ B

d) -2 ___ A.

e) P ___ A.

f) $\sqrt{2}$ ___ B

g) 5 ___ P.

h) $\sqrt{3}$ ___ B.

i) B ___ P.

j) El menor número entero que pertenece a la intersección de los conjuntos A y B $(A \cap B)$ es el ____.

k) El menor número entero que pertenece a la intersección de los conjuntos B y A $(B \cap A)$.

l) El conjunto formado por la intersección de los conjuntos P y A $(P \cap A)$ tiene ___ elementos.

m) El conjunto formado por la diferencia entre el conjunto P y el conjunto ($P \setminus A$) tiene ___ elementos.

n) Al calcular en la expresión $x = \left(\log_6 3{,}6 + \log_6 10\right) - \frac{\cos 4\pi}{2}$ podemos concluir que:

x _____ A y x _____ B entonces x _____ $A \setminus B$

Respuestas

a. $2 \in P$.

b. $6 \in A$.

c. $A \not\subset B$

d. $-2 \in A$.

e. $P \subset A$.

f. $\sqrt{2} \in B$

g. $5 \notin P$.

h. $\sqrt{3} \in B$.

i. $B \not\subset P$.

j. El menor número entero que pertenece a la intersección de los conjuntos A y B $(A \cap B)$ es el __0__.

k. El menor número entero que pertenece a la intersección de los conjuntos B y A $(B \cap A)$. ___0___

l. El conjunto formado por la intersección de los conjuntos P y A $(P \cap A)$ tiene: infinitos elementos.

m. El conjunto formado por la diferencia entre el conjunto P y el conjunto A, ($P \setminus A$) tiene _0_ elementos.

n. **Al calcular en la expresión $x = (\log_6 3.6 + \log_6 10) - \frac{\cos 4\pi}{2}$

podemos concluir que:

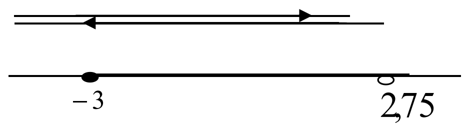
i. $x \in A$ y $x \in B$ entonces $x \notin A \setminus B$

9. En cada una de las líneas se representan gráficamente subconjunto de números reales. Escribe los mismos de forma abreviada.

$(\sqrt{3}, \infty)$

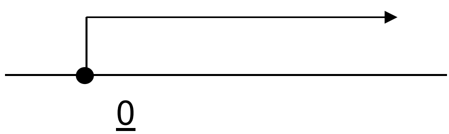
(-∞ ; $\sqrt{2}$)

a) [-3, 2.75)

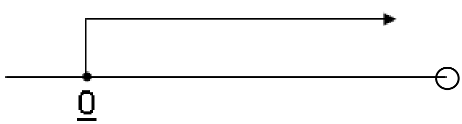


Completa cada uno de los gráficos con los números correspondientes con y según cada conjunto indicado.

b) Si $A = \{\sqrt{x} : x \in \Re,\ x \geq 0\}$ entonces su representación gráfica es:



c) Si $A = \{\sqrt{x} : x \in \Re,\ x \geq 0\}$ entonces su representación gráfica es:



d) Si $A=\{2a+1: a\in \mathrm{N}\}$ y $B=\{x\in \Re: 1<x<3\}$ entonces la representación gráfica de $C=A\cap B$

No es posible pues C=Ø, pues el unico elemento entero de B es 2, y este es un número par.

10. Dados los conjuntos $A=\left\{\frac{a}{b}\left(a, b\in \mathrm{N}: b\neq 0\right)\right\}$ y es el conjunto de los números enteros.

Completa los espacios en blancos de manera que se obtenga una proposición verdadera para cada caso.

a) Tres números que pertenecen al A son $\frac{5}{8}, 4, \frac{7}{9}$.

b) Dos números que pertenecen al conjunto A y al conjunto a la vez son: 4, 17.

c) Un número que pertenece al conjunto A y no pertenece al conjunto B es: $\frac{7}{9}$

d)Un número que pertenece al conjunto B y no pertenece al conjunto A es: -9.

e) Si el conjunto $C=A\cap B$ entonces $C=$ A

f) Si el conjunto $C=A\cup B$ entonces $C=\left\{\frac{a}{b}\middle|a, b\in \mathbb{N}, b\neq 0\right\}\cup \mathbb{Z}$

g) Si $a, a_1\in A$ se cumple que $a+a_1\in B$ entonces $a=k\cdot b, k\in \mathbb{N}$ y $a_1=k\cdot b, k\in \mathbb{N}$

h) Un conjunto D para el cual se cumple que $D\cap A=\phi$ es el conjunto $D=$ Naturales.

k) Un conjunto K para el cual se cumple que $K\subset B$ es el conjunto $K=$ Naturales.

Responde cada una de las preguntas que se formulan a continuación. Justifica en cada caso.

a)¿Será posible calcular el recíproco de todos los números del conjunto *A*?. No es posible porque el reciproco de 0 se indefine.

b)Entre dos números cualesquiera del conjunto *B* ¿Siempre se puede encontrar otro número de este conjunto? No porque si los numero son consecutivos no existe número alguno entre estos, este conjunto no es denso.

c)Entre dos números cualesquiera del conjunto *A* ¿Siempre se puede encontrar otro número de este conjunto? Si siempre entre dos fraccionarios existirá otro.

d)¿Siempre será posible calcular la raíz cuadrada en el conjunto *A*?.

Si siempre será posible pues todos son 0 o positivos.

e) Si $x \in B$ ¿Existirá siempre $\sqrt{x}$?

No siempre si es un entero negativo imposible.

f) ¿Siempre que el valor del área de un cuadrado cualquiera, sea un número natural, podemos afirmar que la longitud del lado de ese cuadrado es también un número natural? Si, así será siempre.

g) ¿Será posible que la longitud de una circunferencia de un radio dado sea un número racional? No nunca será así, pues la longitud se calcula $L= 2\pi r$, al estar implícito π, ya el resultado siempre será irracional.

h) ¿El valor del área de la base de un cono dado, puede ser un número racional? No, pues la base es un círculo y su área también involucra a π, $A = \pi r^2$, por lo que el resultado será irracional.

11. Escribe en cada una de las líneas V si la afirmación es verdadera y F si la afirmación es falsa. Justifique cada caso.

12. _____ Si $x \in \Re$ tal que $x \in [-2, 2]$ siempre se puede calcular el $senx$.

13. _____ Si $x \in \mathrm{N}$ siempre es posible calcular el recíproco del sucesor de x.

14._____ Si $x \in \mathrm{N}$ entonces siempre se puede calcular $\sqrt{x}$.

15. _____ Si $A = \dfrac{2n+1}{n+1}$ $(n \in \mathrm{N})$ entonces el cociente de A siempre es mayor que 1.

16. _____ Si a es un número natural entonces $a^{\log_a a} = a$.

17. _____ La longitud de todo segmento contenido en los ejes de coordenadas es un número racional.

18. _____ El dominio de la función $y = \frac{1}{x}$ es un subconjunto del conjunto imagen de esta función.

19. _____ El valor del área de un rectángulo en el cual la longitud de los lados son números fraccionarios es también un número fraccionario.

Respuesta:

a) ___V___ Si $x \in \Re$ tal que $x \in [-2, 2]$ siempre se puede calcular el $sen x$.

b) ___V___ Si $x \in \mathrm{N}$ siempre es posible calcular el recíproco del sucesor de x.

c) ___V___ Si $x \in \mathrm{N}$ entonces siempre se puede calcular $\sqrt{x}$.

d) ___V___ Si $A = \frac{2n+1}{n+1}$ $(n \in \mathrm{N})$ entonces el cociente de A siempre es mayor que 1.

e) ___V___ Si a es un número natural entonces $a^{\log_a a} = a$.

f) ___V___ La longitud de todo segmento contenido en los ejes de coordenadas es un número racional.

g) ___V___ El dominio de la función $y = \frac{1}{x}$ es un subconjunto del conjunto imagen de esta función. Su dominio es igual a su imagen, los reales sin incluir el 0.

h) ___V___El valor del área de un rectángulo en el cual la longitud de los lados son números fraccionarios es también un número fraccionario.

Lee detenidamente la pregunta y responde:

20. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe (V ó F) en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a. ____ $-x < x$

b. ____ $x < x^2$

c. ____ $|x| > x$

d. ____ $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

e. ____ $x^2 - 4 = 0$ entonces $x = 2$

f. ____ $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (x, y \in \Re_+)$

g. ____ $x(y.z) = xy \cdot xz$

h. ____ $x \cdot \frac{y}{z} = \frac{xy}{xz} \; (x, z \neq 0)$

i. ____ $\frac{x}{y+z} = \frac{x}{y} + \frac{x}{z} \; (y, z \neq 0)$

Respuestas:

a. *-x<x* Si un número es negativo, el opuesto de un número negativo es positivo lo que hace que no se cumpla la desigualdad, ejemplo *–(-2)> -2*, considerando *x=-2*

b. _F__ $x < x^2$, Por ejemplo, sea $y = \frac{1}{x}$

c. _V__ $|x| > x$ Si $x \leq 0$, si se cumple

d. _F__ $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ Sea x=2, y=3, $2^2+3^2=13$, $(2+3)^2=25$

e. _F__ $x^2 - 4 = 0$ entonces x =2, X=-4 también es solución

f. _F__$\sqrt{1+4} \approx 2.236, \sqrt{1}+\sqrt{4}=5\ (x, y \in \mathbb{R}_{+})$ $\sqrt{1+4} \approx 2.236, \sqrt{1}+\sqrt{4}=5$

g. _F__ *x(y.z)=xy·xz* esta propiedad en el producto no se cumple, veamos, sea *x=2, y=3, z=4, 2(3.4) =24, 2(3).2(4) =48*

h._F__ $x \cdot \frac{y}{z} = \frac{xy}{xz} (x, z \neq 0) \frac{xy}{xz} = \frac{y}{z} \neq x\frac{y}{z}$, simplificando factores comunes en el numerador y denominador*(x)*

i. _F__$\frac{x}{y+z} = \frac{x}{y} + \frac{x}{z} (x, z \neq 0)$, no se cumple esta propiedad, veamos un caso particular $\frac{25}{2+3} = 5, \frac{25}{2} + \frac{25}{3} \approx 20.83$

21. Completa los espacios en blanco, utilizando en cada caso los números y el dominio numérico más restringido al que pertenecen los mismos, para los cuales cada una de las operaciones resulten verdaderas.

a)

a	b	$a \cdot b$
$a =$ ____$(a \in \mathrm{N})$	$b =$ ___$(b \in Q_{+})$	$a \cdot b \in N$
$a = \frac{3}{5}$ $(a \in$ ___$)$	$b =$ ___$(b \in Q)$	$a \cdot b \in Z$
$a =$ ____$(a \notin N)$	$b =$ ___$(b \notin N)$	$a \cdot b \in N$
$a =$ ____$(a \notin Z)$	$b =$ ___$(b \notin Z)$	$a \cdot b \in Z$
$a = 3{,}14(a \in$ ___$)$	$b =$ ___$(b \in \mathrm{N})$	$a \cdot b \in N$

Respuesta:

b)

a	b	$a \cdot b$
$a = 2(a \in N)$	$b = \frac{1}{2}\ (b \in Q_+)$	$a \cdot b \in N$ 1
$a = \frac{3}{5}\quad (a \in Q_+)$	$b = \frac{5}{3}(b \in Q)$	$a \cdot b \in Z$ 1
$a = -2\ (a \notin N)$	$b = -3\ (b \notin N)$	$a \cdot b \in N$ 6
$a = \frac{2}{3}(a \notin Z)$	$b = \frac{3}{2}(b \notin Z)$	$a \cdot b \in Z$ 1
$a = 3{,}14(a \in Q)$	$b = 100\ (b \in N)$	$a \cdot b \in N$ 314

c)

a	b	$a \div b$
$a = \_\_\_\_(a \in \mathrm{N})$	$b = \_\_\_(b \in Q)$	$a \div b \in \mathrm{N}$
$a = \pi \quad (a \in \_\_\_)$	$b = \_\_\_(b \in \mathrm{N})$	$a \div b \in \_\_\_$
$a = \_\_\_\_(a \notin N)$	$b = \_\_\_(b \notin N)$	$a \div b \in Z$
$a = \sqrt{5}(a \in \_\_\_)$	$b = \_\_\_(b \in \mathfrak{R})$	$a \div b \in N$
$a = \_\_\_\_(a \in Q)$	$b = \_\_(b \in Q)$	$a \div b \in Q_+$

d)

a	b	$a \div b$
$a = \square 4 \square_{(a \in N)}$	$b = \frac{1}{2} (b \in Q)$	$a \div b \in \mathrm{N} \quad 8$
$a = \pi \quad \left(a \in_{\Re_{\square\square}}\right)$	$b = \square\square_{(b \in N)}$	$a \div b \in \Re$
$a = 4 (a \notin N)$	$b = -2 \ (b \notin N)$	$a \div b \in Z \quad -2$
$a = \sqrt{5} (a \in \Re)$	$b = \sqrt{5} (b \in \Re)$	$a \div b \in N \quad 1$
$a = \square 3 \square_{(a \in Q)}$	$b = 2_{\ (b \in Q)}$	$a \div b \in Q_+ \quad \frac{3}{2}$

e)

a	b	$a + b$
$a = \_\_\_\_ (a \in \mathrm{N})$	$b = \_\_\_ (b \in \mathrm{Z})$	$a + b \in N$
$a = 1{,}5\overline{5} \quad (a \in \_\_\_)$	$b = \_\_\_ (b \in \mathrm{N})$	$a + b \in \_\_\_$
$a = \_\_\_\_ (a \in Q)$	$b = \_\_\_ (b \notin N)$	$a + b \in \mathrm{N}$
$a = \_\_\_\_ (a \in \mathrm{Z})$	$b = \_\_\_ (b \notin Z)$	$a + b \in Q_+$
$a = \pi (a \in \_\_\_)$	$b = \_\_\_ (b \in \Re)$	$a + b \in [\pi, 2\pi]$

Respuestas:

a	b	$a+b$
$a = \_\_4\_\_(a \in \mathrm{N})$	$b = \_\_10\_(b \in \mathrm{Z})$	$a+b \in N$ 14
$a = 1{,}5\bar{5} \quad (a \in \_\_Q\_)$	$b = \_5\_\_(b \in \mathrm{N})$	$a+b \in \_Q\_\_$
$a = \_\_28\_\_(a \in Q)$	$b = \_-18\_\_(b \notin N)$	$a+b \in \mathrm{N}$ 10
$a = \_\_2\_\_(a \in \mathrm{Z})$	$b = \_\_1/2\_(b \notin Z)$	$a+b \in Q_+$ 5/2
$a = \pi(a \in \_\Re\_\_)$	$b = \_\pi/2\_\_(b \in \Re)$	$a+b \in [\pi, 2\pi]$ $3\pi/2$

d)

a	b	$a \cdot b$	$a \div b$	$a+b$
$a = \_\_\_\_(a \in \mathrm{N})$	$b = 5\,(5 \in \mathrm{N})$	$a \cdot b \in \_\_\_$	$a \div b \in Q_+$	$a+b \in N$
$a = -3(a \in \_\_\_)$	$b = \_\_\,(b \in \_\_\_)$	$a \cdot b \in N$	$a \div b \in Q_+$	$a+b \in \_\_\_$
$a = \_\_\_\_(a \notin Z)$	$b = \sqrt{2}\,(\sqrt{2} \in \Re)$	$a \cdot b \in N$	$a \div b \in \_\_$	$a+b \in \Re$
$a = \_\_\_(a \in Q_+)$	$b = 0{,}25(b \in \_\_)$	$a \cdot b \in Q$	$a \div b \in N$	$a+b \in N$
$a = 3{,}14(a \in \_\_\_)$	$b = \_\_\_(b \in \mathrm{N})$	$a \cdot b \in N$	$a \div b \in Q_+$	$a+b \in \_\_\_$
$a = \_\_\_\_(a \in \_\_\_)$	$b = \_\_\,(b \in \_\_\_)$	$a \cdot b \in \_\_\_$	$a \div b \in \_\_\_$	$a+b \in \Re$

Respuestas:

a	b	$a \cdot b$	$a \div b$	$a+b$
$a = 7 (a \in \mathrm{N})$	$b = 5\ (5 \in \mathrm{N})$	$a \cdot b \in N$	$a \div b \in Q_+$	$a+b \in N$
$a = -3 (a \in Z)$	$b = \_5\_\ (b \in \_\_N\_)$	$a \cdot b \in N$	$a \div b \in Q_+$	$a+b \in N$
$a = \_\sqrt{2}\_ (a \notin Z)$	$b = \sqrt{2}\ (\sqrt{2} \in \Re)$	$a \cdot b \in N$	$a \div b \in \_N\_$	$a+b \in \Re$
$a = 0.75 (a \in Q_+)$	$b = 0{,}25\ (b \in \_Q_+\_)$	$a \cdot b \in Q$	$a \div b \in N$	$a+b \in N$
$a = 3{,}14 (a \in Q)$	$b = 100 (b \in \mathrm{N})$	$a \cdot b \in N$	$a \div b \in Q_+$	$a+b \in Q$
$a = 3\sqrt{2} (a \in \_I)$	$b = \sqrt{2}\ (b \in I)$	$a \cdot b \in N$	$a \div b \in N$	$a+b \in \Re$

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Capítulo 3

Estadística Descriptiva

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

Introducción

En la actualidad la estadística está muy difundida, su uso es inevitable, nada o casi ninguna actividad de la vida escapa de la estadística, con el desarrollo acelerado de la tecnología, esta se ha hecho más visible en casi todas las esferas de la existencia, el surgimiento de los ordenadores personales y los paquetes estadístico existente hace ya algunos años como el SPSS, el InfoStat, Prism, R y DynStats, entre otros, estas herramientas han posibilitado que científicos, estudiantes, economistas, ingenieros, políticos, banqueros y militares entre otros, usen el análisis estadístico en su actividad profesional y de investigación, En este capítulo presentaremos un bloque de ejercicios actualizado al contexto ecuatoriano al nivel descriptivo, presentando en todos los casos las respuestas, de manera que sea de cierta ayuda para los principiantes en el estudio de tan útil rama de la matemática. Comenzaremos como se podrá observar con algunas definiciones útiles, con el fin de asegurar cierto nivel de partida y familiarizar al lector con el lenguaje usual dentro del campo que nos ocupa.

Variables Estadísticas

Una variable estadística es cualquier característica, propiedad o medición de los miembros de una población. Entre estas tenemos:

$$\text{Cualitativas} \begin{cases} \boldsymbol{nominal} \\ \boldsymbol{ordinal} \end{cases}$$

$$\text{Cuantitativa} \begin{cases} \boldsymbol{discretas} \\ \boldsymbol{continuas} \end{cases}$$

Variables cualitativas

Se refieren a características o atributos que expresan una cualidad o categoría, o sea, no se pueden medir ni son producto de conteo.

Ejemplos:

- La profesión de tus padres (profesor, médico, mecánico, etc).
- El estado civil (soltero, casado).
- La nacionalidad (ecuatoriano, peruano, colombiano, etc)
- La carrera que piensas estudiar (periodismo, Magísterio, medicina, etc).
- En ocasiones por exigencias de las pruebas estadísticas o exigencias de los softwares utilizados en incluso para racionalizar la escritura, se

codifican estas variables que no es más que asignar valores numéricos a las diferentes categorías de la variable cualitativa o categórica.

Variables cuantitativas

Se refieren a atributos que expresan una cantidad o cantidad de magnitud y por tanto toma valores numéricos, o sea, se pueden medir (EcuRed, s/f).

Ejemplos:

1. La edad de una persona (3 años, 17 años, …).
2. La cantidad de alumnos de un paralelo o centro educativo (15, 30, 700, 1200,…).
3. La talla de una persona (1,64 m, 2,00 m, …).
4. Los registros de temperatura en una región dada (30°C, –5°C, 0°C, …).
5. Las variables cuantitativas son de dos tipos: discretas y continuas como se expresa anteriormente.

Variable cuantitativa discreta

Cuando solo pueden tomar un número finito o a lo sumo numerable de valores.

En el ejemplo anterior de variables cuantitativas discretas serían los dos primeros: la edad de una persona y la cantidad de alumnos de un paralelo o centro educativo que sólo pueden tomar un número finito de valores (EcuRed, s/f).

Variable cuantitativa continua

Cuando puede, teóricamente, tomar cualquier valor de un intervalo real, producto de un proceso de medición.

En el ejemplo anterior de variables cuantitativas continuas serían los dos últimos: la talla de una persona y los registros de temperatura de una región determinada, que pueden tomar varios valores dentro de un intervalo.

Población

Es el colectivo que abarca a todos los elementos cuya característica o características queremos estudiar; dicho de otra manera, es el conjunto entero al que se desea describir o del que se necesita establecer conclusiones. Como ejemplos de poblaciones, podemos citar: todos los estudiantes de la Universidad Central del Ecuador, o los artículos producidos en una semana en una determinada fábrica.

Por su tamaño, las poblaciones pueden ser finitas o infinitas.(Salazar & Del Castillo, 2018, pág. 13)

Muestra

Es un conjunto de elementos seleccionados de una población de acuerdo a un plan de acción previamente establecido (muestreo), para obtener conclusiones que pueden ser extensivas hacia toda la población. Ejemplos constituyen las muestras que escogen las empresas encuestadoras en estudios de sondeos de opinión, o la selección de un grupo de artículos recibidos en una bodega para estimar las condiciones de todo un embarque. (Salazar & Del Castillo, 2018, pág. 13)

Representación de datos agrupados mediante tablas y gráficos

Representación de datos agrupados mediante tablas

En múltiples investigaciones los datos observados u cuantificados son gran cantidad, lo que hace difícil su interpretación para los fines que se propone el investigador Para ello, es imprescindible, organizar los datos de manera resumida y operativa. Para ello pueden usarse tablas de frecuencias las que facilitaran el trabajo con los datos.

Veamos el siguiente ejemplo donde utilizaremos datos cuantitativos discretos:

Medallero Sudafricano en las Olimpiadas de Paris 2024:

O, O, O, O, O, O, P, P, P, P, P, P, P, P, P, P, P, P, P, P, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B

Ahora se debe efectuar el recuento de los datos en una tabla de frecuencias.

Tabla 1.

Frecuencias del Medallero Sudafricano en las Olimpiadas de Paris 2024.

Caso	Variable	Clase	Categorías	FA	FR	FAA	FRA
1	Medallas	1	B	15	0.43	15	0.43
2	Medallas	2	O	16	0.17	21	0.60
3	Medallas	3	P	14	0.40	35	1.00

En la tabla anterior se pueden observar 3 clases distintas y 3 categorías, oro (O), plata(P), bronce (B), posteriormente frecuencia absoluta (FA), la frecuencia relativa (FR), frecuencia absoluta acumulada (FAA) y frecuencia relativa acumulada (FRA).

¿Cómo se calcula cada frecuencia?

Frecuencia Absoluta (FA) no es más que el número de veces que aparece cada categoría.

Frecuencia Relativa (FR), es el cociente de cada frecuencia absoluta entre el total de categoría registrada. Estas frecuencias si se multiplican por 100 indican el porciento que representa cada frecuencia absoluta del total de observaciones.

Frecuencia Absoluta Acumulada (FAA), es la frecuencia absoluta acumulada que se obtiene de sumas por categoría hasta llegar al total de observaciones.

Frecuencia Relativa Acumulada (FRA), se obtiene de sumar las frecuencias relativas por categorías hasta llegar a la unidad. Estas al igual que las frecuencias relativas se multiplican por 100, indican el % acumulado de cada frecuencia relativa por categoría, lo que significa que su suma debe ser siempre 1 equivalente al 100%, aunque puede no ser exactamente 1 si no un número aproximado a 1 debido al resultado del cálculo de las frecuencias relativas pues en ocasiones hay que considerar al calcular las mismas ciertas aproximaciones.

Cuando se manejan grandes conjuntos de datos, el procedimiento preliminar más adecuado para su tratamiento consiste en distribuirlos en clases o categorías, de acuerdo con el número de casos que pertenecen a cada una de dichas clases.

Clase: Una clase es el conjunto de todos los individuos u observaciones de la variable, que se encuentran entre determinados límites.

Cuando se agrupa un conjunto de datos mediante clases de frecuencias es importante el dominio de un grupo de conceptos y términos como los siguientes:

Rango o recorrido de la variable: es la diferencia entre el mayor y el menor de los valores dados en los datos.

Clase de frecuencias: conjunto de todos los individuos u observaciones de la variable, que se encuentran entre determinados límites.

Límites de clases: Los valores extremos, que delimitan cada clase, se conocen con el nombre de límites de clase: el menor es el límite inferior Li y el mayor es el límite superior Ls.

Amplitud de clases: es la amplitud del intervalo de clase la cual se obtiene mediante la diferencia: Ls – Li

Para el trabajo con datos agrupados en clases de frecuencias es importante también tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las clases deben ser independientes una de otra o sea no tener elementos comunes.
- El número de clases no puede ser muy pequeño ni excesivamente grande. Esto debe ser considerado por el investigador
- De ser posible si el investigador cree conveniente debe evitarse las clases de frecuencia nula. La amplitud de las clases se debe elegir de modo re recojan todas las observaciones o mediciones efectuadas.
- Deben tener la misma amplitud (siempre que sea posible).

Ejemplo:

Edad de los pacientes que asisten a cierta consulta médica

2, 1, 3, 3, 3, 9, 8, 12, 13, 20, 11, 11, 18, 21, 22, 21, 21, 29, 30, 23, 27, 32, 33, 31, 39, 36, 39, 43, 43, 49, 46, 50, 53, 53, 59, 61, 69, 67,67, 75, 75

Como podrás observar esta tabla es mucho más adecuada y operativa para hacer el análisis de este fenómeno.

Tabla 2.

Edad de los pacientes que asisten a cierta consulta médica.

Variable	Clase	LI	LS	MC	FA	FR	FAA	FRA
EDAD	1	[1.00	10.25]	5.63	8	0.19	8	0.19
EDAD	2	(10.25	19.50]	14.88	5	0.12	13	0.31
EDAD	3	(19.50	28.75]	24.13	7	0.17	20	0.48
EDAD	4	(28.75	38.00]	33.38	6	0.14	26	0.62
EDAD	5	(38.00	47.25]	42.63	5	0.12	31	0.74
EDAD	6	(47.25	56.50]	51.88	4	0.10	35	0.83
EDAD	7	(56.50	65.75]	61.13	2	0.05	37	0.88
EDAD	8	(65.75	75.00]	70.38	5	0.12	42	1.00

Es importante señalar que abundantes casos este tipo de tabla aparece con otra columna nombrada marca de clase (MC), que no es más que el punto medio de cada clase, esto se calcula sumando el límite inferior de cada clase más el superior y dividiéndolo por dos ejemplos en la primera clase de la taba anterior la clase correspondiente es 1-10.

La marca de clase sería $\frac{1+10}{2} = \frac{11}{2} = \mathbf{5.5}$

Representación gráfica de datos estadísticos

Las tablas de frecuencias de los datos estadísticos proporcionan una ordenada y buena información de lo que se esté estudiando. Sin embargo, muchas veces deseamos obtener una visión global rápida y visual. Para ello se acude a las representaciones gráficas. Los gráficos suelen verse en la prensa escrita, en los centros e instituciones donde se le da servicio a la población como hospitales, centros de ventas, instituciones del estado, en la televisión y escuelas, en fin, en múltiples lugares donde es conveniente que el usuario o cliente tenga una rápida idea de cierta información de interés.

En el histograma se sitúan las clases en el eje horizontal y se dibujan rectángulos que tienen por base las amplitudes de esos intervalos, y por alturas, sus correspondientes frecuencias absolutas. Hay que indicar el concepto representado en cada uno de los ejes.

En el caso de que las clases no tuviesen la misma amplitud, las alturas de los rectángulos ya no podrían corresponder a las frecuencias absolutas, y habría que calcular las áreas de los rectángulos proporcionales a las frecuencias de cada intervalo.

También suele representarse de forma que las barras tengan el valor de la frecuencia sea absoluta o relativa y en el cero de cada clase la marca de clases correspondiente.

Si dibujamos el histograma que corresponde a nuestro ejemplo anterior, quedaría así:

Figura 9.

Histograma de la edad de los pacientes que asisten a cierta consulta médica (frecuencia absoluta).

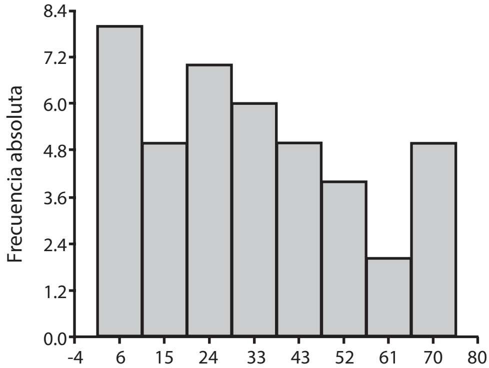
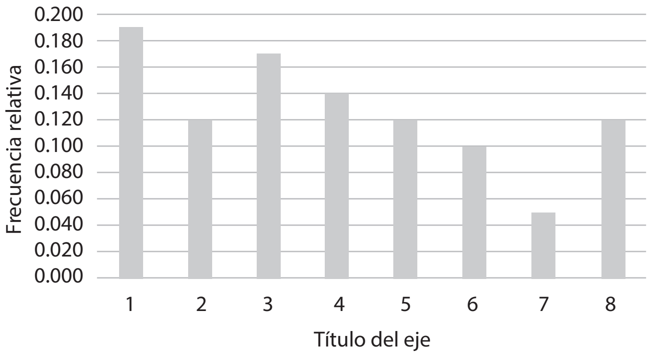


Figura 10.

Histograma de la edad de los pacientes que asisten a cierta consulta médica (frecuencia relativa)

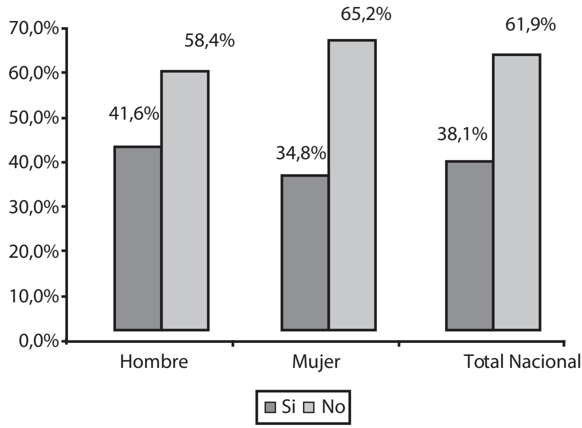


Ejemplos de representación gráfica de datos:

Uso de tecnología de la población en estudio. Uso de teléfono celular Nivel Nacional.

Figura 11.

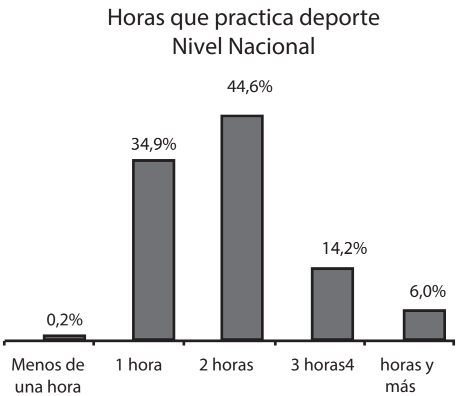
Población que tiene celular activado, según sexo (Gráfico de barras).



Nota. Datos tomados de Encuesta de Condiciones De Vida 2005-2006 v.1.4 (Instituto Nacional De Estadîstica y Censos (INEC) & (SENPLADES), 2014)

Figura 12.

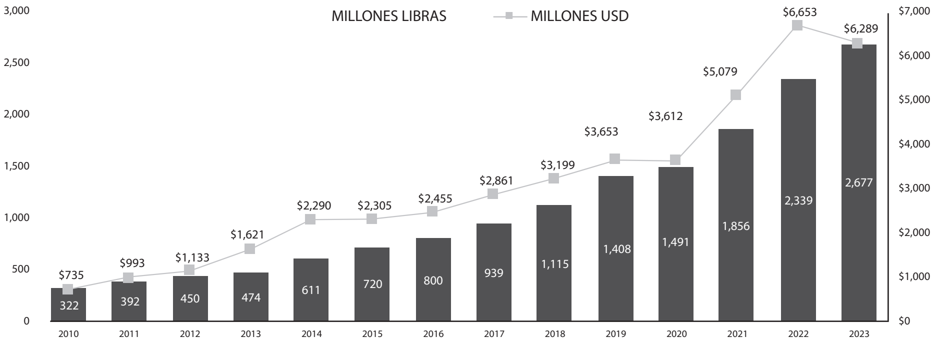
Horas que practica deporte. Nivel Nacional. (Gráfico de barras)



Nota. Datos tomados de Encuesta de Condiciones De Vida 2005-2006 v.1.4 (Instituto Nacional De Estadîstica y Censos (INEC) & (SENPLADES), 2014)

Figura 13.

Camarón – Reporte de Exportaciones Ecuatorianas Totales de 2010 a 2023 (Gráfico de barras y líneas o gráfico de combinación).

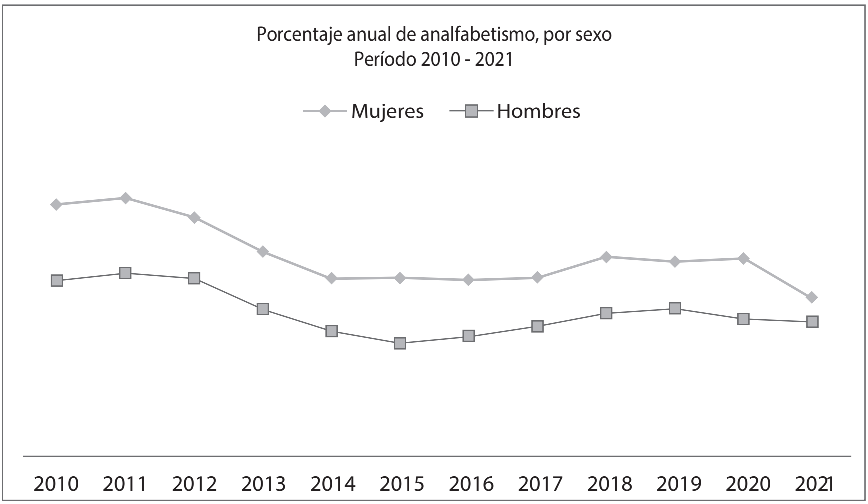


Nota. Tomado de Seafood Media Group Ltd (Camara Nacional de Acuicultura, 2022)

Como podrá observar en el gráfico anterior usted puede ver las libras exportadas por año y el ingreso de USD. Respectivo.

Figura 14.

Porcentaje anual de analfabetismo, por sexo. Período 2010-2021.



En 2021 el analfabetismo en las mujeres a nivel nacional representa el 6% y el 5,1% de los hombres

Nota. Datos tomados de INEC-Encuesta Nacional de Empleo, Desempleo y Subempleo (ENEMDU) 2007-2021. (Conseio Nacional para la igualdad de Género, 2021)

Medidas de tendencia central para datos agrupados

Media aritmética

La media aritmética es un promedio y se define, para datos simples, de la siguiente manera:

Definición: Sean *x1, x2, x3,…,* x_n, n valores medidos. La Media Aritmética $\overline{x}$ se calcula mediante la fórmula: $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$

Por ejemplo: La siguiente tabla muestra las notas obtenidas por los 20 estudiantes de un paralelo. Calcula la media de las notas del grupo.

Tabla 3.

Notas obtenidas por 20 estudiantes de un paralelo.

Notas	Frecuencia absoluta
6	1
7	2
8	6
9	8
10	3

Como son datos simples calculamos la media aritmética así:

$$\frac{6.1+7.2+8.6+9.8+10.3}{20} = 8.5$$

La media aritmética de las notas del grupo es de 8,5 puntos.

Mediana

Definición Dado x1…, x0 observaciones de la variable X, una vez ordenadas las observaciones en forma creciente, la mediana es el valor o punto medio que supera al 50 por ciento de los valores observados de la variable y es superado por el restante 50 por ciento. La forma de obtener el valor de la mediana depende del número de observaciones. Así, si el número de observaciones es impar, la mediana es el valor de la variable que ocupa la posición central de los datos ordenados y, si el número de observaciones es par, la mediana es la media aritmética de los dos valores que ocupan la posición central de los datos ordenados. Esta definición se puede plasmar mediante la siguiente expresión matemática:

Si la muestra es de tamaño impar, como, por ejemplo: 13 11 19 20 18 21 23

Las observaciones ordenadas: 11 13 18 19 20 21 23, es decir Me = x4 = 19

Las observaciones ordenadas so: 25, 24, 23, 20, 19.5, 18,9, 18, 17.82, 17, 16.23

$$\mathbf{Me} = \frac{\mathbf{19.5+18.9}}{\mathbf{2}} = \mathbf{19.2}$$

Nótese que en el caso del conjunto impar de observaciones se ordenó de menor a mayor, y en el conjunto par de observaciones de menor a mayor, el orden no importa cuál sea lo que sí es necesario ordenar el conjunto de datos, debe destacarse además que la mediana no necesariamente coincidirá con un valor observado, sobre todo cuando el número de datos es par.

Moda

Definición:

La moda es el valor de la variable que se repite con mayor frecuencia. Se expresa como: Mo = xi, si xi es el valor de la variable que más se repite.

Ejemplo

Obtendremos la moda para los siguientes conjuntos da datos:

a) 10 11 11 12 13 09 15 Mo= 11

b) 10 11 12 13 09 15 Mo = no existe moda

c) 11 11 11 12 12 12 5 5 7 4 Mo = 11; Mo = 12, este conjunto de datos es bimodal.

Medidas de dispersión

Varianza

Es una medida de dispersión y se define como la media o promedio de los cuadrados de las diferencias de cada valor de la variable con respecto a la media aritmética, cuya expresión matemática es:

$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_1^n (x_i - \overline{x})^2$ Varianza de una muestra

$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$ Varianza de una población

Desviación estándar

$S = \sqrt{S^2}$

Este valor se calcula para llevar la medida de dispersión a la unidad de medida usada en la variable tal cual se tomó, o sea liberar del cuadrado a la medida de dispersión obtenida.

Ejemplo:

Los siguientes datos representan las edades de seis niños en años cumplidos: 1, 3, 3, 0, 4, 1. La media aritmética es $\overline{x}$= 2 años. Obtendremos la varianza:

2.4 años2, esto de años al cuadrado no parece muy natural, por lo que si calculamos la desviación estándar obtendremos i.5 años.

Coeficiente de variación

El coeficiente de variación es una medida de dispersión relativa (libre de unidades de medida), que se define como el cociente de la desviación estándar entre la media aritmética. En esta clase, veremos cómo calcular su valor y también su utilidad.

En ocasiones, necesitamos comparar la variabilidad o dispersión de dos conjuntos de datos, sin embargo, al hacerlo, puede que ambos conjuntos estén expresados en diferentes unidades de medida (por ejemplo, uno en metros, otro en litros), por lo tanto, no se podrán comparar sus varianzas o desviaciones estándar. También puede darse el caso de que estén expresados en la misma unidad de medida, pero nos interesa determinar la variación respecto a una base. Para estos casos, se utiliza el coeficiente de variación.

$$\mathrm{CV} = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100$$

Ejercicios 3. Estadística Descriptiva

1) Se ha analizado la sangre de 25 pacientes para realizar la determinación de calcio y se obtuvieron los siguientes resultados en: mg/dL

9,7 9,3 10,1 9,2 9,1 9,3 9,4 8,7 8,8 8,7 9,2 8,3

10,2 9,5 9,6 9,7 9,2 9,3 8,8 9,5 9,8 9,1 9,2 9,6 8,4

a) Clasifica los datos en discretos o continuos.

b) Construye una tabla de frecuencias que incluya los intervalos de clase, la frecuencia absoluta de cada clase y la marca de clase, con 5 clases.

c) Representa la información en un histograma.

d) Calcula la media de calcio en sangre de los pacientes analizados.

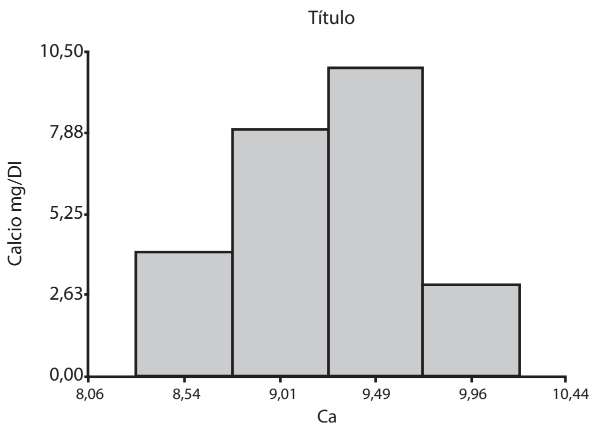
Respuesta

a) Cuantitativa continua

b)

Variable	Clase		LI	LS		MC	FA	FR	FAA	FRA
VARIABLE Ca	1	[	8,30	8,78	)	8,54	4	0,16	4	0,16
VARIABLE Ca	2	[	8,78	9,25	)	9,01	8	0,32	12	0,48
VARIABLE Ca	3	[	9,25	9,73	)	9,49	10	0,40	22	0,88
VARIABLE Ca	4	[	9,73	10,20	]	9,96	3	0,12	25	1,00

c)



$d)\, \overline{X} = 9.27 mg/DL$

2) Se ha pedido a los estudiantes de un paralelo pesarse en la clínica de su centro de estudios, y traer los resultados en kilogramos. El profesor recibe la información del presidente del paralelo en una hoja de esta manera.

40	46,2	50	50	55	66	56,8	75	42,5	51
52	53	62,5	48,2	50,5	56,5	56	58	57	63
61	53,5	54	47	52,5	52	58,5	55	60	68

a) ¿Qué tipo de variable es esta?

b) Construye la tabla de frecuencias con 7 clases.

c) Representa la información en un histograma.

d) Halla el peso promedio y la desviación estándar del peso en el paralelo.

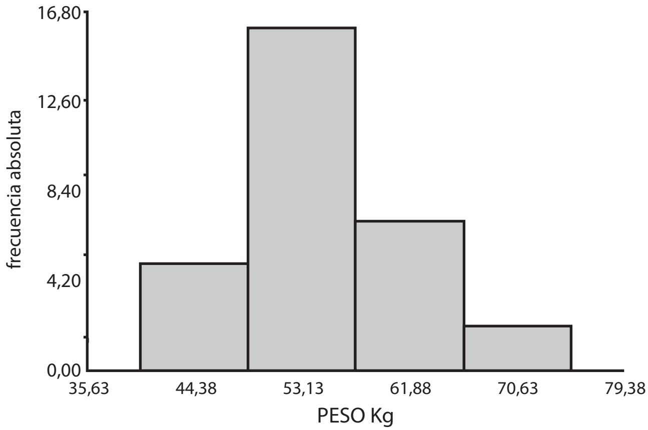
Respuesta

a) cuantitativa continua.

b)

Variable	Clase	LI	LS	MC	FA	FR	FAA	FRA
PESO Kg	1	[40,00	45,00]	42,50	2	0,07	2	0,07
PESO Kg	2	(45,00	50,00]	47,50	5	0,17	7	0,23
PESO Kg	3	(50,00	55,00]	52,50	10	0,33	17	0,57
PESO Kg	4	(55,00	60,00]	57,50	7	0,23	24	0,80
PESO Kg	5	(60,00	65,00]	62,50	3	0,10	27	0,90
PESO Kg	6	(65,00	70,00]	67,50	2	0,07	29	0,97
PESO Kg	7	(70,00	75,00]	72,50	1	0,03	30	1,00

c)



d) $\overline{x} = 55.02Kg, S^2 = 7.4Kg$

3) Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada y de las que sean falsas justifica por qué lo son.

a) ___Las medidas de tendencia central son estadígrafos de posición

b) ___ La media aritmética de un conjunto de datos no es única.

c) ___ La media aritmética está influida por valores extremos

d) ___ La moda es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta en un conjunto de datos.

e) ___ La moda es única.

f) ___ La moda se utiliza únicamente en el análisis de situaciones en que intervienen variables cualitativas

g) ___ La mediana siempre ocupa el valor central de un conjunto de datos.

h) ___La mediana se puede calcular solamente en distribuciones de frecuencias que sea numéricas.

i) ____La mediana es el valor que equidista de los extremos en un conjunto de datos ordenados en forma creciente o decreciente.

Respuesta

a) V

b) F

c) V

d) V

e) F

f) F

g) V

h) V

i) V

4) Completar la siguiente tala de frecuencia.

x_i	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
3	2	2	0,07	0,07
4				0,2
5	6	12	0,2	0,4
6		19		
7	5	24	0,17	
8				0,9
9		29	0,07	0,97

Respuestas:

x_i	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
3	2	2	0,07	0,07

4	4	6	0,13	0,2
5	6	12	0,2	0,4
6	7	19	0,23	0,63
7	5	24	0,17	0,8
8	3	27	0,1	0,9
9	2	29	0,07	0,97
10	1	30	0,03	1

5) En una tienda de autos, se registra la cantidad de autos Chevrolet vendidos en cada día del mes de noviembre. Marcar la respuesta correcta con una X.

Autos vendidos	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia acumulada**	**Frecuencia relativa**	**Frec. relativa acumulada**	**Frecuencia porcentual**	**Frec. porcentual acumulada**
0	8	8	0,267	0,267	26,7%	26,7%
1	7	15	0,233	0,500	23,3%	50,0%
2	7	22	0,233	0,733	23,3%	73,3%
3	5	27	0,167	0,900	16,7%	90,0%
4	3	30	0,100	1	10,0%	100%
Total	**30**		**1**		**100%**	

En este mes se vendieron como máximo 3 autos en:

___ 7 días y corresponde a un 22 % del total. __X__ 27 días y corresponde al 90% del total

___22 días y corresponde al 23,3% del total _____5 días y corresponde al 90% del total

6) Calcula la media y la desviación estándar en:

a) 5, 8, 3, 2, 1, 5, 7, 10, 2.5, 9, 7, 5.9

b) 21, 23, 25, 27, 28, 20, 22.4, 25.6, 30, 24, 29.5

c) ¿Cuál de las dos distribuciones anteriores presenta mayor dispersión?

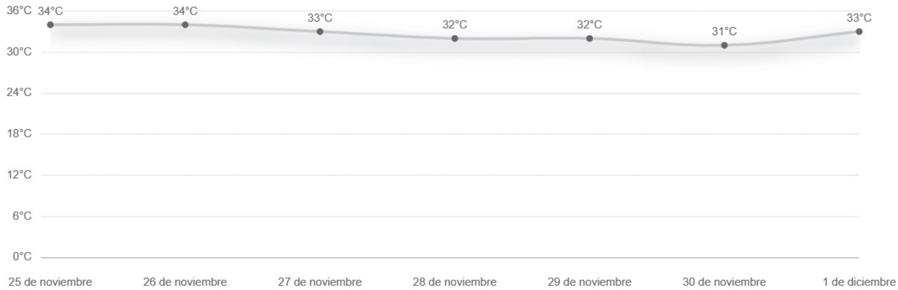
Respuesta

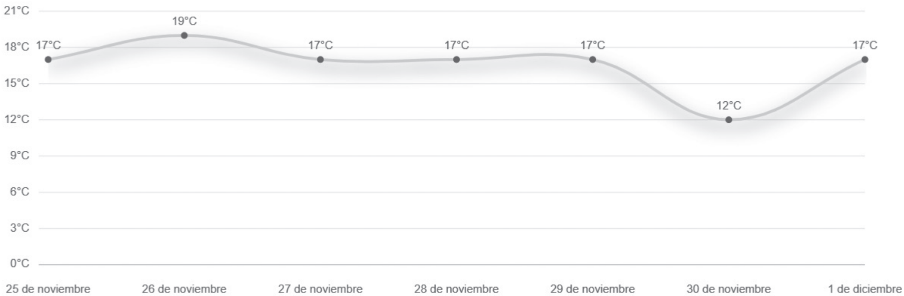
a)Media 5.5 desviación estándar 2.89.

b)Media 25.05 desviación estándar 3.34.

c)La mayor dispersión la tiene el segundo conjunto de datos por tener una desviación estándar mayor.

7) Pronostico de la temperatura en Guayaquil y Riobamba para los días del 25 de noviembre al 1 de diciembre de 2024.





a) Clasifique las variables en ambos gráficos, registrada en los 7 días.

b) Que día se registrara la menor temperatura, en Guayaquil y en Riobamba.

c) Calcular la temperatura media y varianza de Guayaquil y en Riobamba en esos días.

d) Representar la temperatura registrada en esos días en una tabla de frecuencias.

8) La tabla muestra las estaturas de cinco jugadores de un equipo de baloncesto que participaron en el primer tiempo de un partido. Si la media de las estaturas de ellos es 1,94 m entonces el dato que falta en la tabla es:

1) _____ 2,00 m	Estatura (metros)	Cantidad de jugadores
2)_____ 1,90 m	2,06	1
3)_____ 1,84 m	2,00	1
4)_____ 1,80 m	1,90	2
		1

Respuesta

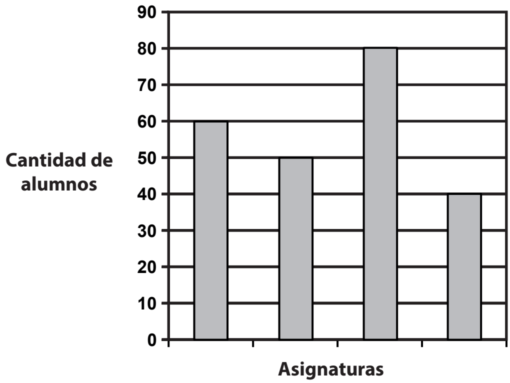
1) _____ 2,00 m

2)_____ 1,90 m

3)___X__ 1,84 m

4)_____ 1,80 m

9) El gráfico muestra la cantidad de alumnos que participaron en los concursos de Matemática, Español, Historia y Biología de un municipio. La mayor participación de los alumnos fue en Matemática y la menor cantidad fue en Biología. Participaron más alumnos en Español que en Historia.



Se puede afirmar que:

1)___La cantidad de participantes en Español excede en 20 a los participantes en Matemática.

2)___ Participaron 40 alumnos menos en Biología que en Historia.

3)___ Participaron en total 230 alumnos.

4)___El 80% de los participantes fue en Matemática.

Respuestas

___La cantidad de participantes en Español excede en 20 a los participantes en Matemática.

2)__X_ Participaron 40 alumnos menos en Biología que en Historia.

3)__X_ Participaron en total 230 alumnos.

4)___El 80% de los participantes fue en Matemática

En una investigación antropométrica realizada en un centro educativo, se midieron los pesos (en kg) de una muestra de estudiantes de 10 mo grado: Se puede afirmar que:

1)___La cantidad de participantes en Español excede en 20 a los participantes en Matemática.

2)___ Participaron 40 alumnos menos en Biología que en Historia.

3)___ Participaron en total 230 alumnos.

4)___El 80% de los participantes fue en Matemática.

Respuestas

___La cantidad de participantes en Español excede en 20 a los participantes en Matemática.

2)__X_ Participaron 40 alumnos menos en Biología que en Historia.

3)__X_ Participaron en total 230 alumnos.

4)___El 80% de los participantes fue en Matemática

En una investigación antropométrica realizada en un centro educativo, se midieron los pesos (en kg) de una muestra de estudiantes de 10 mo grado:

Intervalo	Ni	Fi
[51-57)	1	0,025
[57-62)	8	0,2
[62-67)	14	0,3
[67-72)	11	0,275
[72-77)	6	0,15

a) La variable observada es cuantitativa __________________.

b) El tamaño de la muestra seleccionada es _______________.

c) La frecuencia absoluta de la clase modal es _____________.

d) La frecuencia absoluta acumulada para estudiantes con peso menor que

67 Kg. es

Respuestas

a)Cuantitativa continua.

b)6

c)14

d)23

Trabajo con Variables

En matemáticas y ciencias, las variables son símbolos que representan valores desconocidos o cambiantes. Se utilizan para simplificar y resolver ecuaciones, modelar situaciones del mundo real, y realizar experimentos y análisis de datos.

En Álgebra, las variables son símbolos que representan números desconocidos o valores que pueden cambiar. Son esenciales para escribir y resolver ecuaciones y expresiones algebraicas. Las variables se denotan comúnmente por letras como x, y, o z.

Las variables son fundamentales en el aprendizaje y aplicación de conceptos matemáticos y científicos. Permiten expresar relaciones y patrones de manera compacta y manejable. Además, son esenciales para el desarrollo de fórmulas y funciones que describen fenómenos físicos y naturales.

Las variables permiten expresar relaciones matemáticas de manera general y flexible. En lugar de trabajar con números específicos, las variables nos permiten trabajar con fórmulas que son aplicables a una amplia gama de situaciones. Esto es fundamental para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas y para comprender conceptos matemáticos avanzados.

A continuación, se presentan propiedades básicas de potencias y de radicales que formaran una base indispensable para poder efectuar el trabajo con variables y por ende se extenderá a gran parte de la matemática que usted estudiará a futuro.

Potencias

Para a real y n > 1 natural

an = a.a...a (n veces)

0n = 0

00 = indeterminado

Sean a, b, r, s (a>0; b>0) números reales cualquiera, entonces se cumple que:

a) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$

b) $a^{r-s} = a^r : a^s$

c) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

d) $a^r : b^r = (a : b)^r$

e) $(a^r)^s = a^{rs} = (a^s)^r$

f) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

g) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$

Si r < s se cumple que	
$a^r < a^5$; si a > 1	$a^r > a^s$; si 0< a< 1

Radicales:

Si a>0; m, n Î Z con n > 1, se cumple que

a) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

c) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

d) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

e) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

f) $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejercicios 4. Trabajo con Variables

Reduce la siguiente expresión

$-2x\ (3x^2+2x-1) + 4x+2x^2+6-4x^3-10x+5$

Respuesta

$-6x^3 -4x^2 + 2x -6x+2x^2-4x^3+11$

$-10x^3-2x^2-4x+11$

1. Sean las expresiones $A=\frac{m^3+4m^2-5m}{m^3+125}$ y $B=\frac{3-3m^2}{m^3-4m^2+20m+25}$

a) Prueba que para todos los valores admisibles de la variable se cumple que;

$$\frac{A}{B}=-\frac{m}{3}$$

Solución:

Debemos resolver la operación A: B, lo cual es equivalente a resolver la operación

$$\frac{m^3+4m^2-5m}{m^3+125}\bullet\frac{m^3-4m^2+20m+25}{3-3m^2}$$

Y al simplificar en esta expresión se obtiene que: $\frac{A}{B}=-\frac{m}{3}$

3. Dada la expresión $M=\dfrac{\frac{x}{1+x}+\frac{1-x}{x}}{\frac{x}{1+x}-\frac{1-x}{x}}$

a) ¿Para cuáles valores de x no está definida?

b) Simplifica y calcula su valor numérico para x = $\frac{1}{2}$

Respuesta

Está claro que la expresión M no puede estar definida para x = – 1 ni para x = 0 pero hay que analizar también que cuando $\frac{x}{1+x}-\frac{1-x}{x}=0$ tampoco está definida lo que nos conduce, luego de eliminar los denominadores, a la ecuación 2x2 – 1 =0 que nos entrega soluciones x = para los que no puede estar definida.

Al efectuar en el numerador y en el denominador llegamos a la expresión siguiente que al evaluar para x = 1/2 nos queda M = – 2.

Solución:

Debemos resolver la operación A: B, lo cual es equivalente a resolver la operación

$$\frac{m^3+4m^2-5m}{m^3+125} \bullet \frac{m^3-4m^2+20m+25}{3-3m^2}$$

Y al simplificar en esta expresión se obtiene que: $\frac{A}{B}=-\frac{m}{3}$

3. Dada la expresión $M=\dfrac{\frac{x}{1+x}+\frac{1-x}{x}}{\frac{x}{1+x}-\frac{1-x}{x}}$

a) ¿Para cuáles valores de x no está definida?

b) Simplifica y calcula su valor numérico para x = $\frac{1}{2}$

Respuesta

Está claro que la expresión M no puede estar definida para x = – 1 ni para x = 0 pero hay que analizar también que cuando $\frac{x}{1+x}-\frac{1-x}{x}=0$ tampoco está definida lo que nos conduce, luego de eliminar los denominadores, a la ecuación 2x2 – 1 =0 que nos entrega soluciones x = para los que no puede estar definida.

Al efectuar en el numerador y en el denominador llegamos a la expresión siguiente que al evaluar para x = 1/2 nos queda M = – 2.

4. Calcular:

$$a)\ \frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2+4}$$

Respuesta

Notemos que x2 - 4 se puede factorizar como una diferencia de cuadrados:

$x^2-4 = (x-2)\ (x+2)$

El denominador común

$(x-2)\ (x+2)\ (x^2+4)$

Plantear las igualdades

4. Calcular:

$a)\ \frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2+4}$

Respuesta

Notemos que x2 - 4 se puede factorizar como una diferencia de cuadrados:

$x^2-4 = (x-2)\,(x+2)$

El denominador común

$(x-2)\,(x + 2)\,(x^2 + 4)$

Plantear las igualdades

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{4\left(x^2+4\right)}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}$$

$$\frac{6}{x^2+4}=\frac{6(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

La expresión final posterior a sumar las fracciones seria:

$$\frac{10x^2-8}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

5. $\left(x+\dfrac{4}{x-2}\right)\left(x-\dfrac{4}{x-2}\right)$

Respuesta

$$x^2-\frac{16}{(x-2)^2}=\frac{x^2(x-2)^2-16}{(x-2)^2}=\frac{\left(x^2-2x+4\right)\left(x^2-2x-4\right)}{(x-2)^2}$$

6. Calcula y simplifica.

$$\frac{4x^2-9y^2}{xy+y^2}\div\frac{6x^2-xy-12y^2}{xy+y^2}$$

Respuestas

El cociente se transforma en producto

$$\frac{4x^2-9y^2}{xy+y^2}\cdot\frac{xy+y^2}{6x^2-xy-12y^2}=\frac{2x+3y}{3x+4y}$$

1. Dadas las expresiones algebraicas:

$$A=(3a-1)^2-4a\left(\frac{1}{2}a+3\right);B=2x^4z-4x^2z-16z;yC=3m^{-2}+mn+$$

a) Calcula y simplifica la expresión A.

b) Descompón completamente en factores la expresión B.

c) Calcula el valor numérico de C

Respuesta

a) $7a^2-18a+1$

b) 2z (t–2) (t+2) (t^2+2)

c)El resultado es 1

2.Dadas las expresiones algebraicas:

$$A=(4x+b)(x-b);B=2x+b;yC=12x^4y+33x^2y-9y$$

a)Calcula y simplifica la expresión A-B^2

b)Descompón completamente en factores la expresión C.

c) Calcula el valor numérico de B para $x=\frac{2^2\cdot 3^2}{10^2}$ y $b=-1{,}5$

Respuestas

a) x (8x + b)

b) 3y.(2x–1) (2x+1) (x2+3)

c) 0.66

3. Dadas las expresiones algebraicas:

$$M=\left(a-\tfrac{1}{10}\right)\left(a+\tfrac{1}{10}\right)-(2a-1)^2+0{,}01$$

$$P=2m^2n^0-p$$

a) Calcula y simplifica la expresión *M*

-Descompón completamente en factores la expresión *N*.

Calcula el valor numérico de P para $m = -\frac{1}{3}$; $n = 0{,}7$ y $p = \frac{\left(8^2\right)^{-1} \bullet 8}{4^{-1}}$

Respuesta:

a) $-3a^2+4a-1$

b) 3x (2xy+3) (xy−5)

c) $-\frac{34}{9}$

4. Sean las expresiones $A = \frac{m^3+4m^2-5m}{m^3+125} \text{y} B = \frac{3-3m^2}{m^3-4m^2+20m+25}$

Prueba que para todos los valores admisibles de la variable m se cumple que $\frac{A}{B} = -\frac{m}{3}$

Respuestas

$$\frac{\frac{m^3+4m^2-5m}{m^3+125}}{\frac{3-3m^2}{m^3-4m^2+20m+25}} = \frac{m^3+4m^2-5m}{m^2-5m+25} \cdot \frac{m^3-4m^2+20m+25}{3-3m^2} \neq -\frac{m}{3}$$

No se cumple la igualdad, nótese que los polinomios:

$m^3 - 4m^2 + 20m + 25 \text{y} m^2 - 5m + 25$ son irreducibles.

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Capítulo 4

Ecuaciones e Inecuaciones

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

Introducción

Las ecuaciones e inecuaciones son herramientas esenciales que nos permiten modelar, analizar y resolver problemas en una amplia gama de campos. Su uso adecuado puede mejorar la eficiencia, optimizar recursos y proporcionar soluciones precisas y efectivas a desafíos complejos.

Ecuación

Una ecuación es una declaración matemática que afirma que dos expresiones son iguales. Las ecuaciones tienen un signo de igualdad (=) entre las dos expresiones (miembros). Se utilizan para encontrar los valores de las variables que las satisfacen.

Inecuación

Una inecuación es una declaración matemática que compara dos expresiones (miembros), utilizando signos de desigualdad en lugar de un signo de igualdad. Los signos de desigualdad incluyen $<$ (menor que), $\leq$ (menor o igual que), $>$ (mayor que) y $\geq$ (mayor o igual que).

Clasificación de las ecuaciones para su estudio.

Racionales {lineales, cuadráticas, fraccionarias y modulares}

Irracionales {con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas}

Clasificación de las inecuaciones para su estudio.

Racionales {lineales, cuadráticas y fraccionarias}

Irracionales {Exponenciales y logarítmicas}

Ecuaciones lineales

- Forma: $a x + b = 0$; $a \neq 0$
- Resolución: Se despeja la variable: $x = -b/a$

Destacaremos que al solucionar este tipo de ecuaciones u otras lo que se aplica son las reglas de transformaciones equivalentes, lo que implica aplicar transformaciones hasta lograr despejar la variable o las variables aplicando transformaciones que garanticen en cada procedimiento la igualdad, es por eso que es recomendable cuando se resuelven las ecuaciones no decir el número que está negativo en el miembro izquierdo pasa al miembro derecho positivo pues en realidad no es que pase es que se obtiene en dicho miembro negativo por las regalas de transformación, lo que sin dudas en la práctica se hace directo y da la impresión que las constantes o variables pasan de un miembro a otro pero en realidad no es eso lo que sucede, por ejemplo:

5x-4 = 6

5x-4+4= 6+4 se cancelan los 4 del miembro derecho y se obtiene:

5x= 6+4

5x = 10 luego se divide toda la ecuación por 5

5/5x = 10/5   se simplifican los 5 del miembro izquierdo quedando:

X= 10/5 resultando

X = 2 que sin dudas es la solución.

Ejercicios 5. Ecuaciones lineales.

Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $2x - 3 \ = 6 + x$

b) $\frac{x-2}{6} - \frac{x-3}{2} = 1$

c) $-[2.(x+1) - \frac{x-2}{4} = \frac{2x}{3-} - \frac{5x-3}{12} + 2x$

d) $\frac{8}{2x-6} = \frac{10}{2x-4}$

e) $2x^2 - 8x + x - 4 + 13 \quad 2x^2 - 10x$

f) $3x - [2x + 10 - 4] \quad = 7x$

Solución

a) $2x - x \ = 6 + 3\, ; x = \ 9$

b) $x = \frac{1}{2}$

c) $x = \frac{3}{32}$

d) Dominio de solución de la ecuación, todos los números reales distintos de 2 y 3. Solución: x = 7.

e) x = -3

f) Dominio de solución de la ecuación, todos los números reales distintos de 2 y 3. Solución: x = 7.

g) x = -3

Resuelve, o despeja la incógnita en, las ecuaciones siguientes:

$a)\ x-(8x-69)+(6x-50)=2x-(x-5)$
$b)\ 5x-6=4(x-1)+x$
$c)\ 9x-(2x-3)=3(x+1)+4x$
$d)\ 2y^2+(-y+8)=(2y+3)(y-4)$
$e)\ 3w^2-(w-5)(w-3)=2w^2+1$

Respuestas:

a) x = 7

b) La ecuación no tiene solución.

c) Tiene infinitas soluciones.

d) y = -5

e) w = 2

Ejercicios 6. Problemas que conducen a ecuaciones lineales.

En primer lugar, propondremos una serie de ejercicios preparatorios para poder resolver los problemas propuestos.

1- Representar mediante variables las situaciones siguientes-

a) EL triplo de un número disminuido en 2 unidades.

b) La cuarta parte de un número

c) El 30% de la edad de Juan.

d) La suma de dos números enteros consecutivos.

e) Hace 7 años la edad de José excede a María en 5 años.

f) Luis tiene el doble de lo que tiene Juan.

g) El largo de un rectángulo excede al ancho en 5 cm. y su área es 44 cm2.

h) De un saco de camote se extrae el 20% de la cantidad de camote.

Respuestas:

a) 3x - 2

b) $\frac{x}{4}$

c) 0.3x

d) x+x+1

e) x-7 = (x-7) + 5

f) 2x = x

g) x (x + 5) = 44

h) x – 0.2x

2- Escribe con palabras, la situación que puede describir las expresiones algebraicas siguientes.

a) x -8x

b) 2(x +1) +x = 8

c) $\frac{x}{2} = 5x$

Respuesta:

a)Un numero menos ocho veces el número.

b)El duplo de un numero aumentado en uno más el número igual a 8.

c)La mitad de un número igual a cinco veces el número.

3. La medida de un lado de un rectángulo es 14 cm mayor que el duplo de la medida de otro lado y su perímetro es 64 cm. Si consideramos que x es la altura la longitud de uno de los lados del rectángulo. La situación planteada en el problema se puede expresar mediante la ecuación:

a) 3x – 10 = 64 ____

b) 2(3x +10) = 64 ____

c) 2(x+14) + 4x = 64 _____

d) 2X+2(2X+14) =64____

Respuestas:

2X+2(2X+14) =64

4- Dos obreros de la construcción realizaron durante un mes entre ambos un total de 75 horas de trabajo. El triplo de la cantidad de horas realizadas por uno de ellos es igual al doble de las horas realizadas por el otro. Si queremos saber la cantidad x de horas de trabajo voluntario que realizó cada obrero, ¿cuál de las siguientes ecuaciones pude servir para averiguarlo?

a) ___ $3x = 2x + 75$ b) ___ $2(x - 75) = 3x$

c) ___ $6x = 75 - x$ d) ___ $3x = 2(75 - x)$

Respuestas:

d) ___ $3x = 2(75 - x)$

5. Ricardo tiene el triplo de horas de trabajo que Gladys entre los dos tienen 64 h ¿cuántas horas tiene cada uno?

Respuestas:

$x + 3x = 64$

$x=16$

Gladis 16 h

Ricardo 3(horas de Gladis) = 3(16 h.) = 48 h.

6. En un aula hay 28 alumnos .si hay 6 hembras más que varones, ¿cuántas hembras y cuantos varones hay?

Respuestas:

Numero de varones x

Número de hembras x + 6

$x + x+6 = 28$

$2x = 22$

$x= 11$

Número de varones 11

Número de hembras 17

7. En una refinería se produjeron 180000t de gas combustible en dos años. Si la producción de un año supero en 20000 t a la del año anterior. ¿Cuántas toneladas de gas se produjeron en cada año?

Respuestas:

x producción del año anterior.

x + 20000 producción en un año.

$x + x +20000 = 180\,000$

2x = 180 000 – 20 000

2x = 16 000

$$x = \frac{16000}{2}; x = 8000t.$$

8. Hallar tres números naturales consecutivos cuya suma sea 412.

Primer número x

Segundo número x+1

Tercer número x + 2

X +(x +1) +(x +2) = 153

3x = 150

x = 50, x+1= 51, x+2 = 52

9. Recorremos un camino de 2 km a una velocidad de 4 km/h. ¿Cuánto tardamos en llegar al destino?

Respuestas:

De física conocemos la fórmula $V = \frac{S}{t}$; en el caso que nos ocupa sustituyendo obtenemos: $4km/h = \frac{2km.}{t}$; de aquí obtenemos $t = \frac{2Km}{4Km/h}, t = 0.5h$

10. Un joven tiene 350 euros y su compañero tiene 300. Ambos se compran el mismo teléfono. Después de la compra, al compañero le quedan tres cuartas partes del dinero dinero que le queda al joven. Calcular el precio del libro.

Respuestas:

x precio del teléfono

300-x $= \frac{3}{4}(350 - x)$

$300 - x = 262.5 - \frac{3}{4}x; \quad \frac{3}{4}x - x = 26.5 - 300; \quad -\frac{x}{4} = -37.5; \quad x = 150€$

11. En una finca se plantaron 2 caballerías más de papas que de camote. Después de una semana de trabajo en la recolección, los trabajadores de la finca verificaron que aún quedaba por recoger el 21% de la plantación de papas y el 75% de la de camote, lo que implicaba que faltaba por recoger 3,9 caballerías más de camote que de papas. ¿Cuántas caballerías de cada cultivo se habían plantado?

Instruyamos el problema mediante la modelación en una tabla:

Tipos de cultivos	Cantidad de caballerías plantadas
papas	x
camote	x – 2

Atendiendo a los datos del problema podemos plantear la siguiente ecuación:

$\frac{21}{100}\,x + 3{,}9 = \frac{75}{100}(x-2)$ y al multiplicar toda esta ecuación por 100 se obtiene:

21 x + 390 = 75(x – 2)

21 x + 390 = 75 x – 150; o sea que 75x – 21 x = 390 + 150

54 x = 540 y al dividir esta ecuación por 54, se logra que x = 10

Respuesta: se habían plantado 8 caballerías de camote y 10 caballerías de papas.

12. En un centro de estudio un grupo de alumnos visitaron un museo, participaron en el curso anterior todos sus alumnos en la visita. Si la cantidad de hembras visitantes excedió en 70 al 40% de la cantidad de varones, y la razón entre la cantidad de hembras y varones es 3:4. ¿En cuánto supera la cantidad de varones a la cantidad de hembras?

Respuestas:

Formemos la solución del problema con la siguiente tabla según los datos que se ofrecen en el mismo:

Estudiantes participantes	Cantidad de estudiantes que participaron en la visita
Varones	X
Hembras	0,4x + 70

Para determinar los participantes formulamos la siguiente ecuación:

$\frac{0{,}4x+70}{x} = \frac{3}{4}$ de donde 3x = 1,6 x + 280 1,4 x= 280

$x = \frac{280}{1{,}4} = 200$ Cantidad de varones participantes, de donde al calcular el número de hembras se obtiene: 0,4.200 + 70 = 80 + 70 = 150

Luego 200 – 150 = 50

Respuesta: El número de varones supera en 50 a la cantidad de hembras que participaron en la visita.

13. Dos camiones distribuyeron cierta cantidad de materiales, de modo que cada uno transportó la mitad. El primer camión realizó 17 viajes, transportando siempre el máximo de su capacidad, excepto en el último viaje que solo utilizó el 50% de su capacidad. El segundo camión dio un viaje más y en cada viaje transportó una tonelada menos que la capacidad máxima del primer camión.

¿Cuántas toneladas de materiales transportaron entre los dos camiones?

Respuesta:

- Cantidad de viajes realizados por el primer camión…………... 17
- Cantidad de viajes realizados por el segundo camión………… 18
- Cantidad de toneladas que transporte el primer camión……….. x
- Cantidad de toneladas que transporta el segundo camión……. x – 1
  Lográndose de acuerdo con lo planteado en el problema la siguiente ecuación:

$16x + \frac{x}{2} = 18(x-1)$; Al multiplicar esta ecuación por 2

32 x + x = 36 (x – 1)

33 x = 36 x – 36; es decir 3x = 36; de donde x = 12

Y al calcular para este valor en cualquiera de los dos camiones se obtiene lo transportado por cada uno de ellos;

18. 11 = 198 y los dos camiones 2. 198 = 396 t

Respuesta: Entre los dos camiones transportaron 396 toneladas.

13. En una finca de producción agropecuaria se sembraron 40,5 hectáreas más de ajos que de cebolla. Al terminar la recolección de las 3/5 partes de las hectáreas de ajo y el 30% de las hectáreas de cebolla se concluyó que

se había recolectado un total de 97,2 hectáreas ¿Cuántas hectáreas de ajo y de cebollas fueron sembrada en la finca?

Respuesta:

Productos sembrados	Cantidad de ha sembradas
Cebolla	x
Ajo	x + 40,5

El análisis del mismo según los datos que ofrece el problema nos permite plantear y resolver la siguiente ecuación:

$\frac{3}{5}(x + 40{,}5) + \frac{3}{10}x = 97{,}2;$ Multiplicando esta ecuación por 10, se obtiene:

; 9x = 972 – 243; 9x = 729; de donde x = 81

En la finca fueron sembradas 81 ha de cebolla y 121,5 ha de ajo.

Ecuaciones cuadráticas.

Ecuaciones cuadráticas

- Forma: a x2+b x + c = 0; a ≠ 0
- Resolución:

1. Descomponiendo en factores. Se reduce a dos ecuaciones lineales.

2. Aplicando la fórmula

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; con $D = b^2 - 4ac$

Tener en cuenta que:

Si D > 0, la ecuación tiene dos raíces reales diferentes

Si D = 0, la ecuación tiene una única solución.

Si D < 0, la ecuación no tiene raíces reales.

Ejercicios 7. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Soluciones

Aplicando la fórmula general: $x_1x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_1x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$X_1 = 3 \quad x_2 = 2$

Aplicando descomposición en factores

$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) = 0$, este producto es cero cuando

$x-3 = 0$ o $x-2 = 0$ implica que las soluciones son $x1 = 3$ y $x_2 = 2$

b)$14x^2-3x-5=12$

Soluciones

$X1 = -1 \quad x_2 \approx 1.21$

c)$z^2 +4z-8=0$

Soluciones

$x_1=x_2 = -2$; tiene un cero doble.

d) $3x^2+7x-8=0$

Soluciones

$x_1 \approx -3.17 \qquad x_2 \approx 0.84$

e)$2t^2+t+9= 0$

No tiene solución real

f)Escribir una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 4 y –3.

Respuesta $(x+3.). (x-4) = x^2+x-12$

g) Determinar de modo que en la ecuación $x^2 +kx+9= 0$, tiene dos soluciones iguales para determinado valor de K.

Respuesta K = 6

h)La suma de dos números es 12 y su producto es 32. Halla dichos números.

i)Respuesta x+y=12: xy=32 x= 12-y; (12-y) y=32; 12y – y^2 = 32

-y^2 + 12y -32 =0/(-1); y^2 - 12y +32= 0; los números seria 4 y 8.

j) Dentro de 11 años la edad de Juan será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Juan.

$(x+11)=\frac{(x-13)^2}{2}$ la solución es 21 años.

k) Para vallar una finca rectangular de 750 m2 de área se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

Respuesta:

El lado menos debe medir 30 m. y el mayor 25 cm.

l) En un campeonato de basquetbol, después que cada equipo había celebrado la misma cantidad de juegos, los jugadores A y B habían anotado la mayor cantidad de puntos, en ese orden. El triplo de los puntos anotados por B era superior en 16 al duplo de los anotados por A. Si el cuadrado de los puntos conectados por B lo dividimos por los conectados por A, el cociente es 20 y el resto es 16. ¿Cuántos puntos conectó cada jugador?

Respuesta

Para resolver el problema representemos con variables lo siguiente:

- Cantidad de puntos anotados por el jugador A …… a

Cantidad de puntos anotados por el jugador B……. b De acuerdo al texto del problema es posible plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

(1) 3b = 2 a + 16; de donde (3) $a=\frac{3b-16}{2}$

(2) $\frac{b^2}{a}=20+\frac{16}{a}$ de esta última ecuación se obtiene que (4) b^2 = 20 a + 16. Sustituyendo (3) en (4).

$$b^2=10(3b-16)+16$$

$b^2-30b+144=0; (b-24)(b-6)=0;$ obteniéndose b1 = 24 ó b2 = 6, sustituyendo estos valores en (3) a1 = 28 ó a2 = 1; pero como el jugador A anotó más puntos que B, entonces:

Respuesta: El jugador A anotó 28 puntos y el jugador B 24 puntos.

2) Ecuaciones bicuadráticas. Solución:

a) $x^4 + 3x^2 - 28 = 0$

Solución

$t = x^2$ entonces sustituimos y se obtiene

$t^2 + 3t - 28 = 0$

Se descompone en $(t + 7)(t - 4) = 0$

$x^2 = 4$; $x = 2$ $x^2 = -7$, no existe solución real, por tanto, las soluciones serán $x = -2$ y $x = 2$.

b) $x^4 - 52x^2 + 576 = 0$

Solución

$t = x^2$ entonces sustituimos y se obtiene

$t^2 - 52t + 576 = 0$

Soluciones $x = 6$ $x = -6$ $x = 4$ $x = -4$

Ecuaciones Modulares

Al menos una variable se encuentra bajo el signo de módulo

• Resolución: Existen varios métodos, entre los que se utilizan con mayor frecuencia se en encuentran:

1) Supresión del módulo por definición;

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \mathbf{si} f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \mathbf{si} f(x) < 0 \end{cases}$$

2) Elevar ambos miembros de la ecuación al cuadrado (después de despejar el módulo)

3) Método de partición de intervalos.

Ejercicios 8. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $|2x+1| = 5$

Respuesta:

A partir de la definición de módulo se considera:

Si $(2x+1) > 0; |2x+1| = 2x+1; \text{si}(2x+1) < 0; |2x+1| = -(2x+1)$

Planteándose entonces $2x+1 = 5\text{y} - (2x+1) = 5$

x= 2, x= -3

b) $|x-4| = |8-x|$

Solución

x = 6

c)|2x+1|=|x+6|

Solución

$x = 5\text{y}x = -\frac{7}{3}$

d)|4x−2|=|8x+6|

Solución

$x = -2\text{y}x = -\frac{1}{3}$

e) $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| = 2$

Solución

x = -7 y x =

f)|x−1|+ 2|x-4|= |x + 1|

Solución

x = 5 y x = 3

g) $|3x-2| = 2\sqrt{(x-4)^2}$

x = -6 y x = 2

h)1 + |3x + 7 | +3x = 0

Solución

$x = -\frac{4}{3}$

Ecuaciones Fraccionarias

Contiene la variable en el denominador de al menos en una expresión.

Para eliminar los denominadores, se multiplica por el mcm de los mismos, previamente determinado.

Se resuelve la ecuación resultante.

Es recomendable. En el procedimiento de solución pueden introducirse soluciones extrañas.

Ejercicios 9. Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

a) $\frac{1}{x^2-4x} - \frac{1}{x-4} = 0$

Solución

Multiplicamos toda la ecuación por (x - 4)

$\frac{1}{x} - 1 = 0; \frac{1}{x} = 1; 1 = x$

$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-1}$

Solución

x = 9   x = -2

$$\frac{2x+3}{x-1} = 4$$

Respuesta

$$x = \frac{7}{2}$$

d) $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-2} = 2$

Respuesta

x = 0   o   x = 1

e) $\frac{x^2-4}{x+3} = 5$

Respuesta

x≈ 7.52 o x≈ -2.52

f) $\frac{5x}{2x-1} + \frac{3}{x+1} = 7$

Respuesta

No tiene solución real, conduce a una ecuación de segundo grado con el caso que $D = b^2 - 4ac < 0,\ \text{con}\ a = 9\ b = -18\ c = 10$

g) $\frac{4}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{6}{x-1}$

Respuesta

x = 0

h) Resuelve la ecuación:

$$x^2 + \frac{1}{x+2} = x + \frac{6x+13}{x+2};\ x \neq 2$$

Respuesta

X = -1

i) $x + \frac{1}{x-3} = \frac{3x-8}{x-3}$

Respuesta

No tiene solución, siendo x = 3 indefine la ecuación.

Ecuaciones con Radicales

Son aquellas ecuaciones en las que la variable se encuentra bajo el signo de radical o bien bajo el signo de elevación a un exponente fraccionario.

El método fundamental que se utiliza es la elevación de miembros de la ecuación a una misma potencia. Con frecuencia se emplea la fórmula:

$$\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]^n = f(x)$$

Comprobación: El empleo de la fórmula anterior cuando n es par puede conducir a la ampliación del dominio de definición de la ecuación. Por ello, la comprobación es obligatoria.

Ejercicios 10. Ecuaciones con Radicales

a) $(\sqrt{2x^2-1})^2 = x$

Respuesta

Solución x= 1

b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$

Respuesta

Solución x = 5

c) $\sqrt{x+3} = x-1$

Respuesta

d) Determina todos los valores de "m" para los cuales x = 6 es una solución de la ecuación:

• Investiga si para los valores de m hallados la ecuación tiene alguna solución diferente de 6.

$$\sqrt{\sqrt{m-1}+\sqrt{mx+12}}=3$$

Respuesta

$$\left(\sqrt{m-1+\sqrt{mx+12}}\right)^2=3^2$$

$$m-1+\sqrt{mx+12}=9$$

$$\sqrt{mx+12}=10-m$$

$$(\sqrt{mx+12})^2=(10-m)^2$$

$$mx+12=100-20m+m^2$$

$$m^2-(x+20)m+88=0\ \ sustituimos\ x=6$$

$$m^2-26m+88=0$$

$$(m-4)\,(m-22)=0$$

$$m=4 \quad y \quad m=22$$

Consideremos para m= 4

$$\sqrt{3+\sqrt{4x+12}}=3$$

$$(\sqrt{3+\sqrt{4x+12})})^2=3^2$$

$$3+\sqrt{4x+12}=9$$

$$\left(\sqrt{4x+12}\,\right)^2=6^2$$

$$4x+12=36$$

$$X=6$$

Consideremos para m= 22

$\sqrt{21+\sqrt{22x+12}}=3$

$(\sqrt{21+\sqrt{22x+12}}))^2=3^2$

$21+\sqrt{22x+12}=9$

$\left(\sqrt{22x+12}\,\right)^2=(-12)^2$

$22x+12=144$

$X=6$

En ambos casos el resultado es 6, cuando m toma los valores de 4 y 22. Por tanto no tiene solución distinta de 6.

e) Determine para que valores de x de cumple la siguiente identidad.

$$3\sqrt{\frac{x+1}{4x^2+4}}-\sqrt{\frac{x+1}{4x^2+4}}=1$$

Respuesta

$$2\left(\sqrt{\frac{x+1}{4x^2+4}}\right) = 1$$

$$\left[2\left(\sqrt{\frac{x+1}{4x^2+4}}\right)\right]^2 = (1)^2$$

$$4\left(\sqrt{\frac{x+1}{4x^2+4}}\right)^2 = 1$$

$$4\left(\frac{x+1}{4x^2+4}\right) = 1$$

$$\frac{4(x\ +1)}{4(x^2+1)} = 1$$

$$\frac{(x\ +1)}{(x^2+1)} = 1$$

$$(x\ +1) = \ (x^2+1)$$

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(\ x-1) = \ 0$$

$$x = \ 0 \ \ o \ \ x = 1$$

Haciendo la comprobación se tiene la solución: $S = \ \{0; 1\}$

$f)x - 1 = \dfrac{x+5}{\sqrt{x+5}}$

Respuesta

X= 4

e) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} = 2$

Respuesas

$x = \sqrt{2} \qquad x = -\sqrt{2}$

Ecuaciones Exponenciales

Forma: $a^{f(x)} = a^{g(x)};\ a > 0, a \neq 1$

Resolución: Se basa en el siguiente teorema:

"Si a > 0, a ≠ 1, entonces la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ es equivalente a la ecuación f(x)=g(x)"

Comprobación: depende del tipo de ecuación que resulta f(x)=g(x).

Ejercicios 11. Ecuaciones Exponenciales

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{2x} \cdot 2^{\frac{1}{x-3}} = 32$

b) $4^{\sqrt{x}+1} - \frac{13}{4^{\sqrt{x}}} = \frac{3}{2}$

c) $\left(\sqrt{2}\right)^{2x} \cdot 2^{\frac{1}{x-3}} = 32$

d) $49^{\frac{2}{x}} \cdot 7^{\frac{\sqrt{x+12}}{x-8}} = 1$

e) $4 \cdot 3^{x+1} - 18 \cdot 3^{x-2} - 8 \cdot 3^{x}$ Reduce como sea posible y calcula el valor para cuando $x = log_2 \frac{1}{2}$

f) $9^{\frac{\sqrt{x}}{2}} \cdot 3^{\sqrt{x+5}} = \left(\sqrt{3}\right)^{2x+2}$

Respuestas

a) $x = 4$

b) $x = \frac{1}{4}$

c) $x = 4$

d) $x = 8$

e) $4 \cdot 3^{x+1} - 18 \cdot 3^{x-2} - 8 \cdot 3^{x} = 2^{3x}; \quad para\ x = \ log_2 \frac{1}{2}; el\ valor\ es\ \frac{1}{8}$

f) La solución es $x = 4$

Ecuaciones Logarítmicas

Forma: $\log_a f(x) = \log_a g(x);\ a > 0, a \neq 1$

Resolución: Se basa en el siguiente teorema:

“La ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es equivalente al sistema mixto

$$\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}$$

Comprobación: Es necesario cuando sólo se resuelva la ecuación f(x)=g(x).

Ejercicios 12. Ecuaciones Logarítmicas

1). Calcular la solución de las siguientes ecuaciones.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left(4x^2-5x+1\right)} + (0,1)^{-2} = 101$$

Respuesta

a) $x = 0$ y $x = \frac{5}{4}$

b) $(x-1)\,log\,5 + (x-2)\,log\,2 = log\,(10^{x} - 950)$

Respuesta

b) La solución de la ecuación es x=3.

c) $9^{0,5+log_9\sqrt{x+4}} - 3^{log_3\sqrt{x+1}} = 5$

Respuesta

c) Para $x =-\frac{15}{16}$ se obtiene un valor negativo en la raíz, por lo que no es una solución válida. La única solución válida es x = 0.

d) $log_{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right) = 4$

Respuesta

d) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \left(\sqrt{2}\right)^4; \quad \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = 4$

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 4\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x-1} = 4\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}$

$\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x+1}$, elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos

$x - 1 = 9(x+1) = 9x + 9$

$x - 1 = 9x + 9; \quad x - 9x = 9 + 1; \quad -8x = 10; \quad x = -\frac{5}{4}$

Pero este valor hace que $\sqrt{x+1}, \sqrt{x-1}$ sean números complejos, ya que ambos radicandos serían negativos. Lo que implica que no tiene solución real.

e) $125^{log\sqrt{\frac{1}{x}}} \cdot 5^{log\,x} = (25)^{1,5+log\sqrt{x}}$

Respuesta

e) La solución es x = 0.01

f) $4^{\sqrt{x}+1} - \frac{13}{4^{\sqrt{x}}} = \frac{3}{2}$

Respuesta

La solución es 0.25.

f) $\log x + \log(x+8) = \log 40 - \log 2$

Respuesta

f) Dado que log(x) no está definido para valores negativos, descartamos x = -10, l solución es x = 2.

g) $9^{\log_2(x+1)} \cdot 3^{\log_2(x+2)} = 10^{\log 3}$

Respuesta

x = 0

Inecuaciones

Inecuaciones lineales

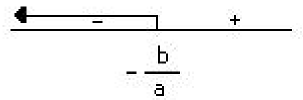
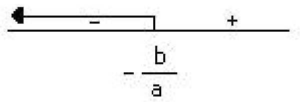
Forma: a x + b 0 ó a x + b 0; a 0

Resolución:

Los sumandos se transforman de igual manera que en las ecuaciones, agrupando en un mismo miembro los términos que contienen la variable y los números en el otro miembro.

El coeficiente de la variable se transforma de igual manera que en las ecuaciones, prestando atención a que:

Si el coeficiente es positivo, la desigualdad no se altera.

Si **a**>0;	Si **a**<0;
$ax+b \leq 0$	$ax+b \geq 0$
$x \leq -\dfrac{b}{a}$	$x \leq -\dfrac{b}{a}$
	
Solución:	Solución:
$\{x \in \mathrm{R} : x \leq -b/a\}$	$\{x \in \mathrm{R} : x \leq -b/a\}$

Si el coeficiente es negativo, el signo de la desigualdad se invierte

Ejercicios 13. Inecuaciones lineales

Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones lineales.

a) 2x-5 < 3   dominio *R*

Respuesta

x< 4

b)3x+4 ≥ 2x+7 dominio *R*

Respuesta

x ≥ 3

c)5x-2 ≤ 3x+6 dominio *R*

Respuesta

$X \leq 4$

d)-2x+7 > -3x+2   dominio *R*

Respuesta

$X > -5$

e)4-x ≤ 2x+1 dominio *R*

Respuesta

$x \geq 1$

Inecuaciones Cuadráticas

Forma: $ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ ó } ax^2 + bx + c \geq 0;\ a \neq 0$

Resolución:

Se garantiza que a sea mayor que 0

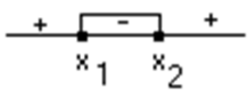
Se escribe descomponiendo en factores el trinomio $ax^2 + bx + c$

Si x1 y x2 son los ceros, entonces:

$ax^2 + bx + c \leq 0$

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \leq 0$

$ceros: x = x_1; x = x_2$



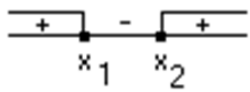
Solución:

{x ε R: $x_1 \leq x \leq x_2$}

$ax^2 + bx + c \geq 0$

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \geq 0$

$ceros: x = x_1; x = x_2$



Solución:

{x ε R: $x \leq x_1$ ó $x \geq x_2$}

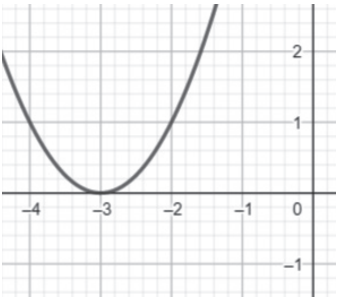
Ejercicios 14. Inecuaciones Cuadráticas

Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a)$x^2+8x+12 > 2x+3$

Respuesta

$x^2+6x+9 > 0$

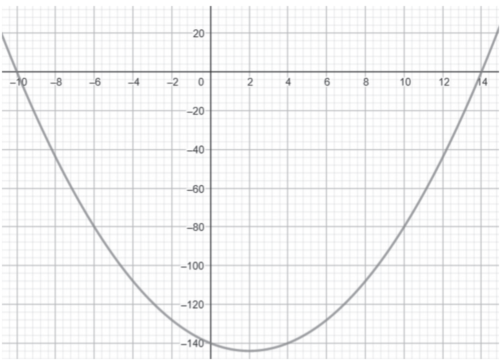


$S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -3\}$

b) $x^2 - 4x - 140 < 0$

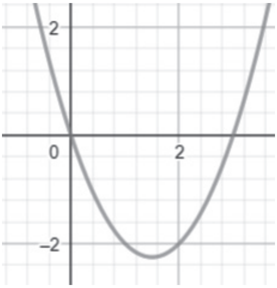
Respuesta

$S = \{x \in \mathbb{R} / -10 < x < 14\}$



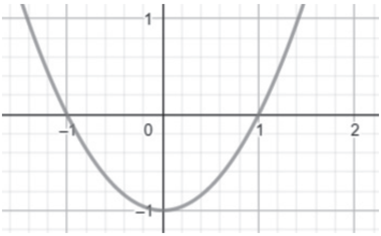
c) $(r-1)^2 \geq r+1$

Respuesta



$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0; x \geq 3\}$

d) 1 – t ≥ t (t – 1)



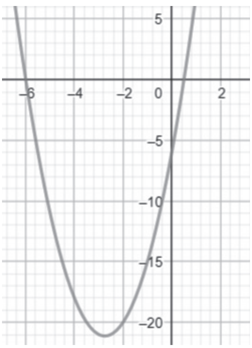
$S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$

e) 2n (2– n) ≤4 – 5(2 – 3n)

Respuesta

– 2n²– 11n + 6 ≤ 0 multiplicar por (-1)

$S = \left\{x \in \mathbb{R} / -6 < x < \frac{1}{2}\right\}$



Inecuaciones Fraccionarias

Forma: Contiene la variable al menos en el denominador de una expresión

Resolución

Se transforma la inecuación algebraicamente hasta que resulte en un cociente comparado con cero:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \; o \; \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

- Garantizar que los coeficientes dominantes de P(x) y Q(x) sean ambos mayores que cero. (El coeficiente de la variable de mayor grado debe ser mayor que cero)
- Descomponer en factores tanto el numerador como el denominador y simplificar si es posible.
- Representar todos los ceros de numerador y del denominador en una recta numérica
- Si los factores no aparecen elevados a exponentes pares, en dicho cero se produce un cambio de signo.
- Comenzar de derecha a izquierda con el signo más e ir alterando los signos según corresponda.
- Tener en cuenta
- Si la desigualdad es o no estricta
- Cuando se simplifican factores hay que excluir del dominio y, por tanto, de la respuesta, los ceros de los factores que se simplificaron.

Ejercicios 15. Inecuaciones Fraccionarias

Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{x^2-2x+1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} > 0$

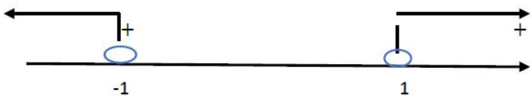
$$\frac{(\boldsymbol{x-1})^{\mathbf{2}}}{(\boldsymbol{x+1})^{\mathbf{2}}} \cdot \frac{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1})}{(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x+1})} > 0$$

$$\frac{(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1})}{(\boldsymbol{x+1})^{\mathbf{3}}} > 0$$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -1 \quad x > 1\}$

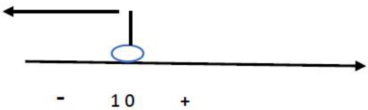
Ceros del numerador x1 = 1

Ceros del denominador: x2 = - 1



b) $\frac{x^2+4}{x-10} < 0$

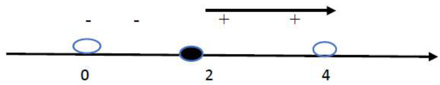
Respuesta



$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -10\}$$

c) $\frac{x+1}{(x-7)^2(3-2x)} \leq 0$

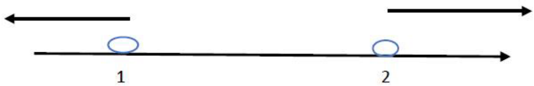
Respuesta
$s = \{x \in \mathbb{R} / x > 2; x \neq 0; x \neq 4\}$



d) $\dfrac{x^2+3x}{x^2-3x+2} \leq \dfrac{1}{x-2}$

Respuesta

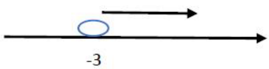
$S = \{x \in \mathbb{R} / x < 1; x > 2\}$



e) $(x-1)(x+1)-2(x-5) >- x(5-x)$

Respuesta

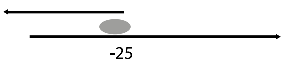
$S = \{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$



f) $-2(1{,}7x-1) \geq 3(1-x)$

Respuesta

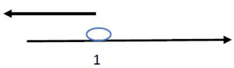
$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -25\}$



g) $4-6\left(3-\frac{5x}{3}\right) < 9\left(2x-\frac{2}{9}\right)$

Respuesta

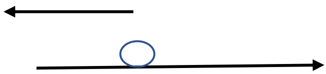
$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$



h) $\frac{x-(3-2x)}{-6} - 1 \leq -\frac{3x}{2}$

Respuesta

$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -\frac{1}{2}\}$



$-\frac{1}{2}$

j $\frac{x^2-7}{3} \leq 1 + x$

Respuesta

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2; x \leq 5\}$

$i)\ \frac{7x-1}{3x-1} \leq x + 3$

Respuesta

$S = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < \frac{1}{3}; x > \frac{2}{3}\right\}$

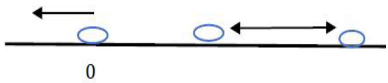
-1

k) $\frac{3}{x-3} \leq \frac{1}{x^2-3x}$

Respuesta

$S = \left\{x \in \mathbb{R} / 0 > x; \frac{1}{3} < x < 3\right\}$

L)



$$\frac{3x-27}{-7x} \geq 0$$

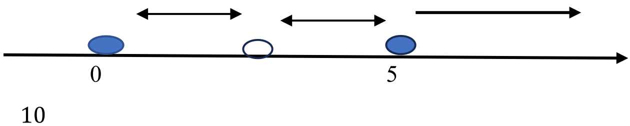
Respuesta

$$S = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R} \middle/ -\frac{3}{2} > \mathrm{x}\,,\, 0 < \mathrm{x} < 7, \mathrm{x} > 9 \right\}$$

m) $\dfrac{x^2(x-10)}{(x-5)(x-10)} \geq 0$

Respuesta

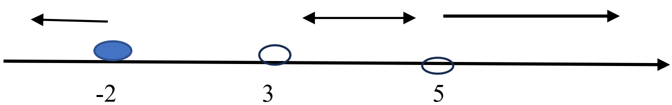
$$S = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}/0 \leq \mathrm{x} < 5, 5 < \mathrm{x} < 10, \mathrm{x} > 10\}$$



n) $\dfrac{x+2}{(x-5)^2(3-x)} \leq 0$

Respuesta

$$S = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}/ \quad \infty \leq \mathrm{x} < \quad 2, 3 < \mathrm{x} < 5, \mathrm{x} > 5\}$$



SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Capítulo 5

Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

Sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos variables.

Forma $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1. \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

Resolución:

Se resuelven transformándolos en una ecuación lineal con una variable, eliminando una de las variables y utilizando, por lo general el método de sustitución o el método de reducción.

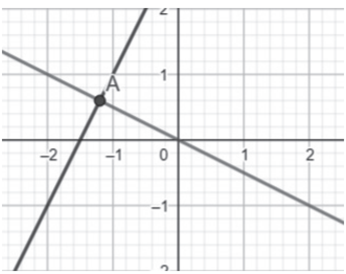
Significado geométrico:

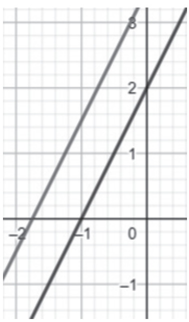
El significado geométrico de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales es el de buscar los puntos de intersección, si existen de las rectas representadas por sus ecuaciones:

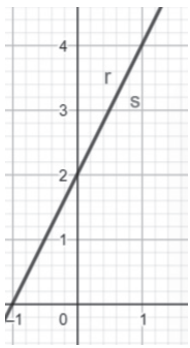
Tabla 4.

Relación entre los coeficientes de las ecuaciones del sistema y su solución:

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
El sistema tiene solución única	El sistema no tiene solución.	El sistema tiene infinitas soluciones.
Rectas que se cortan.	Rectas paralelas.	Rectas coincidentes.







Ejercicios 16. Sistemas de ecuaciones lineales

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x-y=1 \end{cases}$

Respuesta

Despejamos: x=y+1

Sustituimos x en la primera ecuación:

2(y+1)+ 3y=6

Simplificamos:

2y +2+ 3y=6

5y + 2=6

5y=4

$y = \frac{4}{5}$

Sustituimos y en x=y+1:

b) $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Respuesta

$x=\frac{18}{7}$ $\quad$ $y=\frac{15}{7}$

c) $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$

Respuesta

x = 7 y = 3

d) $\begin{cases} 4x-y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

Respuesta

$x = \frac{11}{7} \qquad y = -\frac{5}{7}$

e) $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

Respuesta

$x = \frac{18}{11} \qquad y = \frac{43}{11}$

f) $\begin{cases} \frac{x+3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$

Respuesta

x=4 7= 2

g) $\begin{cases} \frac{x+y}{4} = x - 2 \\ \frac{x-y}{6} = y + 3 \end{cases}$

Respuesta

x = 34.1

y= -2.3

Ejercicios 17. Problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales:

Resolver los siguientes problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales

a)Una empresa de la industria automotriz produce rodamientos y trasmisiones para autos, estos se procesan en dos plantas A y B. En la planta A se producen 14 rodamientos y 9 trasmisiones por hora, se desechan por falta de calidad dos rodamientos y dos trasmisiones (como promedio) en cada jornada de 8 horas. En la planta B, de más moderna tecnología, se producen 55 rodamientos y 55 trasmisiones por hora. ¿Cuántas jornadas de ocho horas debe trabajar cada planta para producir exactamente 1210 rodamientos y 1090 trasmisiones?

Para resolver el problema debemos plantear lo siguiente:
Jornadas de 8 horas de la Empresa A……. x
Jornadas de 8 horas de la empresa B……. y

Primeramente debemos calcular cuántas piezas produce cada Empresa en una jornada de 8 horas, obteniendo lo siguiente:

La Empresa A produce 110 rodamientos y 70 trasmisiones en una jornada de 8 horas, mientras que la empresa B produce 440 rodamientos y 440 trasmisiones en una jornada de 8 horas; por lo que podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

(1) $110x + 440y = 1210$
(2) $70x + 440y = 1090$; y al multiplicar por (-1) esta ecuación obtenemos:
$110x + 440y = 1210$
$70x - 440y = -1090$

$40x = 120$
$x = 3$ y al sustituir este valor en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene que
$y = 2$

Respuesta: La Empresa A debe trabajar 3 jornadas de 8 horas y la Empresa B 2 jornadas de 8 horas.

b)Una empresa agrícola debe utilizar simultáneamente dos tipos de fertilizantes M y N en una plantación de manzanas. En la composición de cada saco intervienen fosforo (P) y potasio (k), además de otros componentes. En la siguiente tabla aparecen las cantidades de kilogramos de fosforo y potasio que hay en cada saco. Utilizando los dos tipos de fertilizantes M y N, ¿cuántos sacos de cada uno debe usar la empresa para emplear exactamente 360 Kg de fosforo y 300 Kg de potasio que son los que necesita la plantación de manzanas?

Tabla 5.

Composición de fertilizantes M y N

	Fosforo (P)	Potasio (K)
Fertilizante tipo A	4 kg	2 kg
Fertilizante tipo B	3 kg	3 kg

Respuesta:
Sacos de fertilizantes del tipo A….. x
Sacos de fertilizantes del tipo B….. y
Kg de Fosforo………….. 360
Kg de Potacio…… 300

De acuerdo a los elementos del problema se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

(I)$4x + 3y = 360$
(II)$2x + 3y = 300$ multiplicando esta ecuación por (- 1)
$4x + 3y = 360$
$2x – 3y = - 300$ sumando ambos miebros se obtiene:
$2x = 60$, de donde $x = 30$, sustituyendo este valor en (I)
$4.30 + 3y = 360$; $3y = 360 – 120$; $3y = 240$; de donde se obtiene $y = 80$.

Respuesta: se deben emplear 30 sacos del tipo A y 80 sacos del tipo B.

c)Entre dos centros de estudios A y B de Bachillerato General Unificado había a principios de curso 62 alumnos de duodécimo grado que manifestaron interés por estudiar carreras pedagógicas. A mediados de curso, el número de interesados en el centro A se incrementó en un 20%, y en el centro B, en un 25%, de modo que entre ambos centros hay ahora 76 alumnos que desean estudiar una carrera pedagógica. ¿Cuántos alumnos al finalizar el bachillerato unificado aspiran en estos momentos a una carrera pedagógica en cada centro?

Para resolver el problema se pueden utilizar dos vías, en la primera de ellas, emplearemos un sistema de ecuaciones:

Tabla 6.

Organización de información para sistema de ecuaciones.

Centros	Cantidad de estudiantes que aspiran a estudiar una carrera pedagógica al inicio	Cantidad de estudiantes que aspiran al final
A	x	
B	y	

Planteamiento del sistema:
(1) x + y = 62

(2) $\frac{6}{5}x + \frac{5}{4}y = 76$ Multiplicando por 20 la ecuación (2), obtenemos:
$24x + 25y = 1520$, resolviendo el sistema siguiente multiplicando la ecuación

Por (-24)
24 x - 24 y = -1488
24 x + 25 y = 1520
y = 32; Al sustituir este valor en (1) se obtiene x = 30

$$\frac{6}{5}x = \frac{6}{5} \cdot 30 = 36 \frac{5}{4}y = \frac{5}{4} \cdot 32 = 40$$

Respuesta:

En estos momentos aspiran estudiar carreras pedagógicas, 36 estudiantes del centro A y 40 estudiantes del centro B.

d) En el pasado campeonato nacional de futbol en una universidad, después que cada equipo había celebrado la misma cantidad de juegos, los jugadores A y B habían anotado la mayor cantidad de goles, en ese orden. El triplo de los goles anotados por B era superior en 16 al duplo de los anotados por A. Si el cuadrado de los goles anotados por B lo dividimos por los anotados por A, el cociente es 20 y el resto es 16. ¿Cuántos anotó cada jugador?

Respuesta:
Re Para resolver el problema representemos con variables lo siguiente:

- Cantidad de goles anotados por el jugador A …… a

Cantidad de goles anotados por el jugador B……. b De acuerdo al texto del problema es posible plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$3b = 2a + 16; \text{de donde}(3)a = \dfrac{3b-16}{2}$

$\dfrac{b^2}{a} = 20 + \dfrac{16}{a}$, de esta última ecuación se obtiene que $b^2 = 20a + 16$. Sustituyendo.

$$b^2 = 10(3b-16)+16$$

$b^2 - 30b + 144 = 0$; $(b - 24)(b - 6) = 0$; obteniéndose b1 = 24 ó b2 = 6, sustituyendo estos valores a1 = 28 ó a2 = 1; pero como el jugador A anotó más goles que B, entonces:

Respuesta: El jugador A anoto 28 goles y el jugador B 24 goles.

Funciones de una Variable Real.

Las funciones permiten describir cómo una cantidad varía en relación con otra. Esto es esencial en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería, donde se necesita comprender cómo cambian las variables de un sistema.

Las funciones son herramientas cruciales para modelar fenómenos del mundo real. Desde el crecimiento poblacional hasta el comportamiento de los mercados financieros, las funciones ayudan a representar y analizar datos y predicciones. Las funciones y sus propiedades permiten resolver una amplia gama de problemas matemáticos. El conocimiento de funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas, y trigonométricas, entre otras, es esencial para abordar problemas tanto teóricos como prácticos.

Algunas definiciones útiles:

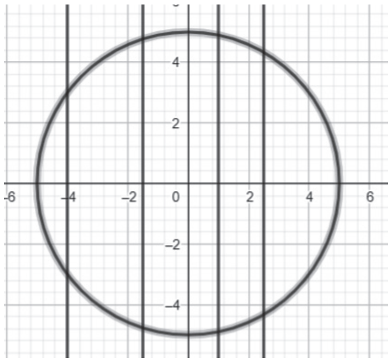
Función

Una función real de una variable real f, es una correspondencia que a cada elemento de un conjunto $A \subseteq R$, le hace corresponder exactamente un elemento de un conjunto $B \subseteq R$. En símbolos y = f(x).

Geométricamente esto significa en un sistema cartesiano de coordenadas “XY”, que no se repita la abscisa (x), en ningún par ordenado que pertenece a la función. También, si hay rectas de ecuación $X = X_0 \text{con} X_0 \in \mathbb{R}$ (paralelas al eje y) que cortan al gráfico en al menos dos puntos, no es función. Observar como a la circunferencia las respectivas rectas cortan a la circunferencia en dos puntos distintos.

Figura 15.

Gráfica de la circunferencia.



Función Inyectiva

La función real de variable real f es inyectiva en un $A \subset Dom\ f$, si cualesquiera dos preimágenes diferentes de A, tienen imágenes diferentes, o utilizando el contra recíproco si de $f(x_1) = f(x_2)$ se deduce que $x_1 = x_2$

Esta definición de inyectividad, garantiza las condiciones para que la relación que se plantee sea función, como se observa si dos imágenes son exactamente iguales, lo que si tiene que suceder es que las preimágenes sean distintas.

Geométricamente si toda recta de ecuación $y = y_0$ (paralela al eje x) corta al gráfico en a lo sumo un sólo punto, cosa que ya se ha comentado anteriormente.

Dominio

Valores admisibles, valores para los cuales está definida la función, valores para los cuales la función existe o tiene sentido, etc, y se denota Dom f.

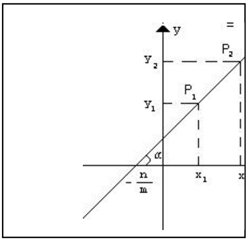
Geométricamente el dominio coincide con la proyección del gráfico sobre el eje "X"

Imagen

El elemento de B que corresponde a un elemento x del Dominio de f se llama imagen de x; el conjunto de todas las imágenes es la imagen de la función, y se denota Im f.

Tabla 7.

Función Lineal.

<table>
<tr><td>Figura 16. Gráfico de la recta</td><td>Ecuación</td><td colspan="2">Propiedades</td></tr>
<tr><td>Recta</td><td>y = m x + n ; m ¹ 0</td><td colspan="2">Dominio: x Î R</td></tr>
<tr><td rowspan="7">
</td><td rowspan="7">Si $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ son dos puntos en la recta, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</td><td colspan="2">Imagen: y Î R</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pendiente: m = tg α</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cero: $x = -\frac{n}{m}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intercepto en el eje y: y = n</td></tr>
<tr><td colspan="2">Monotonía</td></tr>
<tr><td>m > 0</td><td>m < 0</td></tr>
<tr><td>Creciente</td><td>Decreciente</td></tr>
</table>

Ejercicios 18. Ejercicios de funciones

1) Dada la función lineal y =3x−7:

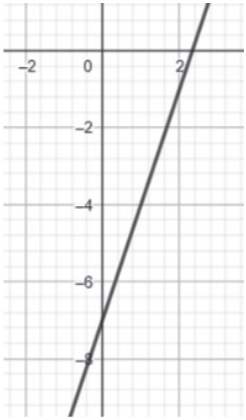
a) Determina la pendiente de la recta.

b) Encuentra el intercepto en el eje y.

Respuesta

a) m=3

b) y= 3(0) -7; y = -7, coordenadas del intercepto (0 , -7)

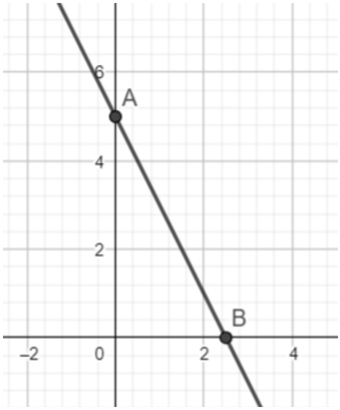


2) Dibuja la gráfica de la función lineal g(x)=−2x+5. Asegúrate de marcar claramente el intercepto en el eje (y) y el punto donde la recta cruza el eje x.

Respuesta

Para poder representar la recta en un plano de coordenadas se necesitan dos puntos distintos (Los Elementos, escrito por Euclides hacia el año 300 a. C.)

Determinamos los dos puntos $A(0,-5)\mathrm{y}B(\frac{5}{2},0)$, nótese que en este caso se le dan valores a x cómodos $0\mathrm{y}\frac{5}{2}$ y para poder tener las coordenadas de los interceptos con los ejes coordenados, pero se le puede sustituir a la variable independiente x por cualquier valor real para poder disponer de otro par de coordenadas cualquiera.



3) Para la función lineal h(x)=4x+3:
a) Encuentra el valor de x cuando h(x)=15.
b) Encuentra el valor de x cuando h(x)=−5

Respuesta:
a) 15 =4 x+3 ; 15-3 = 4x ;   12 = 4x   ; x = 3
b) 5 - =4 x+3 ; -5-3 = 4x ;   -8 = 4x   ; x = -2

4) Un negocio de limonada tiene un ingreso diario que puede modelarse mediante la función I(x)=2.5x+10, donde x es el número de vasos vendidos.

a)¿Qué representa la pendiente en este contexto?
b)¿Qué representa el intercepto en este contexto?
c)¿Cuántos vasos de limonada deben venderse para que los ingresos diarios sean de $50?

Respuesta:
a)La pendiente representa:

Positiva: Si la pendiente es positiva, la recta sube hacia la derecha. Esto significa que, a medida que el valor de x aumenta, el valor de y también aumenta.
Negativa: Si la pendiente es negativa, la recta baja hacia la derecha. Esto indica que, a medida que el valor de x aumenta, el valor de y disminuye.

Además, expresa como cambia el valor de la variable dependiente al variar la variable independiente.

b) Los interceptos con el eje de las ordenadas y el de las abscisas, representan respectivamente el ingreso que se tiene cuando no se ha vendido ningún vaso y cuando el ingreso es 0.

c) 50 =2.5 x + 10; 50-10 = 2.5 x; 40= 2.5 x; x = 16 vasos

5) Dadas las funciones lineales f(x)=3x+4 y g(x)=−x+6:

a)Encuentra los puntos de intersección de las dos rectas.

b)Determina cuál de las dos funciones tiene una pendiente mayor.

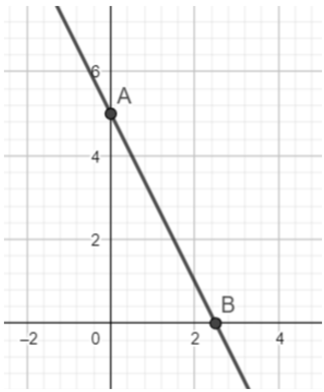
c)Describe qué ocurre con las dos rectas a medida que x aumenta su valor.

$$\text{a)}\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right) \right\}$$

Respuesta:

Considerando f(x) y g(x) igual a y



3) Para la función lineal h(x)=4x+3:

a) Encuentra el valor de x cuando h(x)=15.

b) Encuentra el valor de x cuando h(x)=−5

Respuesta:

a)15 =4 x+3 ; 15-3 = 4x ; 12 = 4x ; x = 3

b)5 - =4 x+3 ; -5-3 = 4x ; -8 = 4x ; x = -2

4) Un negocio de limonada tiene un ingreso diario que puede modelarse mediante la función I(x)=2.5x+10, donde x es el número de vasos vendidos.

a) ¿Qué representa la pendiente en este contexto?
b) ¿Qué representa el intercepto en este contexto?
c) ¿Cuántos vasos de limonada deben venderse para que los ingresos diarios sean de $50?

Respuesta:

a) La pendiente representa:

Positiva: Si la pendiente es positiva, la recta sube hacia la derecha. Esto significa que, a medida que el valor de x aumenta, el valor de y también aumenta.

Negativa: Si la pendiente es negativa, la recta baja hacia la derecha. Esto indica que, a medida que el valor de x aumenta, el valor de y disminuye.

Además, expresa como cambia el valor de la variable dependiente al variar la variable independiente.

b) Los interceptos con el eje de las ordenadas y el de las abscisas, representan respectivamente el ingreso que se tiene cuando no se ha vendido ningún vaso y cuando el ingreso es 0.

c) 50 =2.5 x + 10; 50-10 = 2.5 x; 40= 2.5 x; x = 16 vasos

5) Dadas las funciones lineales f(x)=3x+4 y g(x)=−x+6:

a) Encuentra los puntos de intersección de las dos rectas.

b) Determina cuál de las dos funciones tiene una pendiente mayor.

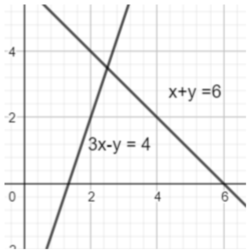
c) Describe qué ocurre con las dos rectas a medida que x aumenta su valor.

Respuesta:

Considerando f(x) y g(x) igual a y

$$\text{a)}\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

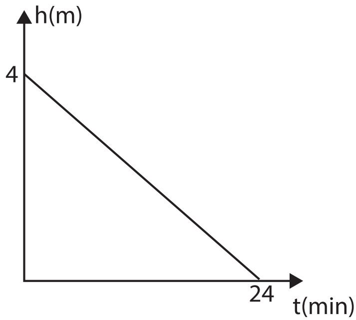
$$S = \left\{ \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right) \right\}$$



b) La pendiente mayor la tiene la recta 3x -y = 4.

c) La recta 3x -y = 4 la variable y aumenta infinitamente y la recta x + y = 6, y disminuye infinitamente.

6) Un tanque de forma cilíndrica se encuentra lleno de agua. Como parte de una campaña antivectorial, se decidió vaciar el contenido para realizar una limpieza del mismo. Para esto se abrió una llave de desagüe por la que el agua comienza a salir y la altura de esta dentro del depósito varía en función del tiempo como muestra el gráfico.



Escribe la ecuación que describe la variación de la altura (metros) en función del tiempo (minutos).

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo la altura del agua dentro del tanque es de 3,5 m?

c) Si el volumen del líquido era de 50240 l, ¿determina el diámetro de dicho depósito?

d) Si la velocidad de salida de un líquido depende de la altura de este en el recipiente y se calcula mediante la ecuación: $\sqrt{2gh}$,, determina a qué velocidad saldrá el líquido a los 15 minutos de abrir la llave.

Respuesta:

a)De la recta representada conocemos dos puntos, uno al t =0 min. (0 , 4) y el otro a los 24 min donde queda el tanque totalmente vacío (24 , 0), esto nos posibilita tener la ecuación buscada.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{24-0} = \frac{-4}{24} = -\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{h} = -\tfrac{1}{6}t + n; \textit{tomando el punto } (0\,,4), \textit{sustituimos en la ecuación}$$

$$\textit{para obtener } n, \;\; 4 = -\tfrac{1}{6}(0) + n \Rightarrow n = 4$$

$$\therefore \; \mathrm{h} = -\frac{1}{6}t + 4$$

b) $\mathrm{h} = -\frac{1}{6}(3.5) + 4$, *la altura sera aproximadamente* $3.42\ m$.

c) Para calcular el diámetro se procede transformando de litros a metros cúbicos 50 240 l. es equivalente a 50.24 m3

$$r = \sqrt{\frac{50.24}{3.14 \cdot 4}} \approx 4m \Rightarrow d = 8m.$$

7) El coeficiente de solubilidad de una sustancia representa los gramos (g) de soluto que saturan 100g de agua a una temperatura dada. Las siguientes ecuaciones representan el coeficiente de dos sustancias en función de la temperatura(t): Cs(t)= 5t + 120 $AgNO_3$ Nitrato de plata Cs(t)= t + 128 KI Yoduro de potasio.

a) ¿A qué temperatura el AgNO3 es capaz de disolver 320 g de esa sustancia en 100g de agua?

b) ¿Cuál es el coeficiente de solubilidad de KI a 80 o C de temperatura? c) ¿A qué temperatura ambas sustancias tienen igual coeficiente de solubilidad?

Respuesta

a) 320 = 5t + 120; 5t = 220 -120; 5t = 100 t = 20 °C

b) Cs(t)= 80 + 128 = 208

$$\begin{cases} Cs(t) - 5t = 120 \\ Cs(t) - t = 128 \text{ multiplicamos por -5 toda la ecuación} \\ Cs(t) - 5t = 120 \\ -5Cs(t) + 5t = -640 \end{cases}$$

-4Cs(t) + 0 = -520

Cs(t) = 130

130 - 5t = 120

-5t = 120-130

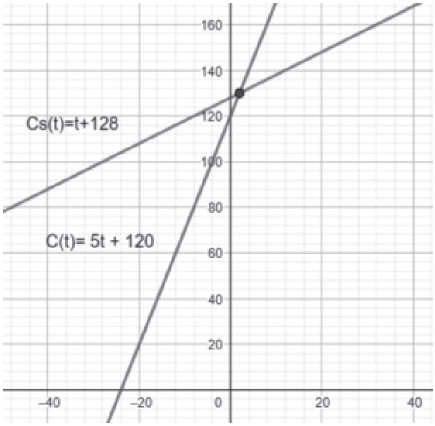
-5t = -10

t = 2 °C por tanto a los dos grados centígrados se garantizará la igualdad.

Otra vía podía ser, igualando los miembros derechos de las dos ecuaciones

5t + 120 = t + 128 y resolviendo la ecuación lineal se obtiene que la igualdad de los coeficientes de solubilidad será los 2 oC.

A continuación, ver representación gráfica del literal b)



8) El comportamiento de la concentración ($molL^{-1}$) de una sustancia en función del tiempo (segundos), en el transcurso de una reacción se comporta según la ecuación: $C_t = vt + 25$ Se ha determinado que la concentración de una sustancia 3 segundos después de iniciada la reacción es de 22,6 $molL^{-1}$.

a) ¿Se puede afirmar que a medida que aumenta el tiempo, la concentración aumenta? Fundamenta.

b) Determina el valor de la constante de reacción (v).

c) ¿Al cabo de cuánto tiempo la concentración será de 4,2 $molL^{-1}$?

Respuesta

a) Si v es una constante entonces estamos en presencia de una ecuación lineal donde v será la pendiente de dicha ecuación, aceptando que es una ecuación lineal que solo depende de una variable t, basta dos puntos distintos para obtener la pendiente de dicha ecuación, si hacemos t = 0, obtenemos el punto (0, 25) y por datos el segundo punto seria (3, 22.6), por tanto, la pendiente seria:

$$m = \frac{\Delta C_t}{\Delta t} = \frac{22.6 - 25}{3 - 0} = -0.8; \qquad \therefore v = -0.8$$

$$4.2 = -0.8t + 25 \qquad -0.8t = 4.2 - 25; \qquad -0.8\,t = -20.8;$$

$$t = 26 \text{ mol}L^{-1}$$

La estatura de un niño dada en cm se puede determinar por la ecuación:

E = (2.5e + 30)donde “e” representa la edad del niño en años.

a) ¿Qué estatura debe tener un niño que tiene 4 años de edad?

b) ¿A qué edad debe tener un niño una estatura de 120,65 cm?

c) Un niño tiene 9 años de edad y una estatura de 1,25 m, ¿tiene un tamaño adecuado para su edad? Justifica.

Respuesta

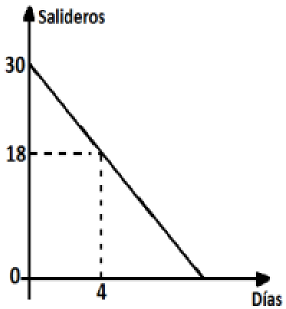
a) E = (2.5(4) + 30)101.6 cm.

b) $120{,}65 = (2.5e + 30)\cdot 2.54; \quad (2.5e + 30) = \frac{120{,}65}{2{,}54} = 47{,}5$

(2.5e + 30) = 47.5; 2.5e = 47,5-30 2.5e = 17,5 e = 7 años

E = (2.5(9) + 30)= 98,7cm. Como podéis ver a esa edad de 9 años este niño está 26,5 cm. sobre la estatura que se calcula usando la fórmula.

10. Como parte del programa de ahorro de agua de la localidad se dieron a la tarea de eliminar los salideros existentes. El siguiente gráfico muestra la disminución de estos en el transcurso del tiempo.



¿Cuántos salideros existían inicialmente?

b) Escribe la ecuación que describe la disminución de salideros.

c) ¿A los cuántos días de iniciar la tarea el número de salideros había disminuido en un 80%?

d) ¿Qué tiempo demoró la eliminación total de los salideros?

Respuesta:

a) Existían inicialmente 30 salideros.

b) Considerando dos puntos distintos según lo graficado tenemos;

(0, 30) y (4, 8) la recta debe tener una ecuación de tipo lineal

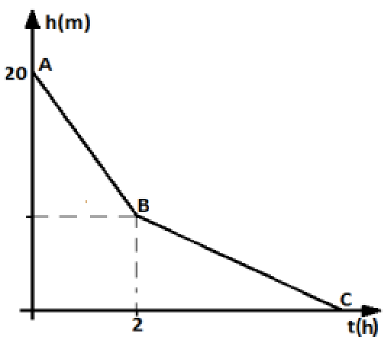
y = mx + n;

y = -5.5x + 30, el valor de n se percibe en el gráfico de la recta.

El 80% de 30 salideros es 24 salideros.

c)24 = -5.5 x + 30, -5.5 x = 24 – 30, -5.5x = -10, x ≈ 1.8 dias

11) Una piscina en forma de prisma cuya área de la base es de 150 m2, se encuentra llena hasta las partes de su capacidad. A las 8:30 am se abre una llave de desagüe y comienza a vaciarse. Dos horas después se abre una segunda llave y se cierra la primera. El siguiente gráfico muestra todo el proceso. La ecuación que describe la salida del agua por la segunda llave es: $h(t) = -\frac{5}{2}t + 15$ donde ¨h¨ es la altura del agua y ¨t¨ el tiempo



a) ¿Cuántos L de agua contenía la piscina antes de comenzar en vaciado?

b) ¿Hasta qué altura descendió el agua utilizando la primera llave?

c) Escribe la ecuación que representa la salida del agua en el tramo AB.

d) ¿Cuánto tiempo estuvo funcionando la segunda llave hasta vaciar la piscina?

Respuesta

a) V = AB. h = 150 m2. 20 m = 3000 m3 = 3 000 000 L

b) Calculemos las coordenadas del punto B, evaluando pata t = 2 h.
$h(2) = -\frac{5}{2}(2) + 15, h(2) = 10m$ las coordenadas del punto B de la gráfica es (2, 10). El agua descendió a 10 m

c) Con este punto B podemos también calcular la ecuación que describe el proceso al abrir la primera llave: A (0, 20) y B (2 , 10).

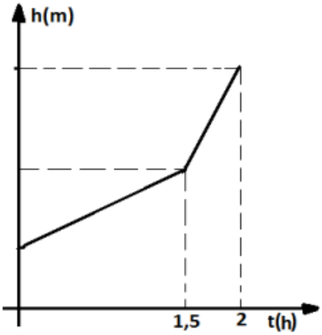
$$m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{10-20}{2-0} = \frac{-10}{2} = -5$$

$h(t) = -5t + n;$ $\quad$ $evidentemente\ n = 20 \therefore\ h(t) = -5t + 20$

d) $0 = -\frac{5}{2}t + 15$

$-15 = -\frac{5}{2}t;$ $\quad$ $\therefore estuvo\ funcionando\ 2\ h$

12) Una cisterna en forma de prisma de base un cuadrado de área 25m2 se comienza a llenar por una primera llave, la ecuación que describe este proceso es: h(t) = 2t + 3 donde ¨h¨ es la altura del agua dentro de la cisterna y ¨t¨ es el tiempo. Pasado un tiempo se abre una segunda llave y la cisterna se llena completamente a las dos horas de comenzar a llenarse. Este proceso se representa en el siguiente gráfico.



a) Si la capacidad máxima de la cisterna es de 225 000L, determina la ecuación que representa el aumento de la altura del agua cuando están abiertas las dos llaves.

b) ¿Cuántos litros de agua se vertieron en total entre ambas llaves?

c) ¿Cuánto tiempo tardará una llave de desagüe con un gasto de 0,25m3 / min en vaciar la cisterna hasta la mitad una vez que se encuentre llena?

d) ¿Cuál fue el volumen de agua aportado por la segunda llave mientras estuvo abierta?

Respuesta

a) Para la ecuación de la primera y segunda llave tenemos los puntos necesarios para poder determinarlas, primero se debe calcular la altura para el volumen máximo 225 000L = 225 m3

$V = A_B . h$

$225m = 25m^2 . h$

$h = \frac{225m^3}{25m^2} = 9\ m$

Entonces tenemos el punto (2, 9); según la ecuación que describe el primer proceso de llenado h(t) = 2t + 3 tendremos (0, 3) y el tercero lo obtenemos h(1,5) = 2(1,5) + 3 = 6;   (1.5 , 6).

Determinemos la ecuación del segundo segmento con los puntos:

(1.5, 6) y (2, 9).

$$m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{9-6}{2-1.5} = \frac{3}{0{,}5} = 4$$

Por tanto, la ecuación para el segundo periodo de llenado es

h(t) = 4t + n, para calcular n procedemos a trabajar con el punto:

(2, 9); 9 = 4(4) + n; 9 = 14 +n; n = -5 por tanto la ecuación es

h(t) = 4t – 5 cuando están abiertas las dos llaves.

b) Se vertieron por llaves, la primera V_p = 25m^2 . 6m = 150 m^3

La segunda V_t = 25m^2 . 9m = 225 m^3 -V_p = 225-150= 75 m^3

c) Demoraría 15 h

d)La segunda V_t = 25m2 . 9m = 225 m^3 -V_p = 225-150= 75 m^3

Funciones Cuadráticas

Ecuación

$$y = ax^2 + bx + c; a \neq 0; (a > 0) y = (x-d)^2 + e$$

Soluciones

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Propiedades

Dominio: x Î **R** Imagen: y Î **R**: y ³ e

Propiedades

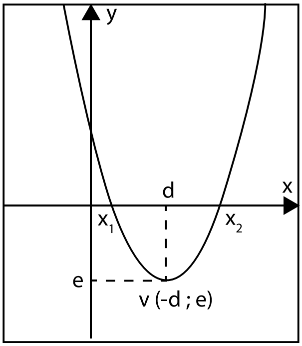
x > d: Creciente x < d: Decreciente

Coordenadas del vértice

$$\boldsymbol{d = -\frac{b}{2a}} \ \ \textbf{y} \ \ \boldsymbol{e = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

Figura 17.

Gráfico de la función cuadrática.



Ejercicios 19. Funciones Cuadráticas

1. Dada la función cuadrática $f(x)=2x^2-4x+1$

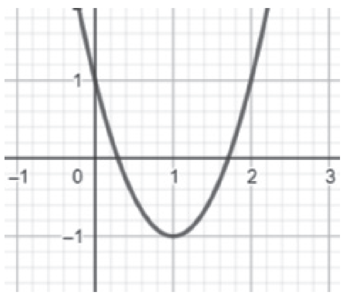
a) Encuentra el vértice de la parábola.

c) Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

Respuesta

a) El vértice es (1, -1)

b) Abre hacia arriba pues a >o



Para la función cuadrática $g(x)=x^2-6x+8$:

a) Encuentra los puntos de intersección de la parábola con el eje x.

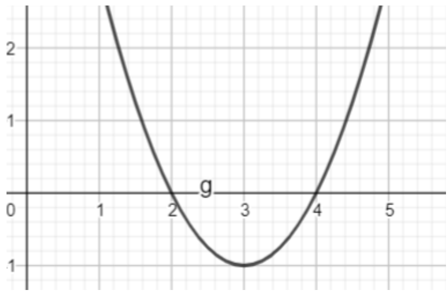
b) Calcula el valor del vértice.

Respuesta

a) Los ceros son $x^2-6x+8 = 0$ $x2-6x+8 = (x-4)(x-2)=0$

Para x = 4 y x= 2

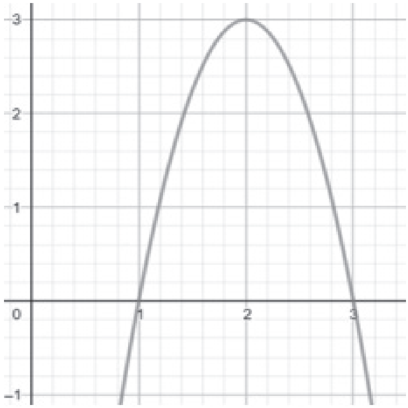
b) (3, -1)



Dibuja la gráfica de la función cuadrática $h(x)=-3x^2+12x-9$

Asegúrate de marcar claramente los vértices, los puntos de intersección con los ejes y la dirección en la que abre la parábola.

Respuesta



Dada la función cuadrática $j(x)=x^2+4x+5$:

a)Convierte la función a su forma de vértice $f(x)=a(x-d)^2+e$.

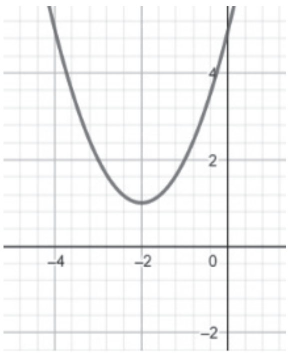
b)Encuentra el vértice de la parábola y describe cómo se transforma desde la forma estándar a la forma de vértice.

Respuesta

a)Se aplica un completamiento cuadrático

$(x2+4x+4) +5 -4= (x+2)^2 + 1$

$y = (x+2)^2 + 1$ el vértice es (-2, 1)



5. Una pelota es lanzada al aire y su altura en metros, h, en función del tiempo en segundos, t, está dada por la función $h(t)=-4.9t^2+9.8t+1.5$

a)Determina el tiempo en el que la pelota alcanza su altura máxima.

b)Calcula la altura máxima que alcanza la pelota.

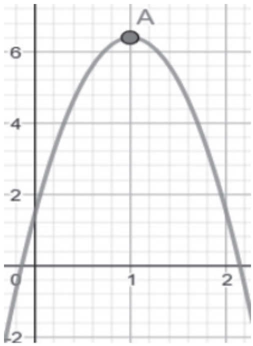
c)Encuentra el tiempo en el que la pelota toca el suelo de nuevo.

Respuesta

a)Alcanza su altura máxima a los 2 segundos

b)La altura máxima es de 6.4 m.

c)$-4.9\,t^2+9.8\,t+1.5 = 0$; $t = -0.14$ no se acepta desde el punto de vista físico y $t = 2.14$ segundos, que es al tiempo cuando la pelota toca el suelo.



6. Un cañón dispara un proyectil el cual se mueve respondiendo a la ecuación $y = 12t - t^2$, donde: “y” es la altura (m) y “t” el tiempo (s).

a) Determina el tiempo que tardó el proyectil en impactar contra el suelo.

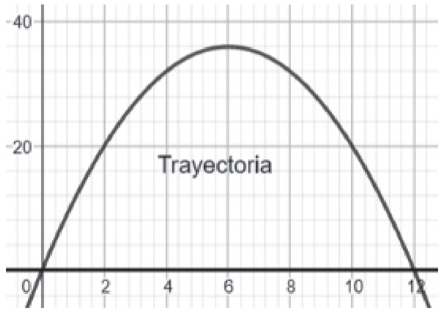
b) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada por el proyectil?

c) Si en la dirección horizontal el proyectil se mueve con velocidad constante y su velocidad inicial era de 200m/s determina el alcance máximo.

Respuesta

a)Tardó 12 segundos

b)Su altura máxima la alcanzó a los seis segundos.



c) S = t . V ; S = 12s . 200m/s= 2 400m. alcance máximo.

7) Una función f definida en $\mathbb{R}$ por la ecuación $f(x) = a(x-d)^2+e$, tiene como valor mínimo y=-2 y su eje de simetría es la recta x=2. Uno de sus ceros es x=1.

a) Determina la ecuación de f.

b) Escribe un intervalo donde f sea creciente y negativa.

c) Para qué valores del intervalo de $x \in [-1; 4]$ la función es positiva.

d) Halla los puntos de intersección con la recta y=6.

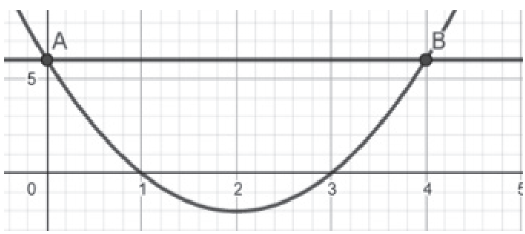
Respuesta

a) La ecuación es $f(x) = 2(x-2)^2-2$

b) [2, 3)

c) Es positiva en [-1, 1) U (3, 4].

d) $6 = 2(x-2)^2-2$, $2x^2 - 8x$; x =0 y x=4 ver representación gráfica a continuación.



Un cohete se lanza desde una plataforma y su altura h (en metros) en función del tiempo t (en segundos) está dada por la función cuadrática:

$h(t)=-5t^2+50t+10$

a) ¿Cuánto tiempo tarda el cohete en alcanzar su altura máxima?

b) ¿Cuál es la altura máxima del cohete?

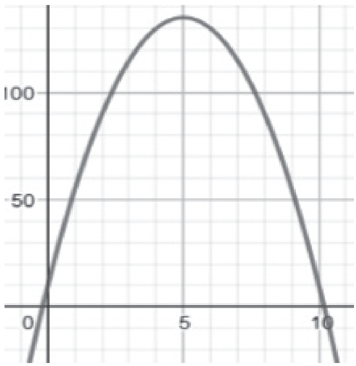
c) ¿A qué tiempo el cohete regresa al suelo?

Respuesta

a) Alcanzará su altura máxima a los 5 s

b) Su altura máxima alcanzada 135 m.

c) $-5t^2+50t+100=0$; $x = -0,2$ y $x = 10.2$.



Un granjero quiere cercar un área rectangular que está pegada a un río. Si tiene 200 metros de cercado y no necesita cercar el lado que da al río, la función que modela el área A (en metros cuadrados) en función del ancho x (en metros) es:

$A(x)=x(200-2x)$

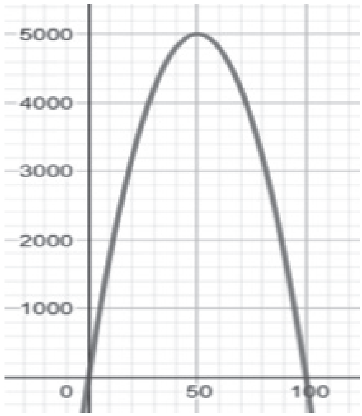
a) Encuentra el valor de x que maximiza el área.

b) ¿Cuál es el área máxima que puede cercar el granjero?

Respuesta

a) El área es máxima para x = 50 m

b) El granjero puede cercar como máximo 5000 m^2



Una empresa manufacturera calcula su beneficio B (en miles de dólares) en función de la cantidad de productos fabricados q (en miles) mediante la siguiente función:

$B(q)=-3q^2+24q-36$

a) ¿Cuál es la cantidad de productos que maximiza el beneficio?

b) ¿Cuál es el beneficio máximo que puede alcanzar la empresa?

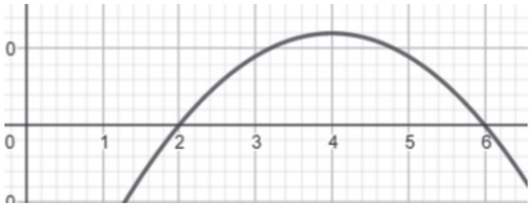
c) Determina los valores de q en los que el beneficio es cero.

Respuesta

a)Maximiza el benefició 4 productos

b)El beneficio máximo que puede alcanzar es de 12 000 U.S.D.

c)El beneficio es cero cuando q = 2 o q =6.



11) La población de una ciudad P (en miles) en función del tiempo t (en años) está dada por:

$P(t)=-2t^2+12t+50$

a) ¿Cuál será la población máxima de la ciudad?

b) ¿En qué año alcanzará la población su máximo?

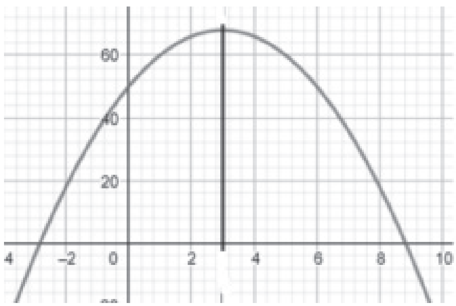
c) Encuentra los años en los que la población será exactamente 70 mil.

Respuesta

a) La población máxima de la ciudad es de 68 000 personas.

b) La alcanzará en 3 años.

c) $70 = -2t^2+12t+50$, será igual a 70 mil a los 2 y 10 años.



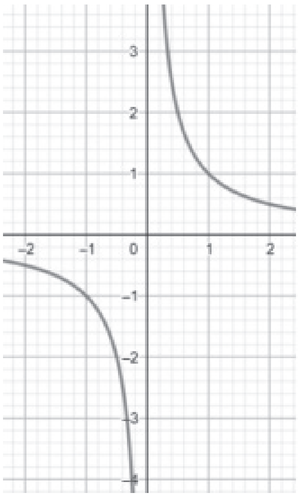
Funciones Potenciales

Función de proporcionalidad inversa

Ecuación $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$
Propiedades
Dominio: $x \in \mathbb{R}^*$
Imagen: $y \in \mathbb{R}^*$
Paridad: Impar
Monotonía: Creciente en todo su dominio

Figura 18.

Gráfica de la Función de proporcionalidad inversa.

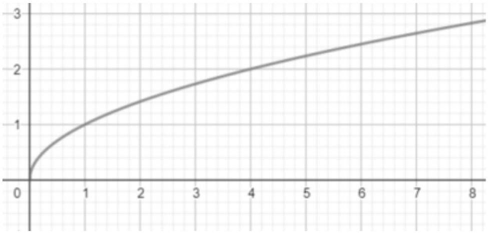


Función Radical

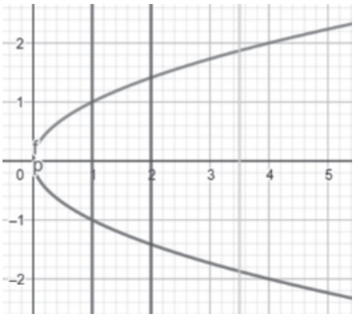
Ecuación: $y = \sqrt{x}$
Propiedades
Dominio: $x \in \mathbb{R}^+ (x \geq 0)$
Imagen: $y \in \mathbb{R}^+ (y \geq 0)$
Paridad: Ni par ni impar
Monotonía: Creciente en todo su dominio

Figura 19.

Gráfica de la función radical. Ecuación $y = \sqrt{x}$



Nota: Es sabido que esta función puede generar una rama negativa, pero se considera la rama positiva o la negativa porque ambas romperían con la definición de función de una variable real.



Ecuación: $y = x^3$

Propiedades

Dominio: $x \in \mathbb{R}$

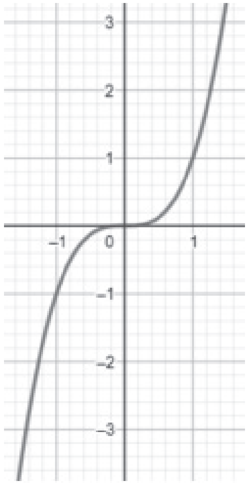
Imagen: $y \in \mathbb{R}$

Paridad: Impar

Monotonía: Creciente

Figura 20.

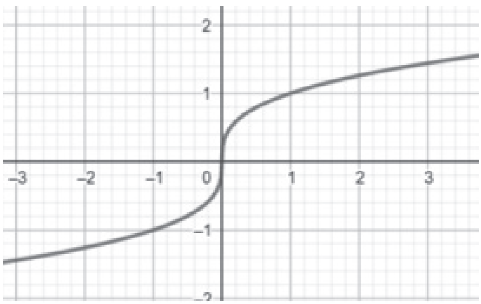
Gráfico de la Ecuación: $y = x^3$



Ecuación: $y = \sqrt[3]{x}$
Propiedades
Dominio: $x \in \mathbb{R}$
Imagen: $y \in \mathbb{R}$
Paridad: Impar
Monotonía: Creciente

Figura 21.

Gráfica de la Ecuación $y = \sqrt[3]{x}$



Ejercicios 20. Funciones Potenciales

1) Dada la función potencial f(x)=3x⁴:

a) Calcula f(2) .

b) Calcula f(−1).

Respuesta

a) 48

b) 3

2) Para la función $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

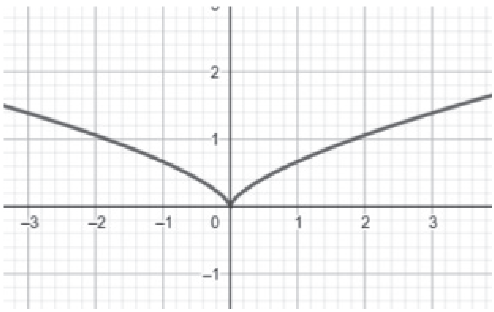
a) Evalúa la función en x=1, x=4 y x=9

b) Describe cómo cambia el valor de la función conforme x aumenta.

Respuesta

a) $f(1) = \frac{2}{3}; f(4) = 1.68; f(9) = 2.88$

b) $(-\infty, 0] f(x)\text{decrece; de}(0, \infty) f(x)\text{crece}$



3) La intensidad de la luz I a una distancia d de una fuente puntual sigue el modelo $I = \frac{K}{d^2}$ donde k es una constante.

a) Si k=100, encuentra la intensidad de la luz a una distancia de 2 metros.

b) Calcula la intensidad de la luz a una distancia de 5 metros.

c) Describe cómo cambia la intensidad de la luz a medida que aumenta la distancia.

Referencias bibliográficas

Camara Nacional de Acuicultura. (2022). Ecuador breaks shrimp export record. Seafood Media Group Ltd. https://seafood.media/fis/worldnEws/worldnews.asp?monthyear=7-2022&day=8&id=118798&l=e&country=&special=&ndb=1&df=1

Conseio Nacional para la igualdad de Género. (2021). Analfabetismo por sexo. https://www.igualdadgenero.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2023/01/ANALFABETISMO-POR-SEXO.pdf

EcuRed. (s/f). Variable estadística. Recuperado el 13 de julio de 2025, de https://www.ecured.cu/Variable_estadística

Huertas Sánchez, M. A. (s/f). Teoría de conjuntos básica. Universitat Oberta de Catalunya. https://dn790003.ca.archive.org/0/items/TeoriaDeConjuntosBasicaHuertas/Teoria de Conjuntos Basica - Huertas.pdf

Instituto Nacional De Estadîstica y Censos (INEC), & (SENPLADES), S. N. de P. y D. (2014). Encuesta de Condiciones De Vida 2005-2006 v.1.4. https://anda.inec.gob.ec/anda/index.php/catalog/358

Salazar, C., & Del Castillo, S. (2018). FUNDAMENTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA (R. S. Del Castillo Galarza (ed.)). ps://gc.scala

Bibliografía de Referencia

Aliaga, S. G. (2015). Procedimiento didáctico-matemático para el ingreso a la universidad.

Angel, R., Allen. Álgebra Elemental. Sexta edición PEARSON EDUCACIÓN. México, 2007.

Blitzer, R. (2015). Precalculus: A Concise Course. McGraw-Hill Education.

Baldor, A. (2008). Álgebra de Baldor (2 ed.). México: Patría.

Giancarlo, L. (2019). Precalculus: A Graphing Approach (6th ed.). Pearson Education

M.O. González. Algebra Elemental Moderna. Editorial Ecuador F.B.T. Cia. Lida. 2007.

Mercado, R. et al. (2001). Guía para ingresar a estudios universitarios (1 ed.). Xalapa: SEV.

Richard N. Aufmann, Joanne S. Lockwood. Algebra Elemental. Cengage Learning Editores. Octava Edición.2013.

Rodríguez, A. (2018). Cálculo Diferencial e integral contextualizado a procesos vivenciales. Editoral 3CIENCIAS. España. google.com.ec/books/edition/CÁLCULO_DIFERENCIAL_E_INTEGRAL_CONTEXTU/ILhOD-wAAQBAJ?hl=es&gbpv=1&printsec=frontcover

Stewart, J.; Redlin,I.; Watson,S., 2001. Precálculo. Tercera Edición. Thomson Learning. México.

Sullivan, M., 1997. Precálculo. Cuarta Edición. Pearson Educación. México.

Cotrina, J., & Zúñiga, J. (2021). Ejercicios de matemáticas básicas.

Kline, M. A. (2017). Calculus: An Intuitive and Physical Approach (Volume 1 of 2). Dover Publications.

SOLUCIONES RAZONADAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES DE MATEMÁTICA PARA INGRESAR A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Publicado en Ecuador
Octubre 2025

Edición realizada desde el mes de julio de 2025 hasta septiembre del año 2025, en los talleres Editoriales de MAWIL publicaciones impresas y digitales de la ciudad de Quito.

Quito – Ecuador

Tiraje 30, Ejemplares, A5, 4 colores; Offset MBO
Tipografía: Helvetica LT Std; Bebas Neue; Times New Roman.
Portada: Collage de figuras representadas y citadas en el libro.