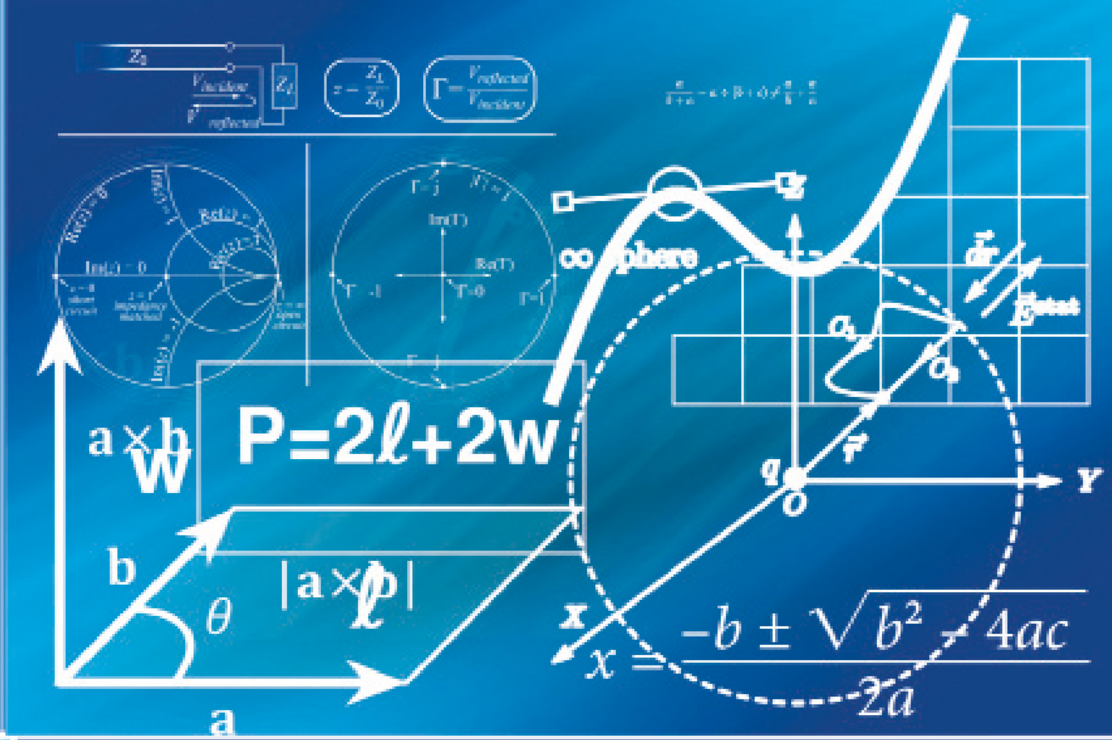
MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales



Compendio de Matemáticas

Volumen VI: Cálculo Integral

Edwin Dimitri Nieto Guerrero

Compendio de Matemáticas Vol. VI

Compendio de Matemáticas

Volumen VI: Cálculo Integral

Edwin Dimitri Nieto Guerrero

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

EMPRESA DE INVESTIGACIÓN
TECHGACETI CIA. LTDA.
SABERES Y CONOCIMIENTOS

Compendio de Matemáticas

Volumen VI: Cálculo Integral

AUTORES **INVESTIGADORES**

Edwin Dimitri Nieto Guerrero
Universidad Central del Ecuador;
Quito, Ecuador;
ednieto@uce.edu.ec
https://orcid.org/0009-0000-8819-3393

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

EMPRESA DE INVESTIGACIÓN SABERES Y CONOCIMIENTOS
TECHGACETI CIA. LTDA.

Compendio de Matemáticas

Volumen VI: Cálculo Integral

REVISORES **ACADÉMICOS**

Hugo Andrés Vinueza Peralta
Magíster en Estadística mención en Gestión de la Calidad y Productividad;
Ingeniero Mecánico
Universidad Técnica Estatal de Quevedo
hugvinu87@gmail.com

Jorge Enrique Ordoñez García
Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones;
Magister en Automatización y Control Industrial;
Máster en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachiller
Universidad de Guayaquil
jordonez.garcia@ug.edu.ec

CATALOGACIÓN **BIBLIOGRÁFICA**

AUTOR: Edwin Dimitri Nieto Guerrero

Título: Compendio de Matemáticas. Volumen VI: Cálculo Integral
Descriptores: Matemáticas; Compendio; Educación Superior
Código UNESCO: 12 Matemáticas; 1202 Análisis y Análisis Funcional
Clasificación Decimal Dewey/Cutter: 510/N677
Área: Educación Superior
Edición: 1ra
ISBN: 978-9942-654-26-7
Editorial: Mawil Publicaciones de Ecuador, 2024
Ciudad, País: Quito, Ecuador
Formato: 148 x 210 mm.
Páginas: 252
DOI: https://doi.org/10.26820/978-9942-654-26-7
URL: https://mawil.us/repositorio/index.php/academico/catalog/book/128

Texto para docentes y estudiantes universitarios
El proyecto didáctico: **Compendio de Matemáticas. Volumen VI: Cálculo Integral,** es una obra colectiva escrita por varios autores y publicada por MAWIL; publicación revisada bajo la modalidad de pares acadé-micos y por el equipo profesional de la editorial siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departa-mento de publicaciones de MAWIL de New Jersey.

Director Académico: Lcdo. Alejandro Plúa Argoti
Dirección Central MAWIL: Office 18 Center Avenue Caldwell; New Jersey # 07006
Gerencia Editorial MAWIL-Ecuador: Mg. Vanessa Pamela Quishpe Morocho
Dirección de corrección: Mg. Ayamara Galanton.
Editor de Arte y Diseño: Lic. Eduardo Flores, Arq. Alfredo Díaz
Corrector de estilo: Lic. Marcelo Acuña Cifuentes

Compendio de Matemáticas

Volumen VI: Cálculo Integral

AUTORES **INVESTIGADORES**

Edwin Dimitri Nieto Guerrero
Universidad Central del Ecuador;
Quito, Ecuador;
ednieto@uce.edu.ec
https://orcid.org/0009-0000-8819-3393

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

EMPRESA DE INVESTIGACIÓN SABERES Y CONOCIMIENTOS
TECHGACETI CIA. LTDA.

Compendio de Matemáticas

Volumen VI: Cálculo Integral

REVISORES **ACADÉMICOS**

Hugo Andrés Vinueza Peralta
Magíster en Estadística mención en Gestión de la Calidad y Productividad;
Ingeniero Mecánico
Universidad Técnica Estatal de Quevedo
hugvinu87@gmail.com

Jorge Enrique Ordoñez García
Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones;
Magister en Automatización y Control Industrial;
Máster en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachiller
Universidad de Guayaquil
jordonez.garcia@ug.edu.ec

MAWIL Publicaciones Impresas y Digitales

EMPRESA DE INVESTIGACIÓN SABERES Y CONOCIMIENTOS
TECHGACETI CIA. LTDA.

CATALOGACIÓN **BIBLIOGRÁFICA**

AUTOR: Edwin Dimitri Nieto Guerrero

Título: Compendio de Matemáticas. Volumen VI: Cálculo Integral
Descriptores: Matemáticas; Compendio; Educación Superior
Código UNESCO: 12 Matemáticas; 1202 Análisis y Análisis Funcional
Clasificación Decimal Dewey/Cutter: 510/N677
Área: Educación Superior
Edición: 1ra
ISBN: 978-9942-654-26-7
Editorial: Mawil Publicaciones de Ecuador, 2024
Ciudad, País: Quito, Ecuador
Formato: 148 x 210 mm.
Páginas: 252
DOI: https://doi.org/10.26820/978-9942-654-26-7
URL: https://mawil.us/repositorio/index.php/academico/catalog/book/124

Texto para docentes y estudiantes universitarios
El proyecto didáctico: **Compendio de Matemáticas. Volumen VI: Cálculo Integral,** es una obra colectiva escrita por varios autores y publicada por MAWIL; publicación revisada bajo la modalidad de pares académicos y por el equipo profesional de la editorial siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento de publicaciones de MAWIL de New Jersey.

Director Académico: Lcdo. Alejandro Plúa Argoti
Dirección Central MAWIL: Office 18 Center Avenue Caldwell; New Jersey # 07006
Gerencia Editorial MAWIL-Ecuador: Mg. Vanessa Pamela Quishpe Morocho
Dirección de corrección: Mg. Ayamara Galanton.
Editor de Arte y Diseño: Lic. Eduardo Flores, Arq. Alfredo Díaz
Corrector de estilo: Lic. Marcelo Acuña Cifuentes

Prefacio

Este texto, es el sexto volumen de una serie de diez volúmenes. Ha sido realizado con el propósito de ayudar a todos aquellos estudiantes que estén interesados en mejorar y profundizar sus conocimientos en el área de la matemática, y para todos aquellos estudiantes que desean incrementar sus habilidades en resolver ejercicios de diferentes niveles de dificultad del área de la matemática.

Esté Compendio de matemática, ha sido preparado; para que, cumplan con el programa obligatorio, que se estudia en el currículo de las Universidades, que tienen la facultad de Ingeniería; el cual, tiene principalmente los temas de:
Conjuntos, los números reales, inducción matemática, relaciones y funciones, polinomios, funciones exponenciales, funciones trigonométricas, funciones logarítmicas, geometría analítica, sistema de ecuaciones, planificación optima, series numéricas, cálculo diferencial de una variable, de dos o mas variables, cálculo integral de una o mas variables, ecuaciones diferenciales y métodos numéricos, que espero cumpla con las exigencias de la facultad.

En este volumen, se encuentra los temas de integrales indefinidas, definidas, aproximadas, aplicaciones de integrales, funciones de dos o más variables, integrales dobles y triples.

De mi observación de estos últimos años, en los cuales he enseñado estás materias, me ha permitido llegar a la conclusión; de que, justamente el nivel de conocimientos; así como, la habilidad de resolver diferentes tipos de problemas, tiene gran influencia en el éxito de permanencia de los estudiantes en las facultades de Ingeniería.

El libro pretende lograr los siguientes objetivos:

1. Introducir al alumno de ingeniería en temas técnicos de razonamiento.

   Muchos de los problemas requieren un cuidadoso análisis de su estructura y posibilidades lógicas, de ese análisis cuidadoso, se observará con frecuencia que, la solución de un problema requiere técnicas simples y la aplicación de ellas dará una solución al ejercicio.

2. Incluir una gran variedad de problemas; así como, indicar una gran variedad de aplicaciones.

   Las soluciones de algunas aplicaciones conducen, por sí mismas, a procedimientos deductivos, que llevan a algoritmos específicos. Este enfoque refuerza la relación íntima existente entre está disciplina y los diferentes campos de la ciencia.

3. Desarrollar la madurez matemática del estudiante mediante el estudio de estos temas, que son de mucha ayuda en un área tan diferente a otras; como es el cálculo.

4. La de ayudar a los profesores en la preparación de sus clases, de las diferentes formas de evaluación; así como, a los estudiantes en su preparación y mejorar su nivel de conocimientos de la materia.

Los pre-requisitos, para este libro, son principalmente un interés por abordar y resolver diversos tipos de problemas, una formación básica en el álgebra de secundaria. Mi mayor motivación, para escribir este libro, ha sido el impulso recibido en los últimos diez años de mis alumnos; así como, por recomendaciones de las autoridades de la facultad de Ingeniería.

En el libro, se ha tratado de presentar los diferentes temas en la forma más simple y clara posible, además, al final de cada tema hay un conjunto de ejercicios diversos cuya solución quizá requiera la aplicación de varios teoremas. Los ejercicios al final de los temas están diseñados para:

1. Aplicar las ideas presentadas en cada tema.

2. Enlazar ideas de temas anteriores con las ideas de los nuevos temas.

3. Desarrollar otros conceptos relacionados con el material dado.

Si el espacio lo permitiera mencionaría a cada uno de mis estudiantes que asistieron a mis cursos y sugirieron la redacción de un texto a partir de las notas de clase.

Deseo expresar mis agradecimientos, muy especiales, al PhD. Jaime Jarrin, amigo y colega de la Facultad, que estudiamos en Polonia, en diferente tiempo, quien con su motivación, consejos y ayuda me permitió, el escribir de mejor forma este libro.

No obstante, si hay algunas personas a quien debo el mayor agradecimiento es, sin duda: a mi esposa, Dorota , a mis hijos, Damián, Marcel y últimamente a Rubi; que sin sus aportes, paciencia, motivación y ayuda; este libro hubiese sido imposible de elaborar.
Un especial agradecimiento a mi compañero de trabajo y de área de matemáticas MSc.. Eduardo Rodríguez, quien en el transcurso de este último semestre, tuvo que leer este compendio de Calculo Integral, para preparar sus clases de calculo y significativamente lo mejoro.

El Autor.

Compendio de Matemáticas
Volumen VI: Cálculo Integral

Edwin Dimitri Nieto Guerrero

Junio, 2024

Índice general

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Integrales Indefinidas

1.1. Elementos Básicos de una Integral Indefinida

Si el dominio de la función f(x), se encuentra en el intervalo cerrado $[a,b]$ y a este intervalo, se lo divide en 'n' subintervalos y la forma como se seleccione a estos puntos, es indiferente; es decir: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\cdots,\ x_n$, lo cual, se escribe:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

La longitud de estos subintervalos $[x_{k-1}; x_k]$ donde, $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ se la asigna la terminología de $\triangle x_k$ y se lo define, como la variación de ' x' :

$$\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$$

Está relación, se la obtuvo al aplicar uno de los fundamentos básicos de Geometría Analítica, que es la distancia de un segmento entre dos puntos.

Los puntos $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\cdots,\ x_{n-1}$ definen la división del intervalo $[a;b]$ en 'n' subintervalos y a está subdivisión de la define como: $\triangle_n$.

Se considera al número δ_n al subintervalo de mayor longitud y se lo define:

$$\delta_n = \underset{1\leq k\leq n}{max} \triangle x_n$$

Y se la conoce como la medida media de los subintervalos.
En cada uno de los intervalos $[x_{k-1}; x_k]$ se toma un punto cualquiera ξ_k, se calcula $f(x = \xi_k)$ y, se considera la suma de los productos:

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \triangle x_k$$

A está suma, se la conoce con el nombre la suma integral de Riemann de la función f(x) en el intervalo $[a;b]$ que corresponde a la subdivisión $\triangle_n$.
Ahora, se forma una sucesión de las subdivisiones $(\triangle_n)$ en el intervalo $[a;b]$ a la cual, se la conoce con el nombre de sucesión normal de las subdivisiones; siempre y cuando, le corresponda a una sucesión de la medida de medias que tiende a cero ($\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$).
En función de este análisis, se puede escribir la definición de una integral: Si para toda sucesión normal de la subdivisión del intervalo $[a;b]$ la sucesión de las sumas (δ_n) es convergente al mismo limite, independiente de la forma, como se considere el punto ξ_n a este limite, se lo denomina la integral definida de la función f(x) en el intervalo $[a;b]$ y su símbolo es:

$$\int_a^b f(x)dx \qquad\qquad Integral\ \ Definida$$

A está definición, se lo puede escribir en la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_n\to\infty} \sum_{1}^{n} f(x = \xi_k) \cdot \triangle x_k \qquad\qquad Integral\ \ Definida$$

En el momento, en el cual, el intervalo no es conocido y se realiza el mismo tipo de análisis, se denomina integral indefinida:

$$\int f(x)dx = \lim_{\delta_n\to\infty} \sum_{1}^{n} f(x = \xi_k) \cdot \triangle x_k \qquad\qquad Integral\ \ Indefinida$$

1.2. Integral Indefinida

La función primitiva de la función f(x) en el intervalo $a < x < b$, se llama a toda función F(x), de la cual, al encontrar su derivada $F'(x)$ es igual a la función f(x), para todo valor de 'x' del intervalo $a < x < b$. Dos funciones que tienen en un determinado intervalo, la misma derivada, se diferencian en la constante.

La integral indefinida de la función f(x), se lo simboliza:

$$\int f(x)dx$$

a la expresión F(x) + C, donde F(x) es la función primitiva de la función f(x), a C es una constante cualquiera. Por lo tanto:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \longleftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

De lo escrito, se obtiene las siguientes conclusiones:

1. Puede existir diferentes métodos para conseguir la función primitiva F(x), pero al derivarla, se debe llegar a una sola (única) función f(x),

2. La función F(x), tiene que ser continua en un intervalo $a < x < b$

3. La identidad escrita, se la conoce como la definición de la integral indefinida.

4. La definición nos indica que, la operación de integración y la operación de derivación son funciones inversas.

5. La integración de una misma función en un intervalo dado, se diferencia a lo mucho por la constante.

1.3. Tabla Básica de Integrales Indefinidas

La tabla básica de integrales indefinidas, son aquellas integrales, que se las obtiene en forma directa, aplicando solamente la definición de integrales.

Por ejemplo: se tiene una función f(x), a la cual, se le aplica la derivada:

$$f(x) = \sin(x) \qquad \longrightarrow \qquad f'(x) = \cos(x)$$

Lo cual, se lo puede escribir de diferente manera:

$$f'(x) = \cos(x) \qquad \longrightarrow \qquad (\sin(x))' = \cos(x)$$

Lo obtenido es una identidad y como tal, se la debe tratar. Ahora, se aplica a ambos lados de la identidad la operación matemática de integración; es decir:

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad \longrightarrow \qquad \int (\sin(x))'dx = \int \cos(x)dx$$

Como la integración y la derivación son operaciones matemáticas inversas:

$$\int (\sin(x))'dx = \int \cos(x)dx \qquad \longrightarrow \qquad \sin(x) = \int \cos(x)dx$$

Por lo tanto, se ha obtenido una integral básica; es decir, la integral de la función coseno es igual a la función $\sin(x)$:

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

Como no hay un intervalo, en el cual, se va a integrar, se aumenta la constante C. Aplicando el mismo razonamiento, se puede obtener todas las integrales básicas.

$$\begin{aligned}
\int dx &= x + C \\
\int e^x dx &= e^x + C \\
\int \cos(x) dx &= \sin(x) + C \\
\int \sin(x) dx &= -\cos(x) + C \\
\int \frac{dx}{x} &= \ln(x) + C & x > 0 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= 2\sqrt{x} + C & x > 0 \\
\int \frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{x} + C & x \neq 0 \\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln(a)} + C & a \neq 1; a > 0 \\
\int \frac{dx}{\cos^2(x)} &= \tan(x) + C & \cos(x) \neq 0 \\
\int \frac{dx}{\sin^2(x)} &= -\cot(x) + C & \sin(x) \neq 0 \\
\int \frac{dx}{\sinh^2(x)} &= -\coth(x) + C \\
\int \frac{dx}{\cosh^2(x)} &= -\tanh(x) + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin(x) + C \quad = -\operatorname{arc}\cos(x) & -1 < x < 1 \\
\int \frac{dx}{x^2+1} &= \arctan(x) + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad = \operatorname{arcsin}(x) + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \cosh(x) dx &= \sinh(x) + C \\
\int \sinh(x) dx &= \cosh(x) + C \\
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1;
\end{aligned}$$

1.4. Propiedades de Integrales Indefinidas

La operación de integración y de derivación son operaciones matemáticas inversas; por lo tanto, sus propiedades deben ser muy parecidas y mutuamente se complementan: Sus propiedades son:

1. La integral de la suma de dos o mas funciones, es igual a la suma de la integral de cada una de las funciones.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Esta es la propiedad aditiva, que también, es aplicada a limites; así como, a la derivada de funciones. Y además, se aplica en ecuaciones diferenciales.

2. La constante en el interior de una integral, se la puede sacar delante de la integral.

$$\int K \cdot f(x)dx = K \int f(x)dx$$

También, es una propiedad, que se aplica a limites, derivadas y ecuaciones diferenciales

3. Si se tiene dos funciones con la variable 'x' y son continuas sus derivadas, entonces:

$$\int g(x) \cdot d(f(x)) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)d(g(x))$$

Esta propiedad aparece de la propiedad de la derivada; es decir, la derivada del producto de dos funciones:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

De aquí, se despeja una de los elementos:

$$f'(x) \cdot g(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f(x) \cdot g'(x)$$

A está última identidad, se toma la operación de integración a ambos lados:

$$\int g(x) \cdot f'(x)dx = \int [(f(x) \cdot g(x))' - f(x) \cdot g'(x)]dx$$

Se aplica la primera propiedad:

$$\int g(x) \cdot f'(x)dx = \int (f(x) \cdot g(x))'dx - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

Se aplica la definición de integración:

$$\int g(x) \cdot f'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

Se debe recordar que: f'(x)dx = d(f(x)) = (f(x))' representan lo mismo.

Esta propiedad es conocida, como el método de integración por partes, y como se puede apreciar, se aplica en el momento en que, la integral este conformada de por lo menos de dos funciones diferentes.

4. Si para el intervalo $a \leq x \leq b$, la función g(x) = u, tiene su derivada continua en el intervalo $A \leq g(x) \leq B$, la función f(u) es continua en el intervalo [A,B]:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Después de integrar el lado derecho, se regresa a la variable 'x'. A esto se lo conoce, como la integración por cambio de variable.

Los dos últimos numerales, además de ser propiedades, son métodos de integración y son los únicos métodos de integración, que se aplica. El estudiante debe dominar estos métodos, si desea entender la operación de integración de una función f(x), dada.

1.4.1. Ejercicios Resueltos de Integrales por Partes o Cambio de Variable

1. Encuentre la integral de $I = \int x(x-1)(x-2)dx$.

Se lo transforma a su forma polinomial:

$$\int (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \int x^3dx - 3\int x^2dx + 2\int xdx = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + C$$

¡Finalmente:

$$I = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + C$$

2. Encuentre la integral $I = \int (x^2 - x + 1)^2 dx$.

   Se desarrolla el trinomio:
   $$I = (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)dx$$
   $$I = \int x^4 dx - 2\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - 2\int x dx + \int dx$$
   $$I = \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + xC$$
   $$I = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + x^3 - x^2 + x + C$$

3. Encuentre la integral $I = \int (x^2 + a^2)x dx$

   Se lo resuelve por dos diferentes métodos:

   a) $I = \int (x^2 + a^2)x dx = \int x^3 dx + a^2 \int x dx = \dfrac{x^4}{4} + a^2\dfrac{x^2}{2} + C$

   b) Se realiza un cambio de variable: $x^2 + a^2 = u$, se deriva ambos lados de la identidad, se obtiene: $2x dx = du$, se reemplaza:
   $$I = \int (x^2 + a^2)x dx = \int u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u du = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} = \frac{1}{4}(x^2 + a^2)^2 + C$$

4. Encuentre la integral $I = \displaystyle\int \frac{x(\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}} dx$

   Se separa en dos integrales, $x > 0$:
   $$I = \int \frac{x(\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx - \int \frac{x^3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$$
   Se aplica propiedades de funciones exponenciales:
   $$= \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} dx - \int x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{-1}{4}} dx = \int x^{\frac{5}{4}} dx - \int x^{\frac{37}{12}} dx =$$
   Se integra:
   $$= \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} - \frac{12}{49}x^{\frac{49}{12}} + C = \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} - \frac{12}{49}x^4\sqrt[12]{x} + C$$

5. Encuentre la integral $I = \displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})}{x^2} dx$

   Se separa en dos integrales, x ¿0:
   $$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx - \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int x^{\frac{1}{2}} x^{-2} dx - \int x^{\frac{1}{3}} x^{-2} dx$$
   $$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx - \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int x^{\frac{1}{2}} x^{-2} dx - \int x^{\frac{1}{3}} x^{-2} dx$$
   $$= \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int x^{-\frac{5}{3}} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} - + \frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} + C$$

6. Encuentre la integral $I = \displaystyle\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n}$

   Se realiza un cambio de variable: $x^2 + a^2 = u; u > 0$, se encuentra su derivada: $2x dx = du$, se reemplaza :
   $$I = \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int \frac{du}{2u^n} = \frac{1}{2}\int u^{-n} du = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C$$
   $$I = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C = \frac{-1}{(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + C \qquad a \neq 0; x \neq 1$$
   En el caso de que n = 1, se tiene:
   $$I = \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2) + C$$

7. Encuentre la integral $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$; $\quad x > \frac{3}{2}$

   Se realiza un cambio de variable: $\sqrt{2x-3} = t$
   $$\sqrt{2x-3} = t \longrightarrow 2x-3 = t^2$$
   Se deriva la identidad:
   $$2x-3 = t^2 \longrightarrow 2dx = 2tdt \longrightarrow dx = tdt$$
   se reemplaza:
   $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}dx = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{2x-3} + C$$

8. Encuentre la integral $I = \int x^2\sqrt{2x^3-3}dx$; $\quad x \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

   Se realiza un cambio de variable: $\sqrt{2x^3-3} = t$
   $$\sqrt{2x^3-3} = t \longrightarrow 2x^3-3 = t^2$$
   Se deriva la identidad:
   $$6x^2dx = 2tdt \longrightarrow x^2dx = \frac{2}{6}tdt \longrightarrow x^2dx = \frac{1}{3}tdt$$
   se reemplaza:
   $$I = \int x^2\sqrt{2x^3-3}dx = \int \frac{1}{3}t^2dt = \frac{1}{3}\int t^2dt =$$
   $$= \frac{1}{3}\frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{9}\left(\sqrt{2x^3-3}\right)^3 + C$$

9. Encuentre la integral $I = \int xe^{x^2}dx$

   Se realiza un cambio de variable: $x^2 = t$
   Se deriva la identidad:
   $$2xdx = dt$$
   se reemplaza:
   $$I = \int xe^{x^2}dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^tdt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

10. Encuentre la integral $I = \int \sin(x)\cos(x)dx$

    El ejercicio se lo puede resolver por tres diferentes formas.

    a) Cambio de variable: $\sin(x) = t \longrightarrow \cos(x)dx = dt$ Se reemplaza:
    $$I = \int \sin(x)\cos(x)dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2(x)}{2} + C$$

    b) Se utiliza identidades trigonométricas
    $$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$
    Se reemplaza:
    $$I = \int \sin(x)\cos(x)dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx$$
    $$I = \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx =$$
    Cambio de variable:$2x = u \longrightarrow 2dx = du$ y se reemplaza:
    $$I = \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int \sin(u)du =$$
    $$I = \frac{1}{4}\int \sin(u)du = -\frac{1}{4}\cos(u) + C = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C =$$

c) Cambio de variable: $\cos(x) = t \longrightarrow -\sin(x)dx = dt$, se reemplaza:

$$I = \int \sin(x)\cos(x)dx = -\int t\,dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$$

Como, se aprecia, se tiene tres diferentes resultados, para comprobar se tiene dos métodos:

1) Al derivar los resultados:

$$\left[-\frac{1}{2}\cos^2(x) + C\right]' = \frac{2}{2}\cos(x)\sin(x) = \cos(x)\sin(x)$$

$$\left[-\frac{1}{4}\cos(2x) + C\right]' = \frac{2}{4}\sin(2x) = \frac{2\cdot 2}{4}\sin(x)\cos(x) = \cos(x)\sin(x)$$

$$\left[\frac{\sin^2(x)}{2} + C\right]' = \frac{2}{2}\sin(x)\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$$

2) La diferencia entre dos cualquiera de estos resultados tiene que dar una constante:

$$\left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right] - \left(-\frac{1}{2}\cos^2(x)\right)$$

$$\frac{1}{2}(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = \frac{1}{2}$$

11. Encuentre la integral $I = \int \frac{\ln(x)}{x}dx$

Se aplica un cambio de variable: $\ln(x) = t \longrightarrow \frac{dx}{x} = dt$, se reemplaza:

$$I = \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C$$

12. Encuentre la integral $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

Se aplica un cambio de variable: $x^2 = t \longrightarrow 2xdx = dt$, se reemplaza:

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(t) + C = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

13. Encuentre la integral $I = \int x\sin(x)dx$

Se aplica el método de por partes, su fórmula es:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\begin{array}{ll} g(x) = x & f'(x) = \sin(x)dx \\ \downarrow & \downarrow \\ g'(x) = dx & \int f'(x)dx = \int \sin(x)dx \\ & \downarrow \\ & f(x) = -\cos(x) \end{array}$$

Se reemplaza:

$$\int x\sin(x)dx = x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))dx$$

$$\int x\sin(x)dx = -x(\cos(x)) + \int (\cos(x))dx + C$$

$$\int x\sin(x)dx = -x(\cos(x)) + \sin(x) + C$$

14. Encuentre la integral $I = \int e^x \sin(x)dx$

    Se aplica el método de por partes, su fórmula es:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\begin{array}{ll} g(x) = \sin(x) & f'(x) = e^x dx \\ \downarrow & \downarrow \\ g'(x) = \cos(x)dx & \int f'(x)dx = \int e^x dx \\ & \downarrow \\ & f(x) = e^x \end{array}$$

    Se reemplaza:

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int (e^x \cos(x))dx$$

    El segundo miembro tiene una integral con dos funcione; por lo tanto, se vuelve aplicar el método por partes: Se aplica el método de por partes, su fórmula es:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\begin{array}{ll} g(x) = \cos(x) & f'(x) = e^x dx \\ \downarrow & \downarrow \\ g'(x) = -\sin(x)dx & \int f'(x)dx = \int e^x dx \\ & \downarrow \\ & f(x) = e^x \end{array}$$

    Se reemplaza:

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos(x) - \int -(e^x \sin(x))dx$$

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos(x) + \int (e^x \sin(x))dx$$

    Se reemplaza en la integral anterior de la primera parte:

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int (e^x \cos(x))dx$$

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - [e^x \cos(x) + \int (e^x \sin(x))dx]$$

$$\int e^x \sin(x)dx + \int (e^x \sin(x))dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$$

$$2\int (e^x \sin(x))dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$$

$$2\int (e^x \sin(x))dx = e^x[\sin(x) - \cos(x)]$$

$$\int (e^x \sin(x))dx = \frac{e^x}{2}[\sin(x) - \cos(x)] + C$$

15. Encuentre la integral $I = \int \ln(x)dx$

    Esta es una de las integrales, que el estudiante la va a utilizar con mucha frecuencia.

    El método a utilizar es por partes. Su fórmula es:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$g(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = dx$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$g'(x) = \frac{dx}{x} \qquad \int f'(x)dx = \int dx$$
$$\downarrow$$
$$f(x) = x$$

Se reemplaza en la integral:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int dx$$

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$$

$$\int \ln(x)dx = x[\ln(x) - 1] + C$$

16. Encuentre la integral $I = \displaystyle\int x^{10}\ln(x)dx$

    El método a utilizar es por partes. Su fórmula es:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$g(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = x^{10}dx$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$g'(x) = \frac{dx}{x} \qquad \int f'(x)dx = \int x^{10}dx$$
$$\downarrow$$
$$f(x) = \frac{x^{11}}{11}$$

    Se reemplaza en la integral:

$$I = \int x^{10}\ln(x)dx = \frac{x^{11}\ln(x)}{11} - \int \frac{x^{11}dx}{11x}$$

$$I = \int x^{10}\ln(x)dx = \frac{x^{11}\ln(x)}{11} - \frac{1}{11}\int x^{10}dx$$

$$I = \int x^{10}\ln(x)dx = \frac{x^{11}\ln(x)}{11} - \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{11}$$

$$I = \int x^{10}\ln(x)dx = \frac{x^{11}}{11}\left[\ln(x) - \frac{1}{11}\right] + C$$

17. Encuentre la integral $I = \displaystyle\int (\ln(x))^2 dx$

    El método a utilizar es por partes. Su fórmula es:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$g(x) = (\ln(x))^2 \qquad f'(x) = dx$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$g'(x) = 2\ln(x)\cdot\frac{dx}{x} \qquad \int f'(x)dx = \int dx$$
$$\downarrow$$
$$f(x) = x$$

Se reemplaza en la integral:

$$I = \int (\ln(x))^2 dx = x(\ln(x))^2 - 2\int x\ln(x)\cdot\frac{dx}{x}$$

$$I = \int (\ln(x))^2 dx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln(x)dx$$

El segundo miembro ya se lo integro en un ejercicio anterior.

$$I = \int (\ln(x))^2 dx = x(\ln(x))^2 - 2x(\ln(x)-1) + C$$

18. Encuentre la integral $I = \int \arctan(x)dx$

El método a aplicar es el mismo, para todas las integrales que contengan funciones trigonométricas inversas. El método a utilizar es por partes. Su fórmula es:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\begin{array}{ll} g(x) = \arctan(x) & f'(x) = dx \\ \downarrow & \quad\downarrow \\ g'(x) = \dfrac{dx}{x^2+1} & \int f'(x)dx = \int dx \\ & \quad\downarrow \\ & f(x) = x \end{array}$$

Se reemplaza en la integral:

$$I = \int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

En la segunda integral se realiza un cambio de variable: $x^2+1 = t \longrightarrow 2xdx = dt$

$$I = \int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln(t) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Se reemplaza:

$$I = \int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$I = \int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

19. La aceleración en un movimiento lineal, se la expresa con la fórmula $a = 12t^2 + 18\sin(3t) - 2$. Encontrar una relación que defina la velocidad 'v' con respecto el tiempo. Si para t = 0 , la velocidad v = $10\left[\frac{m}{s}\right]$. Encontrar además, la relación que define el desplazamiento 'x'. Si para t = 0 x = 5[m] Esta es una aplicación de la ingeniería de la mecánica. En este caso, se recurre a una definición de la aceleración.

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = adt$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$dv = adt \longrightarrow \int dv = \int adt$$

$$\int dv = \int adt \longrightarrow v = \int (12t^2 + 18\sin(t) - 2)dt =$$

$$v = \int 12t^2dt + 18\int \sin(t)dt - 2\int dt =$$

$$v = 12\frac{t^3}{3} - 18\left(\frac{\cos(3t)}{3}\right) - 2t + C =$$

Se requiere encontrar el valor de C, para lo cual, se utiliza el valor de la condición, t = 0, v = 10.

$$v = 12\frac{t^3}{3} - 18\left(\frac{\cos(3t)}{3}\right) - 2t + C$$

$$10 = 12\frac{0^3}{3} - 18\left(\frac{\cos(3(0)))}{3}\right) - 2(0) + C$$

$$10 = 0 - 18\left(\frac{1}{3}\right) - 2(0) + C$$

$$10 = -6 + C \longrightarrow C = 16$$

$$v = 12\frac{t^3}{3} - 18\left(\frac{\cos(3t)}{3}\right) - 2t + 16$$

La relación buscada para la velocidad:

$$v = 4t^3 - 6(\cos(3t)) - 2t + 16$$

Para encontrar la relación para el desplazamiento, se vuelve aplicar una definición de la mecánica:

$$v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = vdt$$

Se integra a ambos lados:

$$dx = vdt \longrightarrow \int dx = \int vdt \longrightarrow x = \int (4t^3 - 6(\cos(3t)) - 2t + 16)dt$$

$$x = \int 4t^3 dt - 6\int (\cos(3t))dt - 2\int t + 16\int dt$$

$$x = \frac{4t^4}{4} - 6\frac{\sin(3t)}{3} - 2\frac{t^2}{2} + 16t + C$$

$$x = t^4 - 2\sin(3t) - t^2 + 16t + C$$

Para t = 0, x = 5:

$$5 = (0)^4 - 2\sin(3(0)) - (0)^2 + 16(0) + C$$

$$5 = C$$

Se encuentra, finalmente, la relación del desplazamiento con relación al tiempo:

$$x = t^4 - 2\sin(3t) - t^2 + 16t + 5$$

1.4.2. Ejercicios Propuestos de Integrales por Partes o Cambio de Variable

Integre los siguientes ejercicios:

1. $\int (5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})dx$
2. $\int (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)dx$
3. $\int \frac{xdx}{1 + x^2}$
4. $\int \frac{x^2dx}{a^3 + x^3}$
5. $\int \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$
6. $\int \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx$
7. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}}$
8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$
9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 6}}$
10. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
11. $\int \frac{dx}{2\cos^2(3x)}$
12. $\int \frac{\sin(x)}{a + b\cos(x)}dx \qquad b \neq 0$
13. $\int \frac{x^3dx}{\cos^2(x^4)}$
14. $\int \frac{x^2dx}{\cos^2(x^3 + 1)}$
15. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$
16. $\int x\ln(1 + x^2)dx$
17. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$
18. $\int \frac{dx}{4x^2 + 7}$
19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6 + 1}}$

1. $\int \frac{(x^2 - 1)^3dx}{x}$
2. $\int \frac{xdx}{(x^2 + 3)^6}$
3. $\int \frac{x\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x^2}dx$
4. $\int (x^2 + 4)^5xdx$
5. $\int 6^{1-x}dx$
6. $\int \frac{\ln(\arctan(x))}{1 + x^2}dx$
7. $\int (3 + 2\sqrt[4]{x})^3dx$
8. $\int \frac{3 + 5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}dx$
9. $\int \sqrt{a + bx}dx$
10. $\int x\sqrt{1 + x^2}dx$
11. $\int \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x + 1}}dx$
12. $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3 + 1}}dx$
13. $\int xe^{-x^2}dx$
14. $\int x\sin(2x^2 + 1)dx$
15. $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 + \sin(x)}}dx$
16. $\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}dx$
17. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 1}}$
18. $\int \frac{dx}{a^2 + b^2x}$
19. $\int \frac{a^xdx}{a^{2x} - 1}$

1. $\int \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}dx$
2. $\int \frac{(\ln(x))^2}{x}dx$
3. $\int \frac{(e^x)}{2e^x+1}dx$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$
5. $\int \frac{\sqrt{2+\ln(x)}}{x}dx$
6. $\int xe^{x^2}(x^2+1)dx$
7. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$
8. $\int \frac{(\pi-\arcsin(x))}{\sqrt{1-x^2}}dx$
9. $\int x^4(1+x)^3dx$
10. $\int x^3e^xdx$
11. $\int x\cos(x)dx$
12. $\int x^2\sin(5x)dx$
13. $\int e^{-2x}\sin(3x)dx$
14. $\int \sqrt{x}\ln(x)dx$
15. $\int x\sin(x)dx$
16. $\int x^3(\ln(x))^2dx$
17. $\int x^2e^xdx$
18. $\int x^3\sin(x)dx$
19. $\int \frac{xdx}{4x^2+7}$
20. $\int \frac{a^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$
21. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

1. $\int xe^{-x^2}dx$
2. $\int \frac{\ln(x)}{x^4}dx$
3. $\int \frac{\ln^2(x)}{x^4}dx$
4. $\int \frac{xdx}{x^4+1}$
5. $\int x^2e^xdx$
6. $\int x^4e^{2x}dx$
7. $\int x^2\cos(x)dx$
8. $\int e^x\cos(x)dx$
9. $\int e^x\cos\left(\frac{2x}{3}\right)dx$
10. $\int (\ln(x))^3dx$
11. $\int \sqrt{x}(\ln(x))^3dx$
12. $\int \frac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}}dx$
13. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan(x)}$
14. $\int x^2\sin(x)dx$
15. $\int \frac{xdx}{x^4}$
16. $\int \frac{xdx}{e^{x^2}}$
17. $\int \sin(x)\cdot e^{\cos(x)}dx$
18. $\int \sin(x)\cdot e^{\cos(x)}dx$
19. $\int \frac{sec^2x}{a-b\cdot tanx}dx$
20. $\int \frac{sec^2x}{tan^4x}dx$
21. $\int \frac{senx}{\sqrt{\cos^2x+4}}dx$

Capítulo 2

Integrales Indefinidas de Funciones Racionales

2.1. Elementos Básicos de una Integral Indefinida de Funciones Racionales

Una función racional, es aquella función que tiene la forma:

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx = \int \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}dx$$

Por lo tanto, una función racional, es la relación de dos polinomios de diferente orden. De la teoría de Álgebra Lineal, se conoce que, todo función racional se la pude transformar en suma de cierta combinación de diferente tipo de funciones. En el cálculo integral de este tipo de funciones se debe observar:

1. Si $n \geq m$, es lo que, se denomina una fracción impropia, y por lo tanto, hay que transformarla a una fracción propia, para lo cual, se debe realizar la división de estos polinomios y aplicar el teorema de Euclides:

   $$p(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

   Lo que permite representar a la integral inicial como suma de polinomios, en los cuales el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador.$(n < m)$

2. Si $n < m$ la función racional en la integral, se la debe transformar en sus fracciones parciales. Fracciones que tendrán la forma:

   $$\frac{A}{(ax+b)^k}; \qquad y \qquad \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^p}$$

Donde: A, B, C, a, b, c, d, e son constantes, a los coeficientes k, p son constantes, que pertenecen al conjunto de los números naturales. La forma de presentar una función racional, de los dos casos analizados, en sus fracciones parciales y el cálculo de las integrales de estás fracciones, se lo presentara en los siguientes ejercicios.

2.1.1. Ejercicios Resueltos de Integrales de Funciones Racionales

1. Encuentre la integral de:

   $$\int \frac{dx}{ax+b}; \qquad a \neq 0 \quad x \neq \frac{b}{a}$$

   Se realiza un cambio de variable: $ax + b = t \longrightarrow adx = dt \longrightarrow dx = \dfrac{dt}{a}$

   $$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{dt}{at} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln(t) + C = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C$$

2. Encuentre la integral de:

   $$\int (ax+b)^n dx;$$

   Si n = -1, este caso fue analizado en el ejercicio anterior. Si n es un número negativo, se debe tener en cuenta que: $ax + b \neq 0$ y si n no es un número entero, se debe tener en cuenta, $ax + b > 0$.

   Se realiza un cambio de variable: $ax + b = t \longrightarrow adx = dt \longrightarrow dx = \dfrac{dt}{a}$

   $$\int (ax+b)^n dx = \int (t)^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int (t)^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

3. Encuentre la integral :

   $$\int \frac{cx+d}{ax+b}dx;$$

   Lo primero, que se debe observar, es que, se tiene una fracción impropia, lo que significa , que el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el del denominador. En este caso se debe realizar la división:

Después de realizar la división, se aplica el teorema de Euclides:

$$p(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

En este caso:

$$cx + d = (ax + b)\frac{c}{a} + \left(d - \frac{bc}{a}\right)$$

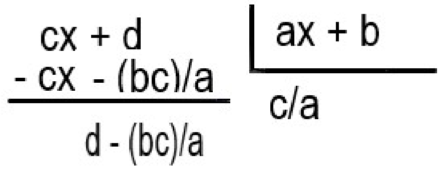


Figura 2.0

Gracias, al teorema de Euclides, se ha obtenido una identidad y se la divide a ambos lados por $(ax+b)$:

$$\frac{cx+d}{ax+b} = \frac{(ax+b)\frac{c}{a}}{ax+b} + \frac{d - \frac{bc}{a}}{ax+b}$$

Finalmente, se obtiene, al simplificar:

$$\frac{cx+d}{ax+b} = \frac{c}{a} + \frac{d - \frac{bc}{a}}{ax+b}$$

Que es una identidad: el lado izquierdo es igual a la suma de dos fracciones propias del lado derecho. Lo que permite escribir:

$$\int \frac{cx+d}{ax+b}dx = \int \left[\frac{c}{a} + \frac{d - \frac{bc}{a}}{ax+b}\right]dx = \int \left[\frac{c}{a}\right]dx + \int \left[\frac{d - \frac{bc}{a}}{ax+b}\right]dx =$$

Se integra y se obtiene:

$$= \frac{c}{a}x + \left(d - \frac{bc}{a}\right)\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{c}{a}x + \left(\frac{ad-bc}{a}\right)\int \frac{dx}{ax+b} =$$

$$\int \frac{cx+d}{ax+b}dx = \frac{c}{a}x + \left(\frac{ad-bc}{a^2}\right)\ln(ax+b) + C$$

En este tipo de integrales, una integral que se aplica muy frecuente es:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

Esta fórmula se obtiene:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|f(x)| + C$$

El numerador se los puede escribir:

$$\int \frac{(x)'dx}{x} = \int \frac{(f(x))'dx}{f(x)} = \ln|f(x)|$$

4. Encuentre la integral:

$$\int \frac{6x-1}{3x^2-x+5}dx =$$

El discriminante del polinomio del denominador es $\triangle = b^2 - 4ac = 1 - 60 < 0$, lo que nos indica, que el numerador de la función racional nunca va a cortar el eje 0x , con ningún valor de ' x '. Además, se observa que la derivada del denominador: $(3x^2 - x + 5)' = 6x - 1$; por lo cual, se puede aplicar la fórmula:

$$\int \frac{6x-1}{3x^2-x+5}dx = \int \frac{(3x^2-x+5)'}{3x^2-x+5}dx = \ln(3x^2-x+5) + C$$

5. Encuentre la integral:
$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}dx =$$
El discriminante del polinomio del denominador es: $\triangle = 36-20 = 16$, sus raíces son $x_1 = 1; x_2 = 5$. Por lo tanto, el dominio de la integral es: $x \in \mathbb{R}-\{1,5\}$. Se observa que $(x^2-6x+5)' = 2x-6 = 2(x-3)$, lo que significa , que el numerador es proporcional al denominador.
$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+5)+C$$
Cuando el numerador no es la derivada del denominador y tampoco es proporcional, en ese caso, el método de integración depende del signo del discriminante del polinomio de segundo del denominador.

6. Encuentre la integral:
$$\int \frac{1}{2x^2+9x-5}dx =$$
Su discriminante es mayor a cero, es decir, tiene dos raíces, se encuentra sus raíces:
$$2x^2+9x-5 = (2x-1)(x+5)$$
En el desarrollo del ejercicio se considera, que $x_1 \neq \frac{1}{2}; \quad x_2 = -5$, Se obtiene sus fracciones parciales:
$$\frac{1}{2x^2+9x-5} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+5}$$
$$\frac{1}{2x^2+9x-5} = \frac{A(x+5)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+5)}$$
Se aplica el método de relaciones, para obtener los valores de A;B.
$$1 = A(x+5)+B(2x-1)$$
Si x = -5
$$1 = 0-B(11) \longrightarrow B = -\frac{1}{11}$$
Si $x = \frac{1}{2}$
$$1 = A\left(\frac{1}{2}+5\right)+B(0) \longrightarrow A = \frac{2}{11}$$
Se reemplaza:
$$\frac{1}{2x^2+9x-5} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+5} = \frac{\frac{2}{11}}{2x-1} - \frac{\frac{1}{11}}{x+5} =$$
Se reemplaza en la integral:
$$\int \frac{1}{2x^2+9x-5}dx = \int \left[\frac{\frac{2}{11}}{2x-1} - \frac{\frac{1}{11}}{x+5}\right]dx = \frac{2}{11}\int \frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{11}\int \frac{dx}{x+5} =$$
$$= \frac{2}{11}\int \frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{11}\int \frac{dx}{x+5} = \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{2}\ln(2x-1) - \frac{1}{11}\ln(x+5)+5 =$$
$$= \frac{1}{11}\cdot\ln(2x-1) - \frac{1}{11}\ln(x+5)+5 = \frac{1}{11}\ln\left(\frac{2x-1}{x+5}\right)+C$$

7. Encuentre la integral:
$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}dx =$$

Su discriminante es igual a cero, es decir, tiene una raíz doble, se encuentra sus raíces:

$$9x^2 - 69x + 1 = (3x-1)^2$$

En el desarrollo del ejercicio se considera, que $x_{1,2} \neq \frac{1}{3}$, Se obtiene sus fracciones parciales:

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} = \frac{A}{(3x-1)^2} + \frac{B}{3x-1} = \frac{A+B(3x-1)}{(3x-1)^2} =$$

$$9x-5 = A + B(3x-1)$$

Si $x = \frac{1}{3}$

$$9\left(\frac{1}{3}\right) - 5 = A + B(0) \longrightarrow A = -2$$

Si $x = 0$

$$9(0) - 5 = A + B(0-1) \longrightarrow -5 = -2 - B \longrightarrow B = 3$$

Se reemplaza:

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} = \frac{A}{(3x-1)^2} + \frac{B}{3x-1} = \frac{-2}{(3x-1)^2} + \frac{3}{3x-1}$$

Se reemplaza en la integral:

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}dx = \int \left[\frac{-2}{(3x-1)^2} + \frac{3}{3x-1}\right]dx = \int \frac{-2dx}{(3x-1)^2} + \int \frac{3dx}{3x-1} =$$

$$= -2\int \frac{dx}{(3x-1)^2} + \int 3\frac{dx}{3x-1}$$

Ya se conoce ,como integrar las dos integrales; por lo tanto, el estudiante lo verifica:

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}dx = -2\left(\frac{-1}{3(3x-1)}\right) + 3\cdot\frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$$

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}dx = -2\left(\frac{-1}{3(3x-1)}\right) + \ln(3x-1) + C$$

8. Encuentre la integral:

$$\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5}dx =$$

El discriminante del polinomio del denominador es: $\triangle = b^2 - 4ac = 36 - 4(10) = -4$; $\triangle < 0$. Se encuentra la derivada:

$$(2x^2+6x+5)' = 4x+6$$

Se divide el numerador para la derivada del denominador y se aplica el teorema de Euclides:

$$x+1 = \frac{1}{4}(4x+6) - \frac{1}{2}$$

Se reemplaza:

$$\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5}dx = \int \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{(4x+6)}{2x^2+6x+5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2+6x+5}\right]dx =$$

$$\frac{1}{4}\int \left[\frac{(4x+6)}{2x^2+6x+5}\right]dx - \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{2x^2+6x+5}\right]dx =$$

La primera integral:

$$\frac{1}{4}\int \left[\frac{(4x+6)}{2x^2+6x+5}\right]dx = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+6x+5\right|$$

La segunda integral:

$$\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{2x^2+6x+5}\right]dx=$$

Se transforma el polinomio a su forma canónica, para lo cual, se aplica la fórmula:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\triangle}{4a^2}\right)$$

Se transforma el polinomio:

$$2x^2+6x+5=2\left[\left(x+\frac{6}{4}\right)^2-\frac{(-4)}{16}\right]=2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{(1)}{4}\right]$$

Se reemplaza:

$$\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{2x^2+6x+5}\right]dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]}dx==\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{2x+3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{2x+3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left[\frac{(2x+3)^2}{4}+\frac{1}{4}\right]}dx=$$

$$=\frac{4}{4}\int\frac{1}{(2x+3)^2+1}dx=\int\frac{1}{(2x+3)^2+1}dx$$

Se realiza un cambio de variable: $2x+3=t\longrightarrow 2dx=dt$

$$=\int\frac{1}{(2x+3)^2+1}dx=\int\frac{1}{t^2+1}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

La integral obtenida, es una integral básica en función de 't':

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\arctan(t)=\arctan(2x+3)$$

La solución del ejercicio seria:

$$\int\frac{x+1}{2x^2+6x+5}dx=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+6x+5\right|-\frac{1}{2}\arctan(2x+3)+C$$

Se ha realizado un análisis de todas las posibles formas dependiendo del signo del discriminante. Ahora se analizara la integral de una función racional (homográfica) cuando el orden de los polinomios es mayor a dos.

9. Encuentre la integral :

$$I=\int\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}dx$$

En todo este tipo de ejercicios, cuando el orden de los polinomios es dos o mayor a dos se aplica el método de fracciones parciales.

Para encontrar las fracciones parciales, siempre se debe encontrar los factores del denominador:

$$\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}=\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^2(x-1)(x+1)}=\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}=$$

Para cada factor una fracción, como en el denominador son polinomios de primer orden, en el numerador va una constante:

$$=\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}$$

Se realiza la suma de fracciones del lado derecho:

$$\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2(x+1)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)}$$

Se simplifica sus denominadores:

$$3x^3-5x^2+8x=A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2(x+1)+D(x-1)^3$$

Se aplica el método de la relación de funciones, por lo tanto, se da valores a 'x':

Si x = 1:

$$3(1)^3-5(1)^2+8(1)=A(x+1)+B(1-1)(x+1)+C(1-1)^2(x+1)+D(1-1)^3$$

$$6=A(1+1)\longrightarrow A=3$$

Si x = -1:

$$3(-1)^3-5(-1)^2+8(-1)=A(-1+1)+B(-1-1)(-1+1)+C(1-1)^2(-1+1)+D(-1-1)^3$$

$$-16=D(-1-1)^3\longrightarrow -16=D(-2)^3\longrightarrow -16=D(-8)\longrightarrow D=2$$

Si x = 0:

$$3(0)^3-5(0)^2+8(0)=A(0+1)+B(0-1)(0+1)+C(0-1)^2(0+1)+D(0-1)^3$$

$$0=A(1)+B(-1)+C(1)^2(1)+D(-1)^3$$

$$0=3+B(-1)+C(1)+(-2)\longrightarrow 0=1+C-B\longrightarrow C-B=-1$$

Si x = 2:

$$3(2)^3-5(2)^2+8(2)=A(2+1)+B(2-1)(2+1)+C(2-1)^2(2+1)+D(2-1)^3$$

$$20=A(3)+B(3)+C(3)+D\longrightarrow 20=3(3)+B(3)+C(3)+2\longrightarrow$$

$$20=3(3)+B(3)+C(3)+2\longrightarrow 9=B(3)+C(3)\longrightarrow C+B=3$$

Se forma un sistema y se encuentra C, B:

$$\left\{\begin{array}{rcl} C+B & = & 3 \\ C-B & = & -1 \end{array}\right. \longrightarrow \text{C = 1; B = 2}$$

Se reemplaza:

$$\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}$$

$$\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}$$

Lo que se ha obtenido es una identidad; por lo tanto, se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}dx=\int\left[\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right]dx$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$\int\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}dx=3\int\frac{dx}{(x-1)^3}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x+1}dx$$

En la primera integral, cambio de variable: $x-1=t\longrightarrow dx=dt$

$$\int\frac{dx}{(x-1)^3}=\int\frac{dt}{(t)^3}=\int t^{-3}dt=\frac{t^{-2}}{-2}=\frac{1}{-2(x-1)^2}$$

En la segunda integral, cambio de variable: $x-1=t\longrightarrow dx=dt$

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\int\frac{dt}{(t)^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}=\frac{1}{-1(x-1)}$$

La tercera y la cuarta ya son integrales básicas; por lo tanto, la solución del ejercicio es:

$$I=\int\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}dx=\frac{-3}{2(x-1)^2}-\frac{2}{1(x-1)}+\ln(x-1)+2\ln(x+1)+C$$

10. Encuentre la integral :

$$I = \int \frac{4x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$$

En es este tipo de ejercicios, cuando el orden de los polinomios: es dos o mayor a dos, se aplica el método de fracciones parciales.

Para encontrar las fracciones parciales, siempre se debe encontrar los factores del denominador:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

Para cada factor una fracción, como en el denominador son polinomios de primer orden, en el numerador va un polinomio de un grado menor, en este caso, una constante:

$$\frac{4x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

Se realiza la suma de fracciones del lado derecho:

$$= \frac{A(x-1)(x^2-4) + B(x^2-4)(x+1) + C(x+2)(x^2-1) + D(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)}$$

Se simplifican los denominadores:

$$4x^3 + x^2 - 4x - 4 = A(x-1)(x^2-4) + B(x^2-4)(x+1) + C(x+2)(x^2-1) + D(x^2-1)(x-2)$$

Si x = 1:

$$-3 = B(1-4)(1+1) \longrightarrow -3 = B(-3)(2) \longrightarrow -3 = B(-6) \longrightarrow B = \frac{1}{2}$$

Si x = -1:

$$-3 = A(x-1)(x^2-4) \longrightarrow -3 = A(-2)(-3) \longrightarrow -3 = A(6) \longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Si x = 2:

$$4(2)^3 + (2)^2 - 4(2) - 4 = C(2+2)(4-1) \longrightarrow 24 = C(4)(3) \longrightarrow C = 2$$

Si x = -2:

$$4(-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2) - 4 = D(3)(-4) \longrightarrow -24 = D(-4)(3) \longrightarrow D = 2$$

Se reemplaza los valores obtenidos:

$$\frac{4x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$$

Lo que se ha obtenido es una identidad; por lo tanto, se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{4x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 5x^2 + 4} dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$\int \frac{4x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 5x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)} + 2 \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{dx}{x+2}$$

$$\int \frac{4x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 5x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + 2\ln|x+2|$$

$$\int \frac{4x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 5x^2 + x^2 - 2} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\ln\left|x^2 - 4\right| + C$$

11. Encuentre la integral :

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 1} dx$$

Se observa que, la función racional, es una fracción impropia; por lo tanto, se debe realizar la división.

$$\frac{x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 1} = x + 1 + \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1}$$

Es una identidad, se integra a ambos lodos de la identidad:

$$\int \frac{x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 1} dx = \int x dx + 1 \int dx + \int \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} dx$$

$$\int \frac{x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} dx$$

En la tercera integral, como el orden de los polinomios es mayor a dos, se aplica el método de fracciones parciales.

Para encontrar las fracciones parciales, siempre se debe encontrar los factores del denominador:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Para cada factor una fracción, como en el denominador son polinomios de primer orden, en el numerador va un polinomio de un grado menor, en ese caso, una constante. Si el denominador es de segundo orden, en el numerador sera un polinomio de primer orden:

$$\frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} = \frac{3x^3 + x^2 + x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Se realiza la suma de fracciones del lado derecho y se simplifica los denominadores:

$$3x^3 + x^2 + x - 1 = A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)(x + 1)$$

Si x = 1:

$$3(1)^3 + (1)^2 + 1 - 1 = A(1 + 1)(1 + 1) \longrightarrow 4 = A(4) \longrightarrow A = 1$$

Si x = -1:

$$3(-1)^3 + (-1)^2 - 1 - 1 = B(-1 - 1)(1 + 1) \longrightarrow -4 = B(-4) \longrightarrow B = 1$$

Si x = 0:

$$-1 = A + B(0 - 1)(0 + 1) + D(-1) \longrightarrow -1 = A - B - D \longrightarrow D = 1$$

Si x = 2:

$$3(2)^3 + (2)^2 + 2 - 1 = 15A + 5B + (C(2) + D)3 \longrightarrow -1 = A - B - D \longrightarrow D = 1$$

$$29 = 15A + 5B + (C(2) + D)3 \longrightarrow 29 = 20 + 6C + 3 \longrightarrow 29 - 23 = 6C \longrightarrow C = 1$$

$$\frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

$$\frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} dx = \int \left[\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}\right] dx$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$\int \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} dx = \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx$$

La primera y segunda integral son igual:

$$\int \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} dx = \ln|x-1| + \ln|x-1| + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx$$

Se calcula la tercera integral:

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

En la primera integral, se realiza un cambio de variable: $x^2 + 1 = t \longrightarrow 2xdx = dt$

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{dt}{2(t)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln\left|x^2+1\right|$$

La segunda integral es una integral básica; por lo tanto , la respuesta es:

$$\int \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} dx = \ln|x-1| + \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln\left|x^2+1\right| + \arctan(x)$$

$$\int \frac{x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|x^2-1\right| + \frac{1}{2} \ln\left|x^2+1\right| + \arctan(x) + C$$

Se ha realizado un análisis de todas las posibles formas que pueden aparecer de funciones racionales.

Ahora se analizara la forma de obtener las fórmulas de reducción, generales, de cierto tipo de integrales. Aquí se desarrolla un tipo de integral bastante común, en el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos.

12. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esta integral tiene exponente 'n', es una integral general.Por lo tanto, se debe encontrar una fórmula, que permite calcular la integral, para cualquier valor de 'n'. Su transformación siempre está basada en alguna propiedad , en este caso, de álgebra.

La integral que tiene exponente, se la puede definir como I_n. Se suma y se resta x^2:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx =$$

Se forma dos integrales:

$$= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx$$

La primera integral:

$$= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n (x^2+1)^{-1}} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

Como se puede observar, está última integral y la inicial, se diferencia solamente en el exponente. La integral inicial tiene un exponente 'n' y la última, un exponente 'n - 1', para facilidad de cálculo, se lo denomina I_{n-1}, es decir:

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} = I_{n-1}$$

Hasta el momento se tendría:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx$$

Se trabaja con la segunda integral:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx$$

En está forma no ayuda de mucho, se la transforma:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx = \int x\frac{x}{(x^2+1)^n}dx$$

A está última integral, se aplica el método de por partes:

$$g(x) = x \longrightarrow g'(x) = dx$$

$$f'(x) = \frac{xdx}{(x^2+1)^n} \longrightarrow \int f'(x)dx = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^n}$$

Se realiza un cambio de variable: $x^2+1 = t \longrightarrow 2xdx = dt$

$$\int f'(x)dx = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} \longrightarrow f(x) = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dt}{2(t)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t)^n}dt$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t)^n}dt = \frac{1}{2}\int t^{-n}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{-n+1}}{(-n+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(-n+1)t^{n-1}} = \frac{1}{2}\frac{-1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} =$$

En este momento, se puede aplicar ya la fórmula del método de por partes:

$$\int g(x)f'(x)dx = g(x)f(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{1}{2}\frac{-1dx}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1dx}{(x^2+1)^{n-1}} =$$

En la parte final de está integral, volvió aparecer la integral I_{n-1}; se puede escribir:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2}\frac{-x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} + \frac{1}{2}\frac{x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}$$

Se aplica asociativa y distributiva:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = I_{n-1}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{1}{2}\frac{x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = I_{n-1}\left(\frac{2n-3}{2(n-1)}\right) + \frac{1}{2}\frac{x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

Donde : $I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$

Esta es la fórmula de reducción para este tipo de integrales.

13. Encuentre la integral:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$$

En este caso n = 4; por lo tanto, I_4 se aplica la fórmula obtenida:

$$I_4 = \frac{5}{6}I_3 + \frac{1}{6}\frac{x}{(x^2+1)^3}$$

Ahora se obtiene I_3 aplicando la misma fórmula:

$$I_3 = \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Ahora se obtiene I_2 aplicando la misma fórmula:

$$I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^1}$$

La integral I_1 es igual:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)} = \arctan(x)$$

Se regresa en sentido contrario:

$$I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^1} \longrightarrow I_2 = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^1}$$

$$I_3 = \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow I_3 = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^1}\right] + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$I_4 = \frac{5}{6}I_3 + \frac{1}{6}\frac{x}{(x^2+1)^3}$$

$$I_4 = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^1}\right] + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}\right) + \frac{1}{6}\frac{x}{(x^2+1)^3} + C$$

14. Encuentre la integral:

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^2}$$

En este caso n = 2; por lo tanto, a I_2 se aplica la fórmula de reducción, pero antes se la debe transformar utilizando para ello, la forma canónica:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\right] = 1\left[\left(x+\frac{(-4)}{2\cdot 1}\right)^2 - \frac{(-36)}{4}\right] = \left[(x-2)^2+9\right] =$$

Se reemplaza:

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^2} = \int \frac{dx}{[(x-2)^2+9]^2}$$

Se aplica la distributiva:

$$= \int \frac{dx}{[(x-2)^2+9]^2} = \int \frac{dx}{\left[9\left[\frac{(x-2)^2}{9}+1\right]\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{9^2}\int \frac{dx}{\left[\left[\frac{(x-2)^2}{9}+1\right]\right]^2} = \frac{1}{9^2}\int \frac{dx}{\left[\left[\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right]\right]^2} =$$

Se realiza un cambio de variable: $\frac{x-2}{3} = t \longrightarrow x-2 = 3t \longrightarrow dx = 3dt$ Se reemplaza en la integral:

$$= \frac{1}{9^2}\int \frac{dx}{\left[\left[\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right]\right]^2} = \frac{1}{9^3}\int \frac{3dt}{[t^2+1]^2} = \frac{3}{9^3}\int \frac{dt}{[t^2+1]^2} =$$

Para este ejercicio, se tendría: n = 2, se aplica la fórmula de reducción:

$$I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)}$$

Se integra I_1

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t)$$

Se regresa en sentido contrario:

$$I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)} \longrightarrow I_2 = \frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(t^2+1)}$$

Se reemplaza la variable t:

$$I_2 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{\frac{x-2}{3}}{2\left(\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right)}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{9(x-2)}{2\cdot 3\left[((x-2)^2+9)\right]}$$

$$I_2 = \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{(x-2)}{2\left[((x-2)^2+9)\right]}$$

$$I_2 = \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{(x-2)}{2\left[x^2-4x+13\right)}$$

Finalmente la respuesta:

$$= \frac{1}{9^2}\int \frac{dx}{\left[\left[\frac{(x-2)^2}{9}+1\right]\right]^2} = \frac{1}{9^2}\left(\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{(x-2)}{2\left[x^2-4x+13\right)}\right) + C$$

15. Encuentre la integral:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2)^2}$$

En la integración de está integral, bueno es aplicar un pequeño truco y es algo que el estudiante debe tenerlo en mente. Se multiplica y divide para 'x', con lo cual, se obtiene:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2)^2} = \int \frac{xdx}{x^2(x^2+2)^2} =$$

Gracias, a lo cual, se procede a un cambio de variable: $x^2 = t \longrightarrow 2xdx = dt$

$$= \int \frac{xdx}{x^2(x^2+2)^2} = \int \frac{dt}{2t(t+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+2)^2} =$$

Este cambio de variable permite reducir el número de incógnitas, al momento de hallar las fracciones parciales:

$$\frac{1}{t(t+2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{C}{t+2} = \frac{A(t+2)^2 + Bt + Ct(t+2)}{t(t+2)^2}$$

Se simplifica los denominadores:

$$1 = A(t+2)^2 + Bt + Ct(t+2)$$

Si t = -2

$$1 = B(-2) \longrightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Si t = 0

$$1 = A(0+2)^2 + B(0) + C(0)(t+2) \longrightarrow 1 = A(2)^2 \longrightarrow A = \frac{1}{4}$$

Si t = -1

$$1 = A(-1+2)^2 + B(-1) + C(-1)(-1+2) \longrightarrow 1 = A - B - C \longrightarrow 1 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$1 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) - C$$

$$1 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right) - C \longrightarrow C = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

Se reemplaza los valores obtenidos:

$$\frac{1}{t(t+2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{C}{t+2} = \frac{\frac{1}{4}}{t} + \frac{-\frac{1}{2}}{(t+2)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{t+2}$$

$$\frac{1}{t(t+2)^2} = \frac{1}{4t} - \frac{1}{2(t+2)^2} - \frac{1}{4(t+2)}$$

Se integra, ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{1}{t(t+2)^2} dt = \int \frac{1}{4t} dt - \int \frac{1}{2(t+2)^2} dt - \int \frac{1}{4(t+2)} dt$$

Se aplica propiedades de integración:

$$\int \frac{1}{t(t+2)^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+2)^2} dt - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(t+2)} dt$$

La primera integral:

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{4} \ln|t|$$

La segunda integral:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+2)^2} dt$$

Cambio de variable: $t + 2 = m \longrightarrow dt = dm$ se reemplaza:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(m)^2} dm = \frac{1}{2} \int (m)^{-2} dm = \frac{1}{2} \frac{m^{-1}}{(-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m^{-1}}{(-1)} = \frac{1}{2} \frac{(-1)}{t} = -\frac{1}{2t}$$

La tercera integral:

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{(t+2)} dt = \frac{1}{4} \ln|t+2|$$

$$\int \frac{1}{t(t+2)^2} dt = \frac{1}{4} \ln|t| + \frac{1}{2t} - \frac{1}{4} \ln|t+2|$$

Finalmente:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2)^2} = \frac{1}{4} \ln\left|x^2\right| + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4} \ln\left|x^2+2\right| + C$$

2.1.2. Ejercicios Propuestos de Integrales de Funciones Racionales

Encuentre la integral de:

1. $\int (2x+1)^3 dx$
2. $\int \frac{3x-4}{x^2-x-6} dx$
3. $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5} dx$
4. $\int \frac{6x-13}{x^2-\frac{7}{2}x-\frac{3}{2}} dx$
5. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx$
6. $\int \frac{dx}{x^2+2x-1}$
7. $\int \frac{x+5}{x^2+10} dx$
8. $\int \frac{dx}{-5+6x-x^2}$
9. $\int \frac{dx}{2x-3x^2}$
10. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9} dx$
11. $\int \frac{2x-13}{(x-5)^2} dx$
12. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5} dx$
13. $\int \frac{dx}{13-6x+x^2} dx$
14. $\int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx$
15. $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+5} dx$
16. $\int \frac{2x-20}{x^2-8x+25} dx$
17. $\int \frac{x^4+1}{x^5-5x-8} dx$
18. $\int \frac{x^3}{9-4x^2} dx$
19. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6} dx$
20. $\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^2} dx$

1. $\int \frac{dx}{(3x-2)^4} dx$
2. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x-3} dx$
3. $\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1} dx$
4. $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3} dx$
5. $\int \frac{\frac{5}{6}x-16}{x^2+3x-18} dx$
6. $\int \frac{7x}{5x^2+4} dx$
7. $\int \frac{dx}{1+x-x^2} dx$
8. $\int \frac{3x+2}{x^2-x-2} dx$
9. $\int \frac{dx}{6x^2-13x+6} dx$
10. $\int \frac{x-1}{4x^2-4x+1} dx$
11. $\int \frac{3x+1}{(x+2)^2} dx$
12. $\int \frac{dx}{3x^2+2x+1}$
13. $\int \frac{3dx}{9x^2-6x+2}$
14. $\int \frac{4x-1}{2x^2-2x+1} dx$
15. $\int \frac{2x-10}{x^2-2x+10} dx$
16. $\int \frac{3x+4}{x^2+4x+8} dx$
17. $\int \frac{4x}{x^2-5x+4} dx$
18. $\int \frac{2x-10}{2x^2-4x+5} dx$
19. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} dx$
20. $\int \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx$

Encuentre las integrales de:

1. $\int \frac{x+6}{x^2-3}dx$
2. $\int \frac{6x}{x^2+4x+13}dx$
3. $\int \frac{4x-5}{x^2-6x+10}dx$
4. $\int \frac{x^2}{5x^2+12}dx$
5. $\int \frac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}dx$
6. $\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx$
7. $\int \frac{x^3+2x-6}{x^2-x-2}dx$
8. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$
9. $\int \frac{x^2+5x+41}{(x+3)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}dx$
10. $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$
11. $\int \frac{4x^3-2x^2-6x-13}{x^4+3x^2-4}dx$
12. $\int \frac{6x^3+4x+1}{x^4+x^2}dx$
13. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}dx$
14. $\int \frac{5x^3+3x^2+12x-12}{x^4-16}dx$
15. $\int \frac{4x^3+9x^2+4x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}dx$
16. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}dx$
17. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+8)^3}dx$
18. $\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx$
19. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$

1. $\int \frac{x+6}{x^2+3}dx$
2. $\int \frac{10x-44}{x^2-4x+20}dx$
3. $\int \frac{5x}{3x+2}dx$
4. $\int \frac{2x^2+7x+20}{x^2+6x+25}dx$
5. $\int \frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^4}dx$
6. $\int \frac{2x+1}{(x^2+1)}dx$
7. $\int \frac{17x^2-x-26}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$
8. $\int \frac{2x^33-19x^2+58x-42}{x^2-8x+16}dx$
9. $\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx$
10. $\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}dx$
11. $\int \frac{dx}{x^3-a^2x}dx$
12. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}dx$
13. $\int \frac{15x^2+66x+21}{(x-1)(x^2+4x)+29)}dx$
14. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2(x+1)}dx$
15. $\int \frac{3x^2-17x+21}{(x-2)^3}dx$
16. $\int \frac{5x^3-11x^2+5x+4}{(x-1)^4}dx$
17. $\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$
18. $\int \frac{x^2-2x+3}{(x^2+4)}dx$
19. $\int \frac{x^2}{(x^2+3)}dx$

Capítulo 3

Integrales Indefinidas de Funciones Irracionales

1. Elementos Básicos de una Función Irracional Lineal
   1.1 Ejercicios Resueltos de Integrales Irracionales Lineales
   1.2 Ejercicios Propuestos de Integrales Irracionales Lineales
2. Elementos Básicos de una Función Irracional No-Lineal
   2.1 Ejercicios Resueltos de Integrales Irracionales No-Lineales
   2.2 Ejercicios Propuestos de Integrales Irracionales No-Lineales

3.1. Elementos Básicos de una Integral Indefinida de Funciones Irracionales Lineales

Si la función a integrar es una función irracional con respecto a ' x ', pero la variable tiene exponente 1; es decir, es lineal y la expresión algebraica del radical es de exponente en la forma $\frac{m}{n}$, donde m, n son números naturales, en este caso se realiza un cambio de variable:

$$x = t^N$$

Donde N, es el mínimo común múltiplo de los quebrados de la forma $\frac{m}{n}$

Si la función a integrar es una función irracional con respecto a ' x ', paro la variable tiene exponente 1; es decir, es lineal y la expresión algebraica en el interior del radical de potencia de un binomio $ax+b$ o de una función homográfica de la forma:

$$\frac{ax+b}{cx+d} \qquad ad-bc \neq 0$$

De exponentes en la forma $\frac{m}{n}$ donde m, n son números naturales, en el primer caso se realiza un cambio de variable:

$$ax+b = t^N$$

Y en el segundo caso:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$$

Donde N, es el mínimo común de los quebrados en la forma $\frac{m}{n}$.

3.1.1. Ejercicios Resueltos de Integrales de Funciones Irracionales Lineales

1. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

Primero, se considera que, $x > 0$ como dominio de la variable 'x' en el ejercicio. La función a integrar es una función irracional de variables: $x^{\frac{1}{2}}; x^{\frac{1}{3}}$ Para encontrar N, será el mínimo común múltiplo de estos quebrados: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, que en este caso, es 6; por lo tanto, N tendrá el valor de 6; es decir:

$$x = t^N \longrightarrow x = t^6$$

se obtiene su derivada y reemplazar lo componentes que tengan 'x'; es decir:

$$x = t^6 \longrightarrow dx = 6t^5dt$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^{\frac{6}{2}} = t^3$$

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^{\frac{6}{3}} = t^2$$

Se reemplaza en la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^3dt}{(t+1)} =$$

Se ha obtenido una función racional impropia, se realiza la división y se aplica el teorema de Euclides.

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

Se reemplaza en la integral:

$$= 6\int \frac{t^3dt}{(t+1)} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left[\int t^2 dt - \int t dt - \int dt - \int \frac{1}{t+1}dt\right]$$

Son integrales básicas, se integra:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t - \ln\|t+1\right]$$

Se regresa a la variable 'x':

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\left[\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{(\sqrt[3]{x})^2}{2} - \sqrt[6]{x} - \ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right] + C$$

2. Encuentre la integral :

$$\int \sqrt[4]{3x-7}dx$$

Primero, se considera que, $x > \frac{7}{3}$ como dominio de la variable 'x' en el ejercicio. La función a integrar es una función irracional de variables: $x^{\frac{1}{4}}$; Para encontrar N, , que en este caso, es 4; por lo tanto, N tendrá el valor de 4; es decir:

$$3x - 7 = t^4 \qquad t \geq 0$$

Se deriva:

$$3x - 7 = t^4 \longrightarrow 3dx = 4t^3 dt$$

Se reemplaza:

$$\int \sqrt[4]{3x-7}dx = \frac{4}{3}\int t \cdot t^3 dt = \frac{4}{3}\int t^4 dt = \frac{4}{15}t^5 = \frac{4}{15}t^5 \frac{4}{15}(3x-7)^{\frac{5}{4}} + C$$

3. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$$

Primero, se considera que, $x < \frac{4}{5}$ como dominio de la variable 'x' en el ejercicio. La función a integrar es una función irracional de variables: $x^{\frac{1}{3}}$; Para encontrar N, , que en este caso, es 3; por lo tanto, N tendrá el valor de 3; es decir:

$$4 - 5x = t^3$$

Se deriva:

$$4 - 5x = t^3 \longrightarrow -5dx = 3t^2 dt \longrightarrow dx = -\frac{3}{5}t^2 dt$$

Se reemplaza:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}} = \int \frac{-\frac{3}{5}t^2 dt}{t} = -\frac{3}{5}\int t dt =$$

Se integra:

$$= -\frac{3}{5}\int t dt = -\frac{3}{5}\frac{t^2}{2} = -\frac{3}{10}(4-5x)^{\frac{2}{3}} + C$$

4. Encuentre la integral :

$$\int x\sqrt{2x-10}dx$$

Primero, se considera que, $x > 5$ como dominio de la variable 'x' en el ejercicio. La función a integrar es una función irracional de variables: $x^{\frac{1}{2}}$; Para encontrar N, , que en este caso, es 2; por lo tanto, N tendrá el valor de 2; es decir:

$$2x - 10 = t^2 \longrightarrow 2dx = 2tdt \longrightarrow dx = tdt$$

Se requiere además, la relación para 'x', se la obtiene de: $2x - 10 = t^2 \longrightarrow x = \dfrac{t^2+10}{2}$. Se reemplaza en la integral:

$$\int x\sqrt{2x-10}dx = \int \left(\frac{t^2+10}{2}\right) t \cdot tdt = \frac{1}{2}\int \left(t^2+10\right) t \cdot tdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(t^2+10\right) t \cdot tdt = \frac{1}{2}\int \left(t^4+10t^2\right) dt$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$= \frac{1}{2}\int \left(t^4+10t^2\right) dt = \frac{1}{2}\left[\int t^4dt + \int 10t^2dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5} + 10\frac{t^3}{3}\right]$$

$$\int x\sqrt{2x-10}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{5} + 10\frac{t^2}{3}\right]t = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x-10)^2}{5} + 10\frac{2x-10}{3}\right]\sqrt{2x-10} + C$$

5. Encuentre la integral :

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$$

Primero, se considera que, $x \neq 1yx \neq -1$ como dominio de la variable 'x' en el ejercicio. La función a integrar es una función irracional de variables: $x^{\frac{1}{3}}$; Para encontrar N, , que en este caso, es 3; por lo tanto, N tendrá el valor de 3; es decir:

$$\frac{x+1}{x-1} = t^3 \longrightarrow x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \longrightarrow dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}$$

Se debe obtener la relación para (x + 1), se parte de:

$$x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \longrightarrow x+1 = \frac{t^3+1}{t^3-1} + 1 = \frac{2t^3}{t^3-1}$$

Se reemplaza en la integral:

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1} = \int t\frac{-6dt(t^3-1)}{(t^3-1)^2 2t^3} = -3\int \frac{dt(t^3-1)}{(t^3-1)^2} = -3\int \frac{dt}{(t^3-1)}$$

Se ha obtenido una función racional propia. Se encuentra sus fracciones parciales:

$$\frac{1}{t^3-1} = \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

Se realiza la suma de fracciones del lado derecho:

$$1 = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1)$$

Si t = 1

$$1 = A(1+1+1) \longrightarrow A = \frac{1}{3}$$

Si t = 0

$$1 = A(0+0+1) + (B(0)+C)(0-1) \longrightarrow 1 = A - C \longrightarrow C = -\frac{2}{3}$$

Si t = -1

$$1 = A(1-1+1) + +(B(-1)+C)(-1-1) \longrightarrow 1 = A + (-B+C)(-2)$$

$$1 = A + (-B+C)(-2) \longrightarrow 1 - \frac{1}{3} = 2B - 2C$$

$$\frac{2}{3} = 2B - 2(-\frac{2}{3}) \longrightarrow \frac{2}{3} = 2B + (\frac{4}{3})$$

$$\frac{2}{3} = 2B + (\frac{4}{3}) \longrightarrow -\frac{2}{3} = 2B \longrightarrow B = -\frac{1}{3}$$

Se reemplaza:

$$-3\left(\frac{1}{t^3-1}\right) = -3\left[\frac{\frac{1}{3}}{t-1} + \frac{\frac{-1}{3}t + (-\frac{2}{3})}{t^2+t+1} = \right]$$

$$-3\left(\frac{1}{t^3-1}\right) = \left[\frac{-1}{t-1} + \frac{t+1}{t^2+t+1} = \right]$$

Se integra:

$$-3\int\left(\frac{dt}{t^3-1}\right) = \left[\frac{-1}{t-1}\right]dt + \left[\frac{t+1}{t^2-t+1} = \right]dt =$$

$$= -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \sqrt{3}\arctan(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}) + C$$

6. Encuentre la función primitiva :

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$$

La presencia de x al lado del diferencial permite intuir que, se debe aplicar un cambio de variable $x^2 = t$, su derivada $2xdx = dt$, con lo cual, se obtiene:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx = \int \frac{dt}{2\sqrt[3]{t-1}}dt =$$

Se ha obtenido une integral irracional lineal, se vuelve aplicar un nuevo cambio de variable: $\sqrt[3]{t-1} = k$ al derivar y reemplazar se obtiene:

$$= \int \frac{dt}{2\sqrt[3]{t-1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3kdk}{k}dk =$$

Al simplificar:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{3kdk}{k}dk = \frac{3}{2}\int dk$$

Finalmente, al integrar y regresar a la variable x, se obtiene:

$$= \frac{3}{2}\int dk = \frac{3}{2}k^2 + C = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{t-1}\right)^2 + C = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2 + C$$

3.1.2. Ejercicios Propuestos de Integrales de Funciones Irracionales Lineales

1. $\int \sqrt{2x+1}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-4}}dx$
3. $\int x\sqrt[3]{x-4}dx$
4. $\int x\sqrt{3x+2}dx$
5. $\int x\sqrt[2]{x-2}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x+2}}$
7. $\int x\sqrt[4]{2x+3}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x-a}}$
9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{x}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}}$
11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x+\sqrt[6]{x^5}}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-7}}$
13. $\int x^2\sqrt[3]{7-2x}dx$
14. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\frac{dx}{(x-1)^2}$
15. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$
16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(2x+1)^3}}$
3. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{3x-1}dx$
4. $\displaystyle\int x\sqrt{1-5x}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{2x+3}}$
6. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}}$
8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$
9. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$
10. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}}dx$
12. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\frac{dx}{x}dx$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{x}$
16. $\int \sqrt{2x-1}dx$

3.2. Elementos Básicos de una Integral Indefinida de Funciones Irracionales No-Lineales

Las funciones irracionales no-lineales son todas aquellas funciones, en las cuales, la variable ’ x ’, en este caso, contiene en su interior del radical polinomios de segundo o de más orden. La raíz del radical también puede ser de orden superior. Además , una información de como integrar, este tipo de integrales, nos indica el signo de la variable ’ x ’. Las integrales básicas de las funciones irracionales, son todas aquellas a las cuales, se las puede convertir, son:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

La diferencia entre estás dos integrales básicas, de funciones irracionales, es el signo de la variable:

1. Si el signo es positivo, se integra a una función logarítmica.
2. Si el signo es negativo, se integra a una función ciclo métrica, el arco seno de x.

La segunda integral es una integral básica, definida:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

La primera integral, con la condición de que: $x^2 + k \geq 0$ se la transforma a una integral racional, conocida, como la primera transformación de Euler, para lo cual, se realiza un cambio de variable:

$$x + \sqrt{x^2+k} = t$$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{x^2+k} = t - x$$

Se eleva al cuadrado ambos lados de la identidad:

$$(\sqrt{x^2+k})^2 = (t-x)^2$$

$$x^2 + k = t^2 - 2tx + x^2$$

Se despeja 'x' y se la deriva:

$$k = t^2 - 2tx \longrightarrow x = \frac{t^2-k}{2t} \longrightarrow dx = \frac{2t(2t)-(t^2-k)2}{4t^2} = \frac{4t^2-2t^2+2k}{4t^2} =$$

$$= \frac{2t^2+2k}{4t^2} = \frac{t^2+k}{2t^2}dt$$

Se reemplaza en la identidad:

$$\sqrt{x^2+k} = t - x \longrightarrow \sqrt{x^2+k} = t - \frac{t^2-k}{2t} = \frac{t^2+k}{2t}$$

Estos elementos obtenidos , se reemplaza en la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int \frac{\frac{t^2+k}{2t^2}}{\frac{t^2+k}{2t}}dt = \int \frac{2t}{2t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

Si, se desea integra :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}}$$

Se aplica la forma canónica a cada trinomio, más un cambio de variable y se vuelve a lo analizado.
En el caso de tener la integral:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}}$$

Una de las integrales básicas que nos puede ayudar en esto:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

Esta integral básica se la puede escribir de la siguiente forma:

$$\int \frac{(x)'dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

si a está integral, se la generaliza, se obtiene:

$$\int \frac{(x)'dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \longrightarrow \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C =$$

En el caso de que se desee integrar:

$$\int \sqrt{x^2+k}dx; \qquad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}}$$

La variable tiene el signo positivo y en el caso de :

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx; \qquad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

La variable tiene el signo negativo. Estas integrales llevan el nombre de integrales compañeras, ya que, cuando se desea integrar una de ellas, aparece en forma obligatoria la otra.

Existen tres métodos para integrar las integrales compañeras:

1. Método algebraico
2. Método de los coeficientes indeterminados, también conocido como el método Ostrogawski
3. Método trigonométrico

Se analiza cada uno de estos métodos, en la siguiente sección.

3.2.1. Ejercicios Resueltos de Funciones Irracionales No-Lineales

1. Encuentre la integral:

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx$$

Lo primero que se debe observar es $x^2+5x-10>0$ Se encuentra la derivada:

$$(x^2+5x-10)' = 2x+5$$

De divide el denominador para la derivada del trinomio del radical y se aplica el teorema de Euclides:

$$3x+1 = \frac{3}{2}(2x+5) - \frac{13}{2}$$

Se reemplaza en la integral :

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}(2x+5)-\frac{13}{2}\right)}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx =$$

Se obtiene dos integrales:

$$\int \frac{\left(\frac{3}{2}(2x+5)-\frac{13}{2}\right)}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx = \int \frac{3}{2}\frac{(2x+5)}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx - \int \frac{13}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx =$$

En la primera integral, como se observa, en el denominador se tiene la derivada del trinomio del radical, se puede escribir la fórmula obtenida anteriormente:

$$\int \frac{3}{2}\frac{(2x+5)}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+5)}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx = \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+5x-10}$$

La segunda integral, se analizo al inicio del capitulo, pero se debe transformar a su forma canónica:

$$x^2+5x-10 = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\right] = 1\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{65}{5}\right]$$

Se reemplaza en la segunda integral:

$$\int \frac{13}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx = \frac{13}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx = \frac{13}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{65}{4}\right]}}dx =$$

Se realiza un cambio de variable:$(x+\dfrac{5}{2})=t\longrightarrow dx=dt$

$$=\frac{13}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{65}{4}\right]}}dx=\frac{13}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\left[(t)^2-\frac{65}{4}\right]}}dt$$

La variable t es positiva; por lo tanto:

$$=\frac{13}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\left[(t)^2-\frac{65}{4}\right]}}dt=\frac{13}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{65}{4}}\right|$$

Se lo puede escribir:

$$=\frac{13}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{65}{4}}\right|=\frac{13}{2}\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-10}\right|$$

La respuesta es:

$$\int\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+5x-10}}dx=\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{x^2+5x-10}+\frac{13}{2}\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-10}\right|+C$$

2. Encuentre la integral:

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx$$

Lo primero que se debe observar es $-\dfrac{2}{3}<x<1$ Se encuentra la derivada:

$$(2+x-3x^2)'=1-6x$$

De divide el denominador para la derivada del trinomio del radical y se aplica el teorema de Euclides:

$$2x+1=-\frac{1}{3}(1-6x)+\frac{4}{3}$$

Se reemplaza en la integral:

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx=\int\frac{-\frac{1}{3}(1-6x)+\frac{4}{3}}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx=$$

Se obtiene dos integrales:

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx=\int\frac{-\frac{1}{3}(1-6x)}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx+\int\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx=$$

La primera integral:

$$\int\frac{-\frac{1}{3}(1-6x)}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{(1-6x)}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx$$

Se observa que en el denominar, está la derivada del trinomio del radical; por lo tanto:

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{(1-6x)}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx=-\frac{1}{3}\cdot2\cdot\sqrt{(2+x-3x^2)}$$

La segunda integral, se analizo al inicio del capitulo, pero se debe transformar a su forma canónica:

$$2+x-3x^2=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\triangle}{4a^2}\right]=-3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]=3\left[\frac{25}{36}-\left(x-\frac{1}{6}\right)^2\right]$$

Se reemplaza en la segunda integral:

$$\int \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\sqrt{3\left[\frac{25}{36}-\left(x-\frac{1}{6}\right)^2\right]}}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\sqrt{3\left[\frac{25}{36}-\left(x-\frac{1}{6}\right)^2\right]}}dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{25}{36}-\left(x-\frac{1}{6}\right)^2\right]}}dx$$

Cambio de variable: $x-\frac{1}{6}=t \longrightarrow dx = dt$ se reemplaza:

$$-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{25}{36}-(t)^2\right]}}dt$$

En la integral se requiere que en vez de $\frac{25}{36}$ se encuentre 1; por lo tanto, se aplica distributiva:

$$\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{25}{36}-(t)^2\right]}}dt = -\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{t}{\frac{5}{6}}\right)^2\right]}}dt =$$

Un nuevo cambio de variable: $t=\frac{5}{6}k \longrightarrow dt = \frac{5}{6}dk$ Se reemplaza en la integral:

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[1-(k)^2\right]}}\frac{5}{6}dk =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[1-(k)^2\right]}}dk = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(k) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{6x-1}{5}\right)$$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{2+x-3x^2}}dx = -\frac{2}{3}\cdot(2+x-3x^2)+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{6x-1}{5}\right)+C$$

Se ha realizado un análisis para integrar funciones irracionales no-lineales, que tengan el radical en el denominador de la funciona a integrar.

Ahora se hará un análisis para integrar funciones irracionales no-lineales, pero con el radical en el numerador de la funciona a integrar; las mas comunes son:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx; \qquad \int \sqrt{c+bx-ax^2}dx$$

Como se puede observar, la diferencia entre una y otra, es el signo de la variable o también, se podría indicar; es si, la función tiene un máximo o un mínimo, para integrar este tipo de funciones se dispone de tres métodos:

1. **Método Algebraico:** El método se lo explica con el ejercicio, Se ha definido a las integrales como I_1, I_2 por facilidad de presentación del método:

   a) Encuentre la integral:

$$I_1 = \int \sqrt{a^2-x^2}dx \qquad I_2 = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

A la integral I_1 se la multiplica y divide para $\sqrt{a^2-x^2}$ se ha utilizado una propiedad de álgebra:

$$I_1 = \int \sqrt{a^2-x^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

Se separa en dos integrales:

$$I_1 = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

se trabaja con la primera integral:

$$\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} =$$

$$= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} dx = a \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} =$$

Cambio de variable: $\frac{x}{a} = t \longrightarrow x = at \longrightarrow dx = adt$

$$= a \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} = a \int \frac{adt}{\sqrt{(1-(t)^2)}} = a^2 \arcsin(t)$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a^2 \arcsin(t) = a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

Con este resultado, se puede escribir una ecuación:

$$I_1 = a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - I_2$$

Como se obtuvo una ecuación con dos incógnitas I_1, I_2 se necesita dos ecuaciones, para obtener la segunda ecuación, se aplica el método de por partes a la I_1 :

$$I_1 = \int \sqrt{a^2-x^2} dx =$$

$$g(x) = \sqrt{a^2-x^2} \qquad f'(x) = dx$$

$$g'(x) = \frac{-2xdx}{2\sqrt{a^2-x^2}} dx \qquad \int f'(x)dx = \int dx$$

$$f(x) = x$$

Se aplica el método de por partes:

$$I_1 = \int \sqrt{a^2-x^2} dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$I_1 = \int \sqrt{a^2-x^2} dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Por lo tanto, se puede escribir la ecuación:

$$I_1 = x\sqrt{a^2-x^2} + I_2$$

Se ha obtenido dos ecuaciones, se forma el sistema, donde las incógnitas son I_1, I_2

$$\begin{cases} I_1 &= x\sqrt{a^2-x^2} &+ I_2 \\ I_1 &= a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) &- I_2 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema:

$$2I_1 = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

Finalmente:

$$I_1 = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Lo bueno de este método es que da una información adicional sobre la integral I_2 ya que al resolver el sistema:

$$2I_2 = a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - x\sqrt{a^2-x^2}$$

Finalmente:

$$I_2 = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

b) Encuentre la integral:

$$I_1 = \int \sqrt{x^2+k}dx \qquad\qquad I_2 = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}}$$

A la integral I_1 se la multiplica y divide para $\sqrt{x^2+k}$ se ha utilizado una propiedad de álgebra:

$$I_1 = \int \sqrt{x^2+k}\cdot\frac{\sqrt{x^2+k}}{\sqrt{x^2+k}}dx = \int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}dx$$

Se separa en dos integrales:

$$I_1 = \int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}dx + \int \frac{k}{\sqrt{x^2+k}}dx$$

La segunda integral es igual a:

$$\int \frac{k}{\sqrt{x^2+k}}dx = k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|$$

Con este resultado, se puede escribir una ecuación:

$$I_1 = I_2 + k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|$$

Como se obtuvo una ecuación con dos incógnitas I_1, I_2 se necesita dos ecuaciones, para obtener la segunda ecuación, se aplica el método de por partes a la I_1 :

$$I_1 = \int \sqrt{x^2+k}dx =$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+k} \qquad\qquad f'(x) = dx$$

$$g'(x) = \frac{2xdx}{2\sqrt{x^2+k}}dx \qquad\qquad \int f'(x)dx = \int dx$$

$$f(x) = x$$

Se aplica el método:

$$I_1 = \int \sqrt{x^2+k}dx = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}}$$

Por lo tanto, se puede escribir la ecuación:

$$I_1 = x\sqrt{x^2+k} - I_2$$

Se ha obtenido dos ecuaciones, se forma el sistema, donde las incógnitas son I_1, I_2

$$\begin{cases} I_1 &= & x\sqrt{x^2+k} & - & I_2 \\ I_1 &= & k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| & + & I_2 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema:

$$2I_1 = x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|$$

Finalmente:

$$I_1 = \frac{x}{2}x\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

Lo bueno de este método es que da una información adicional sobre la integral I_2, ya que al resolver el sistema con respecto a I_2:

$$2I_2 = x\sqrt{x^2+k} - \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|$$

Finalmente:

$$I_2 = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} - \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

2. **Método Ostrogawski:** El método Ostrogawski, es un método mas general que los otros, ya que su estructura es:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

En el numerador es un polinomio de cualquier orden $P_n(x)$ y en el denominador está el radical con el trinomio. Este método también es conocido como el método de los coeficientes indeterminados. El método es:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Donde P_{n-1} es un polinomio de un grado menor. A es una constante. Los coeficientes del polinomio P_{n-1} y la constante A, se la calcula al realizar la derivada de está igualdad e igualar:

$$\left[\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]' = \left[P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]'$$

Se aplica propiedades de derivadas y la definición de integrales:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right]' + \left[A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]'$$

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right]' + A\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Se realizar la derivada del producto del primer termino del lado derecho de la igualdad:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + P_{n-1}(x)\cdot\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'\right] + A\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + P_{n-1}(x)\cdot\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right] + A\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[\left[\frac{2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]\right] + A\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Se realiza la suma de quebrados a ambos lados de la identidad:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[\frac{2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2A}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]$$

Se simplifica los denominadores:

$$2P_n(x) = \left[2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2A\right]$$

Se igualan los coeficientes del lado izquierdo con los coeficientes del lado derecho de la identidad, de la variable del mismo orden (grado). Se obtiene los valores de los coeficiente del Polinomio P_{n-1} y de la constante A, se reemplaza en la primera identidad y se ha integrado.

3. **Método Trigonométrico:** Este método el estudiante debe analizarlo después de haber estudiado el capitulo cuarto.

   El método consiste en los siguientes pasos:

   a) Se forma un triangulo rectángulo, del radical del ejercicio, se establece los catetos del triangulo rectángulo.

   b) Una vez establecido los catetos del triangulo rectángulo, en función del polinomio que se encuentre en el radical de la integral. Se escribe todas las funciones trigonométricas en función de ese triangulo. De estás funciones trigonométricas, siempre se escoge la función mas fácil; de la cual, se despeja y deriva ' x '.

   c) Con los elementos del punto b), se reemplaza en la integral.

   d) Además, de las funciones trigonométricas obtenidas, se debe tener en cuenta, la posibilidad de aplicar las identidades trigonométricas; y por lo tanto, mientras más, el estudiante domine estás identidades, mas fácil será integrar cualquier tipo de integral irracional.

   e) El estudiante debe tener en mente las integrales trigonométricas, que verán en el siguiente capitulo.

1. Encuentre la integral de :

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$$

Lo primero que se debe observar es que $-3 \leq x \leq 1$ además, que la variable x es negativa, en consecuencia, al integrar en la solución del ejercicio debe aparecer la función $\arcsin(x)$.

Se debe transformar a su forma canónica, el trinomio del radical:

$$3-2x-x^2 = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\right] = -1\left[\left(x+\frac{2}{2}\right)^2 - \frac{16}{4}\right]$$

$$3-2x-x^2 = \frac{16}{4} - (x+1)^2 = 4-(x+1)^2$$

Se reemplaza:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}dx$$

Se realiza un cambio de variable: $x+1 = t \longrightarrow dx = dt$; $\qquad -2 \leq t \leq 2$

$$\int \sqrt{4-(x+1)^2}dx = \int \sqrt{4-(t)^2}dt = \int \sqrt{4\left(1-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)}dt$$

Cambio de variable: $\dfrac{t}{2} = k \longrightarrow t = 2k \longrightarrow dt = 2dk$

$$2\int \sqrt{\left(1-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)}dt = 2\int \sqrt{\left(1-(k)^2\right)}2dk = 4\int \sqrt{\left(1-(k)^2\right)}dk =$$

Ahora ya transformada , es más fácil su integración: Se multiplica y se divide para $\sqrt{\left(1-(k)^2\right)}$, se la denomina I_1

$$I_1 = \int \sqrt{\left(1-(k)^2\right)}dk = \int \sqrt{\left(1-(k)^2\right)}\frac{\sqrt{\left(1-(k)^2\right)}}{\sqrt{\left(1-(k)^2\right)}}dk = \int \frac{1-k^2}{\sqrt{1-k^2}}dk$$

Se separa en dos integrales:

$$= \int \frac{1-k^2}{\sqrt{1-k^2}}dk = \int \frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} - \frac{k^2dk}{\sqrt{1-k^2}}$$

La primera integral:

$$\int \frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} = \arcsin(k) = \arcsin\left(\frac{t}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) =$$

Se puede escribir, como una ecuación:

$$I_1 = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) - I_2$$

Se aplica el método por partes:

$$I_1 = \int \sqrt{\left(1-(k)^2\right)}dk =$$

$$g(x) = \sqrt{1-k^2} \qquad f'(x) = dk$$

$$g'(x) = -\frac{2kdk}{2\sqrt{1-k^2}} \qquad \int f'(x)dx = \int dk$$

$$f(x) = k$$

Se aplica el método de por partes:

$$I_1 = \int \sqrt{1-k^2}dk = k\sqrt{1-k^2} - \int \frac{-k^2dk}{\sqrt{1-k^2}}$$

Por lo tanto, se puede escribir la ecuación:

$$I_1 = k\sqrt{1-k^2} + I_2$$

Se ha obtenido dos ecuaciones, se forma el sistema, donde las incógnitas son I_1, I_2

$$\begin{cases} I_1 &= k\sqrt{1-k^2} &+ I_2 \\ I_1 &= \arcsin(k) &- I_2 \end{cases}$$

$$2I_1 = k\sqrt{1-k^2} + \arcsin(k)$$

$$I_1 = \frac{k}{2}\sqrt{1-k^2} + \frac{1}{2}\arcsin(k)$$

$$I_1 = \int \sqrt{\left(1-(k)^2\right)}dk = \frac{k}{2}\sqrt{1-k^2} + \frac{1}{2}\arcsin(k)$$

Se regresa a la variable 'x':

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dk = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

2. Encuentre la integral de :

$$\int \sqrt{x^2-2x+5}dx$$

Lo primero que se debe observar es que, la función en el radical es siempre positiva

Se debe transformar a su forma canónica, el trinomio del radical:

$$x^2-2x+5 = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\right] = 1\left[\left(x+\frac{-2}{2}\right)^2 - \frac{-16}{4}\right]$$

$$x^2-2x+5 = (x-1)^2+4$$

Se reemplaza:

$$\int \sqrt{x^2-2x+5}dx = \int \sqrt{(x-1)^2+4}dx$$

Se realiza un cambio de variable: $x-1=t \longrightarrow dx=dt$;

$$\int \sqrt{(x-1)^2+4}dx = \int \sqrt{(t)^2+4}dt =$$

Ahora ya transformada , es más fácil su integración: Se multiplica y se divide para $\sqrt{\left((t)^2+4\right)}$, se la denomina I_1

$$I_1 = \int \sqrt{\left((t)^2+4\right)}dt = \int \sqrt{\left((t)^2+4\right)}\frac{\sqrt{\left((t)^2+4\right)}}{\sqrt{\left((t)^2+4\right)}}dt = \int \frac{t^2+4}{\sqrt{t^2+4}}dt$$

Se separa en dos integrales:

$$= \int \frac{t^2+4}{\sqrt{t^2+4}}dt = \int \frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+4}} + \int \frac{4dt}{\sqrt{t^2+4}}$$

$$= \int \frac{t^2+4}{\sqrt{t^2+4}}dt = \int \frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+4}} + \int \frac{4dt}{\sqrt{t^2+4}}$$

La segunda integral es :

$$4\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = 4\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|$$

Se puede escribir, como una ecuación:

$$I_1 = I_2 + 4\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|$$

Se aplica el método por partes:

$$I_1 = \int \sqrt{\left((t)^2+4\right)}dt =$$

$$g(x) = \sqrt{t^2+4} \qquad f'(x) = dt$$

$$g'(x) = \frac{2tdt}{2\sqrt{t^2+4}} \qquad \int f'(x)dx = \int dt$$

$$f(x) = t$$

Se aplica el método de por partes:

$$I_1 = \int \sqrt{t^2+4}dt = t\sqrt{t^2+4} - \int \frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+4}}$$

Por lo tanto, se puede escribir la ecuación:

$$I_1 = t\sqrt{t^2+4} - I_2$$

Se ha obtenido dos ecuaciones, se forma el sistema, donde las incógnitas son I_1, I_2

$$\begin{cases} I_1 &= & t\sqrt{t^2+4} & - & I_2 \\ I_1 &= & 4\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| & - & I_2 \end{cases}$$

$$2I_1 = t\sqrt{t^2+4} + 4\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|$$

$$I_1 = \frac{t}{2}\sqrt{t^2+4} + 2\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2-2x+5}dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+5} + 2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}+5\right| + C$$

3. Encuentre la integral de :
$$\int \frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$$
Como se observa, en el numerador hay un polinomio de tercer orden; por lo tanto, lo mejor es aplicar el método de Ostrogawski, el cual, indica:
$$\int \frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x+3}+A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$$
Donde a,b,c, y A son coeficientes que se debe encontrar, para lo cual, se deriva ambos lados de la identidad:
$$\left[\int \frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx\right]'=\left[(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x+3}+A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx\right]'$$
Se aplica propiedades de derivadas:
$$\frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}=\left[(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x+3}\right]'+A\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$
Ahora la propiedad del producto de derivada, se trabaja con el lado derecho de la identidad:
$$=(2ax+bx)\sqrt{x^2-4x+3}+(ax^2+bx+c)\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}+A\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=(2ax+bx)\sqrt{x^2-4x+3}+(ax^2+bx+c)\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}+A\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$
Se realiza la suma de quebrados:
$$\frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{(2ax+bx)(x^2-4x+3)+(ax^2+bx+c)(x-2)+A}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$
Se simplifica los denominadores:
$$6x^3-22x^2+21x-7=(2ax+bx)(x^2-4x+3)+(ax^2+bx+c)(x-2)+A$$
Se multiplica, asocia con respecto la variable 'x':
$$6x^3-22x^2+21x-7=3ax^3+(-10a+2b)x^2+(6a-6b+c)x+(3b-2c+a)$$
Se igualan los coeficientes de la misma potencia de la variable 'x':
$$\begin{array}{rcll} 6 & = & 3a & \longrightarrow\ a=2\\ -22 & = & -10a+2b & \longrightarrow\ b=-1\\ 21 & = & 6a-6b+c & \longrightarrow\ c=3\\ -7 & = & 3b-2c+A & \longrightarrow\ A=2 \end{array}$$
Se reemplaza en la identidad:
$$\int \frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x+3}+A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$$
$$\int \frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx=(2x^2-x+3)\sqrt{x^2-4x+3}+2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$$
Se integra la última integral, la cual ya es conocido el método, se transforma a su forma canónica:
$$2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx=2\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}=2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right|$$
Finalmente:
$$\int \frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx=(2x^2-x+3)\sqrt{x^2-4x+3}+2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right|+C$$

Ahora, se realiza un análisis de integración de funciones irracionales no-lineales, pero además, de la función con radical con un trinomio, en el denominador, se tiene un polinomio, que su orden, más frecuente es de primer o segundo orden; es decir:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}; \qquad \int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{qx^2+p}}$$

En ambos casos, se realiza un cambio de variable, en el prime caso : $\frac{1}{(x-\alpha)} = t$, se despeja la variable 'x', se la deriva y después se reemplaza en la integral. En el segundo caso $xt = \sqrt{x^2-1}$ al igual, se despeja 'x' , se la deriva y se reemplaza en la integral.

1. Encuentre la integral de:

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{5x^2-2x-3}}$$

Su dominio es: $x < -1$ y $x > \frac{3}{5}$. Esta integral es del primer tipo, donde $\alpha = 0$,se realiza un cambio de variable: $\frac{1}{x} = t \longrightarrow x = \frac{1}{t} \longrightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$ Se reemplaza:

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{5x^2-2x-3}} = \int \frac{-t^5dt}{t^2\sqrt{5\left(\frac{1}{t^2}\right)-2\frac{1}{t}-3}} =$$

Se realiza operaciones de álgebra básicas, se obtiene:

$$= \int \frac{-t^4dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}} =$$

Ya es un tipo de integral conocida, se aplica método de Ostrogawski, se trabaja sin el signo:

$$= \int \frac{t^4dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}} = (at^3+bt^2+ct+d)\sqrt{5+2t-3t^2} + A\int \frac{dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}}$$

Se deriva, se realiza operaciones básicas, se asocia y se obtiene:

$$t^4 = -12at^4 + (7a-9b)t^3 + (15a+5b-6c)t^2 + (10b+3c-3d)t + (5c+d+A)$$

$$\begin{array}{rclcl}
1 &=& -12a & \longrightarrow & a = -\frac{1}{12} \\
0 &=& 7a9b & \longrightarrow & b = -\frac{7}{108} \\
0 &=& 15a+5b-6c & \longrightarrow & c = \frac{85}{324} \\
0 &=& 10b+3c-3d & \longrightarrow & d = -\frac{155}{324} \\
0 &=& 5c+d+A & \longrightarrow & A = \frac{145}{81}
\end{array}$$

Nos queda por encontrar la integral, se la transforma a su forma canónica:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5+2t-3t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{16}{9}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2}}$$

Cambio de variable: $t - \frac{1}{3} = u \longrightarrow dt = du$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{16}{9}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{16}{9}-(u)^2}} =$$

Ya se puede integrar y es igual a:

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{16}{9} - (u)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{3}{4}u\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{3t-1}{4}\right)$$

Finalmente:

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{5x^2-2x-3}} = \frac{155x^3+85x^2+21x+27}{324x^4}\sqrt{5x^2+2x-3} + \frac{145}{81\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{3-x}{4x}\right) + C$$

1. Encuentre la integral de:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$$

Es una integral del segundo tipo: donde $x < -1 y x > 1$. El cambio de variable a utilizar:

$$ux = \sqrt{x^2-1}$$

Se eleva al cuadrado y se despeja ' x ':

$$ux = \sqrt{x^2-1} \longrightarrow u^2x^2 = x^2 - 1 \longrightarrow 1 = x^2 - u^2x^2$$

$$1 = x^2 - u^2x^2 \longrightarrow x^2(1-u^2) = 1 \longrightarrow x^2 = \frac{1}{1-u^2}$$

Se deriva:

$$x^2 = \frac{1}{1-u^2} \longrightarrow 2xdx = \frac{2udu}{(1-u^2)^2} \longrightarrow xdx = \frac{udu}{(1-u^2)^2}$$

Como se puede observar, en la derivada, al lado derecho, se tiene el producto xdx, pero en la integral no se tiene; por lo tanto, multiplicamos y dividimos por x:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{xdx}{(x^2+1)x\sqrt{x^2-1}} =$$

En la integral, se tiene el elemento x^2+1 se lo obtiene:

$$x^2 = \frac{1}{1-u^2} \longrightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{1-u^2} + 1 = \frac{2-u^2}{1-u^2}$$

El otro elemento, que se requiere:

$$x\sqrt{x^2-1} = x \cdot xu = x^2u = u \cdot \frac{1}{1-u^2} = \frac{u}{1-u^2} =$$

Con todos estos elementos, se reemplaza en la integral:

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{udu}{(1-u^2)^2}}{\left(\frac{2-u^2}{1-u^2}\right)\left(\frac{u}{1-u^2}\right)} = \int \frac{du}{2-u^2}$$

Se ha obtenido una integral de una función racional y el discriminante del polinomio del denominador es mayor a cero; por lo tanto, se aplica el método de fracciones parciales:

$$\frac{1}{2-u^2} = \frac{A}{(\sqrt{2}-u)} + \frac{B}{(\sqrt{2}+u)}$$

$$\frac{1}{2-u^2} = \frac{A(\sqrt{2}+u)+B(\sqrt{2}-u)}{2-u^2}$$

$$1 = A(\sqrt{2}+u) + B(\sqrt{2}-u)$$

Si $u = \sqrt{2}$

$$1 = A(\sqrt{2}+u) + B(\sqrt{2}-u) \longrightarrow 1 = A(\sqrt{2}+\sqrt{2}) = A(2\sqrt{2}) \longrightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Si $u = -\sqrt{2}$

$$1 = A(\sqrt{2}+u) + B(\sqrt{2}-u) \longrightarrow 1 = B(\sqrt{2}+\sqrt{2}) = B(2\sqrt{2}) \longrightarrow B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Se reemplaza:

$$\frac{1}{2-u^2} = \frac{A}{(\sqrt{2}-u)} + \frac{B}{(\sqrt{2}+u)}$$

$$\frac{1}{2-u^2} = \frac{1}{2(\sqrt{2}\sqrt{2}-u)} + \frac{1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+u)}$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{1}{2-u^2}du = \int \frac{du}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-u)} + \int \frac{du}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+u)}$$

Se aplica propiedades de integración:

$$\int \frac{1}{2-u^2}du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{(\sqrt{2}-u)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{(\sqrt{2}+u)}$$

Se integra, la primera:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{(\sqrt{2}-u)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}-u\right|$$

Se integra, la segunda:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{(\sqrt{2}+u)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}+u\right|$$

Se reemplaza:

$$\int \frac{1}{2-u^2}du = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}-u\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}+u\right|$$

$$\int \frac{1}{2-u^2}du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\ln\left|\sqrt{2}-u\right| + \ln\left|\sqrt{2}+u\right|\right)$$

$$\int \frac{1}{2-u^2}du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right|$$

Se reemplaza $u = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{X}$ se simplifica con operaciones básicas de álgebra y se obtiene:

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right| + C$$

3.2.2. Ejercicios Propuestos de Funciones Irracionales No-Lineales

1. Encuentre la integral de :

1. $\displaystyle\int \frac{(8x+3)dx}{\sqrt{4x^2+3x+1}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
4. $\displaystyle\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
5. $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$
7. $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+m}} \qquad m > \frac{1}{4}$
10. $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{3x^2+2x+1}}$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$
12. $\displaystyle\int \frac{(x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$
14. $\displaystyle\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$
16. $\displaystyle\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2-6x}}$
17. $\displaystyle\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$
18. $\displaystyle\int \frac{(x)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$
19. $\displaystyle\int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$
20. $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}$

1. $\displaystyle\int \frac{(10x-15)dx}{\sqrt{36x^2-108x+77}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2r-x)x}} \qquad r > 0$
4. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$
5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$
6. $\displaystyle\int \frac{(6x+5)dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$
7. $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$
8. $\displaystyle\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x-1}}$
10. $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{3x^2+2x+1}}$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}$
12. $\displaystyle\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$
13. $\displaystyle\int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$
14. $\displaystyle\int \frac{(2x)dx}{\sqrt{x^2+5}}$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x+2x^2}}$
16. $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x-2x^2}}$
18. $\displaystyle\int \frac{(4x33)dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$
19. $\displaystyle\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$
20. $\displaystyle\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{6x-5-x^2}}$

2. Encuentre la integral de :

1. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x}}$
2. $\int \frac{(x+a)dx}{\sqrt{x^2-ax}} \qquad a>0$
3. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$
4. $\int \frac{(5x+2)dx}{\sqrt{2x^2+8x-1}}$
5. $\int \frac{(5x-4)dx}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$
7. $\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}}$
8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
9. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$
10. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}}$
11. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$
12. $\int \frac{dx}{(x-2)^4\sqrt{1-4x+x^2}}$
13. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-3x^2}}$
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$
15. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{4-x^2}}$
16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{10x-x^2}}$
17. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{2x^2+3}}$
18. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-5-x^2}}$
19. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+19}} \qquad a>0$
2. $\int \frac{(x+a)dx}{\sqrt{x^2-ax}}$
3. $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$
4. $\int \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{4x^2+5x-8}}$
5. $\int \sqrt{2x+x^2}dx$
6. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$
7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
8. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+1}}$
9. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{10x-x^2}}$
10. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{2x^2+2x+1}}$
11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-4x+x^2}}$
12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{3-2x+x^2}}$
13. $\int \frac{dx}{(3-2x)\sqrt{x^2-4x+3}}$
14. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$
16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$
17. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$
18. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+5}}$
19. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}}$
20. $\int \frac{dx}{(x)\sqrt{x^2+6x+13}}$

3. Encuentre la integral de:

1. $\int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}$
2. $\int \frac{x^3+4x^2-6x+3}{\sqrt{5+6x-x^2}}$
3. $\int \frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{x^2++1}}$
4. $\int x\sqrt{6+x-x^2}dx$
5. $\int \frac{3x^3+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$
6. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x+1}}dx$
7. $\int \frac{x^3+2x^2-ax+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad a \neq 0$
8. $\int \frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{x^2++1}}$
9. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}$
10. $\int \sqrt{x^2-3x+2}dx$
11. $\int \sqrt{x^2-4}dx$
12. $\int \sqrt{x^2+4}dx$
13. $\int x^2\sqrt{6+x-x^2}dx$
14. $\int x\sqrt{x^2-3x+2}dx$
15. $\int x\sqrt{6+x-x^2}dx$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}$
17. $\int \frac{x^3+5x^2-3x-5}{\sqrt{x^2+2x+1}}dx$
18. $\int \sqrt{1-2x-x^2}dx$
19. $\int \sqrt{x^2-2x+10}dx$
20. $\int \sqrt{4-x^2}dx$

1. $\int x\sqrt{8+x-x^2}dx$
2. $\int \sqrt{3x^2+10x+9}dx$
3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int \frac{2x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$
5. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$
6. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$
7. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{5x^2+1}}dx$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$
9. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-3x+2}}dx$
10. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x-x^2}}dx$
11. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x-x^2}}dx$
12. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x}}dx$
13. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x^2+3}}dx$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}dx$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$
16. $\int \frac{x^2dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}}$
18. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$
19. $\int \frac{x^2dx}{x^2}dx$
20. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}dx}{\sqrt{5x^2+1}}dx$

4. Encuentre la integral de:

1. $\int (x+5)\sqrt{x^2+2x+4}dx$
2. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}$
3. $\int \frac{dx}{x^5(x^4+1)^2}$
4. $\int x\sqrt{x^2+4x+5}dx$
5. $\int x\sqrt{x^2-3x-5}dx$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$
7. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x+4}}$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$
10. $\int \sqrt{x^2-5x+6}dx$
11. $\int x\sqrt{x^2-3x+6}dx$
12. $\int \sqrt{x^2+4x-12}dx$
13. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-9x+18}}$
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9x+18}}$
15. $\int x^2\sqrt{x^2-3x+18}dx$
16. $\int \frac{(x+5)}{\sqrt{x^2+2x+1}}dx$
17. $\int \sqrt{x^2-4x-21}dx$
18. $\int \sqrt{x^2-2x-15}dx$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}$
20. $\int \sqrt{x^2-x-20}dx$

1. $\int (x+1)\sqrt{8+x-x^2}dx$
2. $\int x\sqrt{3x^2+10x+9}dx$
3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$
4. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$
5. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$
6. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2-4x+3}}$
7. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}dx$
8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$
9. $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2-3x+2}}dx$
10. $\int \frac{dx}{(x)^2\sqrt{x-x^2}}dx$
11. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-x^2}}dx$
12. $\int \frac{dx}{(x)^2\sqrt{x^2+2x}}dx$
13. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4x-21}}dx$
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-5}}dx$
16. $\int \frac{x^2dx}{x\sqrt{2x^2-x-3}}dx$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+11x-4}}$
18. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$
19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-3x+3}}dx$
20. $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{\sqrt{5x^2+1}}dx$

Capítulo 4

Integrales Indefinidas de Funciones Trigonométricas

4.1. Elementos Básicos de Integrales Trigonométricas

Los métodos de integración para las integrales trigonométricas, principalmente, se basan, en su gran mayoría, en la aplicación de alguna de las identidades trigonométricas, es por eso, que el estudiante debe conocer las identidades trigonométricas básicas, como : $\sin(2x), \cos(2x), \tan(2x)$, suma y diferencia de funciones trigonométricas; así como también, tener en mente las propiedades de funciones trigonométricas, esto ayudara a entender y a integrar con mas facilidad. Además, en este tipo de integrales, se puede aplicar el método algebraico, que en algunos casos ayuda.

También, se debe poner atención, si las funciones trigonométricas se encuentran en el numerador o denominador y de los exponentes que estás funciones tengan.
Si las funciones trigonométricas están en el numerador y si las funciones trigonométricas tienen exponente par, en ese caso, es mejor aplicar las fórmulas de reducción y/o re-cursivas de las integrales trigonométricas, y si las funciones trigonométricas tienen exponente impar , se aplica un cambio de variable con respecto a una de las función $\sin(x)$ o $\cos(x)$. En este libro se indicaran los métodos mas comunes, para obtener las fórmulas de las integrales de reducción, y no es su objetivo de alistar estás fórmulas; ya que, en la practica existen mas de 600 fórmulas de este tipo. En cálculo, es común encontrar integrales del tipo:

$$\int \frac{dx}{\sin^n(x)\cos^m(x)}$$

Donde n,m son números naturales. Su integración, se la realiza, aprovechando que, en el numerador, se puede escribir el número 1, y este número representarlo con una identidad trigonométrica, que es igual a: $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, con lo cual, se separa en dos integrales y en cada una de estás integrales, se vuelve a realizar la misma operación, hasta que, se llegue a integrales conocidas.

4.1.1. Ejercicios Resueltos de Integración de Funciones Trigonométricas

1. Encuentre la integral :

$$\int \sin(ax)dx \qquad a \neq 0$$

se realiza un cambio de variable: $ax = t \longrightarrow adx = dt$, se reemplaza:

$$\int \sin(ax)dx = \int \sin(t)\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int \sin(t)dt = -\frac{1}{a}\cos(t) = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$

2. Encuentre la integral:

$$I = \int \sin(ax)\cos(bx)dx \qquad a \neq 0 \;\; y \;\; b \neq 0$$

La integral presentada como un producto de funciones trigonométricas, se la representa como una suma de funciones trigonométricas, ya que en esa forma existe una propiedad de integrales, para ello, se utiliza las identidades trigonométricas ; es decir:

$$2\sin(A)\cos(B) = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

Se reemplaza:

$$\int \sin(ax)\cos(bx)dx = \int \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]dx$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$\int \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]dx = \frac{1}{2}\int [\sin(a+b)x]dx + \frac{1}{2}\int [\sin(a-b)x]dx$$

Si $a+b=0$ o $a-b=0$ en función del ejercicio anterior se tendría:

$$I = -\frac{1}{4a}\cos(2ax) + C$$

Si $a+b \neq 0$ o $a-b \neq 0$ se tiene:

$$I = \int \sin(ax)\cos(bx)dx = -\frac{1}{4a}\cos((a+b)x) - \frac{1}{2(a-b)}\cos((a-b)x) + C$$

3. Encuentre la integral :

$$A = \int \cos^2(x)dx \qquad y \qquad B = \int \sin^2(x)dx$$

Existen tres métodos para encontrar está integral, que se presente en cálculo integral muy frecuente:

a) **Método Algebraico:** Se obtiene un sistema:

$$\begin{cases} A+B &= \int(\cos^2(x)+\sin^2(x)dx &= \int dx &= x \\ A-B &= \int(\cos^2(x)-\sin^2(x)dx &= \int\cos(2x)dx &= \frac{1}{2}\sin(2x) \end{cases}$$

Se resuelve el sistema y se obtiene:

$$A = \int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \;\; y \;\; B = \int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

b) **Método Integral:**

Se aplica el método de por partes:

$$\int \cos^2(x)dx = \int \cos(x)\cos(x)dx$$

$$\begin{array}{rcl} g(x) &=& \cos(x) \\ g'(x) &=& -\sin(x)dx \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f'(x) &=& \cos(x)dx \\ \int f'(x) &=& \int\cos(x)dx \\ f(x) &=& \sin(x) \end{array}$$

$$\int \cos^2(x)dx = \cos(x)\sin(x) - \int \sin(x)(-\sin(x))dx =$$

$$= \cos(x)\sin(x) + \int(\sin^2(x))dx =$$

Se reemplaza: $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$

$$= \cos(x)\sin(x) + \int(1-\cos^2(x))dx =$$

$$= \cos(x)\sin(x) + \int dx - \int \cos^2(x))dx =$$

La integral final se la pasa al lado izquierdo:

$$2\int \cos^2(x)dx = \cos(x)\sin(x) + \int dx =$$

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{x}{2} =$$

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

c) **Método Identidades Trigonométricas**:

En la integración de la integral se aplica identidades trigonométricas, las cuales deben ser conocidas por el estudiante:

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x); \qquad 2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x); \qquad \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Se integral a ambos lados:

$$\int \cos^2(x)dx = \int \frac{1dx}{2} + \int \frac{1}{2}\cos(2x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C;$$

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{dx}{2} - \int \frac{1}{2}\cos(2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C;$$

4. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)}$$

Se define que $\sin(x) \neq = 0$; por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dx}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

Se realiza un cambio de variable: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u$ se deriva: $\frac{dx}{2\cos^2(x)} = du$

$$= \int \frac{dx}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{du}{u} = \ln(u)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln(u) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Cave anotar que, si $\sin(x) \neq 0$ la función $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ existe.

5. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{\cos(x)}$$

Se define que $\cos(x) \neq = 0$ y se aplica la propiedad de ángulos complementarios; por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Un cambio de variable: $\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = u \longrightarrow dx = dt$

$$\int \frac{dx}{\cos(x)}dx = \int \frac{dx}{\sin(u)}du = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos(x)}dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

6. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)\cos(x)}$$

Se define que $\cos(x) \neq= 0 \quad y \quad \sin(x) \neq 0$.

$$\int \frac{dx}{\sin(x)\cos(x)} = 2\int \frac{dx}{\sin(2x)} =$$

Cambio de variable: $2x = u \longrightarrow 2dx = du$

$$2\int \frac{\frac{dx}{2}}{\sin(du)} = \int \frac{du}{\sin(u)} = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| + C = \ln|\tan(x)| + C$$

7. Encuentre la integral :

$$\int \tan(x)dx$$

Se define que $\cos(x) \neq= 0$

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

En el numerador, se puede escribir que, $(\cos(x))' = -\sin(x)$

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C = \ln\left|\cos^{-1}(x)\right| = \ln|\sec(x)| + C$$

8. Encuentre la integral :

$$\int \cot(x)dx$$

Se define que $\sin(x) \neq= 0$

$$\int \cot(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$$

En el numerador, se puede escribir que, $(\cos(x))' = -\sin(x)$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \int \frac{(\sin(x))'}{\sin(x)}dx = \ln|\sin(x)| + C$$

9. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)}$$

Se define que: $\sin(x) \neq= 0, \cos(x) \neq 0$

$$\int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2(x)} + \frac{dx}{\sin^2(x)} = \tan(x) - \cot(x) + C$$

10. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos(x)}$$

Se define que: $\sin(x) \neq= 0, \cos(x) \neq 0$

$$\int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2(x)\cos(x)} = \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos(x)} dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos(x)} dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos(x)} dx + \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos(x)} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos(x)} + \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx =$$

La primera integral es conocida. La segunda no lo es; por lo tanto, se debe realizar cambios:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx =$$

Se realiza un cambio de variable: $\sin(x) = t \longrightarrow \cos(x)dx = dt$, se reemplaza:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\sin(x)}$$

Finalmente:

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| - \frac{1}{\sin(x)} + C$$

11. Encuentre la integral :

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^3(x)}$$

Se define que: $\sin(x) \neq= 0, \cos(x) \neq 0$

$$\int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2(x)\cos^3(x)} = \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^3(x)} dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^3(x)} dx + \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^3(x)} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^3(x)} + \int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos(x)} =$$

Se continua realizando el mismo proceso con cada una de ellas:

$$= \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^3(x)} dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^3(x)} dx + \int \frac{dx}{\cos(x)}$$

Con la primera, se aplica el método de por partes:

$$= \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^3(x)} dx = \int \frac{\sin(x)\sin(x)}{\cos^3(x)} dx =$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x) & f'(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos^3} dx \\ g'(x) &= \cos(x)dx & \int f'(x)dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos^3} dx \end{aligned}$$

Se integra:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3} dx$$

Se aplica un cambio de variable: $\cos(x) = t \longrightarrow -\sin(x)dx = dt$, se reemplaza:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3} dx = -\int \frac{dt}{t^3} = -\int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} = \frac{1}{2\cos^2}$$

Se aplica el método de por partes al ejercicio:

$$= \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^3(x)}dx = \frac{\sin(x)}{2\cos^2} - \int \frac{\cos(x)}{2\cos^2}dx$$

$$= \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^3(x)}dx = \frac{\sin(x)}{2\cos^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos(x)}$$

Por el momento se tendría:

$$\int \frac{dx}{\cos^3(x)} = \frac{\sin(x)}{2\cos^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos(x)} + \int \frac{dx}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{2\cos^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos(x)} =$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3(x)} = \frac{\sin(x)}{2\cos^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| =$$

La integral:

$$= \int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{1}{\sin(x)}$$

Finalmente, se une los elementos de la integral:

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^3(x)} = \frac{\sin(x)}{2\cos^2} + \frac{3}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{1}{\sin(x)} + C$$

12. Encuentre la integral

$$\int \tan^2(x)dx$$

Se define que: $\sin(x)\cos(x) \neq 0$ Se considera la identidad trigonométrica:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Se divide para $cos^2(x)$ y se obtiene;

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} \longrightarrow \tan^2 + 1 = \sec^2(x)$$

$$\tan^2 + 1 = \sec^2(x) \longrightarrow \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2} - 1$$

Se integra a ambos lados:

$$\int \tan^2(x)dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2} - 1\right]dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2}\right]dx - \int dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2}\right]dx - \int dx = \tan(x) - x + C$$

Teniendo está integral en mente, se puede obtener la fórmula de reducción para la integral $\int \tan^n(x)$; que es:

$$U_n = \int \tan^n dx$$

Donde n es un número natural mayor a dos.

$$\int \tan^{n-2}(x) \cdot \tan^2(x)dx$$

$$\int \tan^{n-2}(x) \cdot \left[\frac{1}{\cos^2} - 1\right]dx$$

Se puede escribir:

$$\int \tan^{n-2}(x) \cdot \left[\frac{1}{\cos^2} - 1\right]dx$$

$$\int \cdot \left[\frac{\tan^{n-2}(x)}{\cos^2}\right] dx - \int \tan^{n-2}(x) dx$$

En la primera integral se realiza un cambio de variable: $\tan(x) = t \longrightarrow \dfrac{dx}{\cos^2(x)} = dt$ se reemplaza y se integra:

$$\int \cdot \left[\frac{\tan^{n-2}(x)}{\cos^2}\right] dx = \int t^{n-2} dt = \frac{t^{n-1}}{n-1} = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x)$$

$$\int \tan^n(x) \cdot dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x) \cdot dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x) - U_{n-2}$$

El proceso es idéntico si se desea obtener la fórmula de reducción para la cotangente; es decir:

$$V_n = \int \cot^n(x) dx$$

Donde n es un número natural mayor a dos. Reemplazando en la fórmula anterior por x el elemento $\dfrac{\pi}{2} - x$ se puede obtener la fórmula de reducción para la cotangente:

$$\int \cot^n(x) dx = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1}(x) - \int \cot^{n-2}(x) \cdot dx = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1}(x) - V_{n-2}$$

13. Encuentre la integral :

$$\int \tan^6(x) dx$$

Donde n = 6, se aplica la fórmula de reducción:

$$\int \tan^6(x) dx = \frac{1}{5}\tan^5(x) - U_4$$

$$\int \tan^4(x) dx = \frac{1}{3}\tan^3(x) - U_2$$

$$\int \tan^2(x) dx = \tan(x) - x$$

Se va reemplazando en sentido contrario:

$$\int \tan^4(x) dx = \frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) - x$$

$$\int \tan^6(x) dx = \frac{1}{5}\tan^5(x) - \frac{1}{3}\tan^3(x) + \tan(x) + x + C$$

14. Encuentre la integral :

$$\int \cot^5(x) dx$$

Donde n = 5, se aplica la fórmula de reducción:

$$\int \cot^5(x) dx = \frac{-1}{4}\cot^4(x) - V_3$$

$$\int \cot^3(x) dx = \frac{-1}{2}\cot^2(x) - V_1$$

$$V_1 = \int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)|$$

En sentido contrario:

$$\int \cot^3(x) dx = \frac{-1}{2}\cot^2(x) - \ln|\sin(x)|$$

$$\int \cot^5(x) dx = \frac{-1}{4}\cot^4(x) + \frac{1}{2}\cot^2(x) + \ln|\sin(x)| + C$$

15. Encuentre la integral :

$$I_n = \int \sin^n(x)dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

Se aplica propiedades de funciones exponenciales:

$$I_n = \int \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx$$

Se aplica el método de por partes:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin^{n-1}(x) & f'(x) &= \sin(x)dx \\ g'(x) &= (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)dx & \int f'(x)dx &= \int \sin(x)dx \\ & & f(x) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

Se aplica la fórmula:

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int(-\cos^2(x))\sin^{n-2}(x)dx$$

Se recuerda la identidad: $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int(1-\sin^2(x))\sin^{n-2}(x)dx$$

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\left[\int \sin^{n-2}(x)dx - \int(\sin^{n-2}(x)\sin^2(x)dx\right]$$

$$\int \sin^n(x)dx = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)dx - (n-1)\int(\sin^n(x)dx$$

$$\int \sin^n(x)dx + (n-1)\int(\sin^n(x)dx = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)dx$$

$$n\int \sin^n(x)dx = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)dx$$

$$nI_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2}$$

Finalmente:

$$I_n = \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

Donde $I_n = \int \sin^n(x)dx; \qquad I_{n-2} = \int \sin^{n-2}(x)dx$

16. Encuentre la integral :

$$I_n = \int \cos^n(x)dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

Se aplica propiedades de funciones exponenciales o también, se puede aplicar propiedades de ángulos complementarios; por lo tanto, se puede deducir la fórmula:

$$I_n = \frac{\sin^(x)\cos^{n-1}(x)}{n} + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{n} + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

Donde $I_n = \int \cos^n(x)dx; \qquad I_{n-2} = \int \cos^{n-2}(x)dx$

17. Encuentre la integral :

$$I_6 = \int \sin^6(x)dx$$

Si n es par lo mejor es utilizar la fórmula de reducción, en este caso n = 6:

$$I_6 = \frac{-\sin^5\cos(x)}{6} + \frac{5}{6}I_4$$

$$I_4 = \frac{-\sin^3\cos(x)}{4} + \frac{3}{4}I_2$$

$$I_2 = \int \sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

Ahora en sentido contrario:

$$I_4 = \frac{-\sin^3\cos(x)}{4} + \frac{3}{4}I_2 = \frac{-\sin^3\cos(x)}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]$$

$$I_6 = \frac{-\sin^5\cos(x)}{6} + \frac{5}{6}\left[\frac{-\sin^3\cos(x)}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]\right] + C$$

18. Encuentre la integral :

$$\int \sin^4(x)\cos^3(x)dx =$$

Una de las funciones tiene un exponente impar:

$$\int \sin^4(x)\cos^2(x)\cos(x)dx = \int \sin^4(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)dx =$$

Se realiza un cambio de variable: $\sin(x) = t \longrightarrow \cos(x)dx- = dt$

$$= \int \sin^4(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)dx = \int t^4(x)dt - \int t^4 \cdot t^2(x)dt =$$

$$= \int t^4(x)dt - \int t^4 \cdot t^2(x)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \frac{\sin^5}{5} - \frac{\sin^7}{7} + C$$

4.1.2. Ejercicios Propuestos de Integración de Funciones Trigonométricas

1. Encuentre la integral :

1. $\int \cos(5x)\cos(7x)dx$
2. $\int \cos(2x)\cos(3x)dx$
3. $\int \cos(4x)\sin(4x)dx$
4. $\int \cos(x)\cos(3x)dx$
5. $\int \sin(5x)\sin(2x)dx$
6. $\int \sin(5x)\sin(2x)dx$
7. $\int \sin(x)\sin(2x)dx$
8. $\int \sin(x)\cos(2x)dx$
9. $\int \cos(x)\sin(2x)dx$
10. $\int \sin(2x)\sin(2x)dx$
11. $\int \sin^4(x)dx$
12. $\int \cos^5(x)dx$
13. $\int \tan^5(x)dx$
14. $\int \cot^6(x)dx$
15. $\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx$
16. $\int \sin^4(x)\cos^5(x)dx$
17. $\int \sin^2(x)\cos(x)dx$
18. $\int \sin(x)\cos^2(x)dx$
19. $\int \sin(x)\tan(x)dx$
20. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)dx}{1+2\cos(x)}dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)dx}{1+\sin^2(x)}dx$
22. $\int \sin(2x)\tan(x)dx$

1. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)dx}{1+\sin^2(x)}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)dx}{\sin^2(x)}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2(x)}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3(x)}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4(x)}dx$
6. $\int \sin(3x)\cos(2x)dx$
7. $\int \sin(x)\cos(3x)dx$
8. $\int \sin(2x)\sin(5x)dx$
9. $\int \sin(3x)\sin(x)dx$
10. $\int \sin^3(x)dx$
11. $\int \cos^5(x)dx$
12. $\int \sin^5(x)dx$
13. $\int \sin^3(x)\cos^4(x)dx$
14. $\int \sin^3(x)\cos^3(x)dx$
15. $\int \sin^3(x)\cos(x)dx$
16. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)dx}{\sin^4(x)}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)dx}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}dx$
18. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)dx}{\sqrt[3]{\cos^2(x)}}dx$
19. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)dx}{\sqrt[3]{\cos^2(x)}}dx$

4.2. Método Básico para Transformar de una Integral Trigonométrica a una Integral Racional

Hay ciertas integrales trigonométricas que por su estructura son muy trabajosas en el momento de su integración. Es por esto que, es mucho más agradable transformarles a una integral racional, para lo cual, se utiliza ciertos cambios de variable, como son:

1. Cuando, se tiene :$\sin(x), \cos(x) \;\; y \;\; \tan(x)$:

$$\sin(x) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

Se divide y multiplica para: $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, se obtiene:

$$= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}$$

Se realiza un cambio de variable: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$

$$\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

En igual forma se obtiene una identidad para el $\cos(x)$:

$$\cos(x) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

Se divide y multiplica para: $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, se obtiene:

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

En igual forma, se obtiene una identidad para la $\tan(x)$ utilizando la ley de la tangente:

$$\tan(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1-t^2}$$

Las tres funciones trigonométricas, están representadas en función de 't'; lo que significa que, si una integral trigonométrica está compuesta por estás funciones, se las puede reemplazar en función de t, con lo cual, se obtendría una integral de funciones racionales.

$$\int R(\sin(x),\cos(x),\tan(x))dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1-t^2}\right)dx$$

Ahora se requiere una expresión para el diferencial, la cual, se obtiene de:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \longrightarrow \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(t)$$

Con lo cual, se obtiene:

$$\frac{x}{2} = \arctan(t) \longrightarrow x = 2\arctan(t) \longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Finalmente:

$$\int R(\sin(x),\cos(x),\tan(x))dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

2. Cuando, se tiene : $\sin^2(x), \cos^2(x)$ *y* $\sin(x)\cos(x)$:

$$\sin^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{1} = \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)+\cos^2(x)} = \frac{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}} =$$

$$= \frac{\tan^2(x)}{\tan^2(x)+1} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{1} = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)+\cos^2(x)} = \frac{\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}} =$$

$$= \frac{1}{\tan^2(x)+1} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{1} = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+\cos^2(x)} = \frac{\dfrac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}} =$$

$$= \frac{t}{\tan^2(x)+1} = \frac{t}{1+t^2}$$

En cada una de estás identidades, se tiene que: $\tan(x) = t \longrightarrow \arctan(\tan(x)) = \arctan(t) \longrightarrow x = \arctan(t) \longrightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$: Finalmente:

$$\int R(\sin^2(x), \cos^2(x), \sin(x)\cos(x))dx = \int R\left(\frac{t^2}{t^2+1}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

4.2.1. Ejercicios Resueltos de Integración de Funciones Trigonométricas Transformadas a Funciones Racionales

1. Encuentre la integral de:

$$\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$$

El denominador no puede ser cero, con ninguno valor de 'x'. Un elemento que a veces ayuda para definir que estrategia seguir es: El ejercicio tiene dos diferentes conjuntos: un número entero 2 y función trigonométrica $(\cos(x))$; por lo tanto, se transforma a una integral racional, del primer tipo:

$$\int \frac{dx}{2+\cos(x)} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{3+t^2}$$

Como se observa , se ha obtenido una integral racional. Se aplica la propiedad distributiva:

$$= 2\int \frac{dt}{3+t^2} = 2\int \frac{dt}{3\left[1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}$$

Se realiza un cambio de variable: $t = \sqrt{3}u \longrightarrow dt = \sqrt{3}du$, se reemplaza:

$$= 2\int \frac{\sqrt{3}du}{3\left[1+(u)^2\right]} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{\left[1+(u)^2\right]} = \arctan(u)$$

$$= \arctan(u) = \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

2. Encuentre la integral de:
$$\int \frac{(2+\sin(x))dx}{\sin(x)(1+\cos(x))}$$
Se define que $\sin(x) \neq 0$ y $(1+\cos(x)) \neq 0$. Se transforma a una integral racional:
$$\int \frac{(2+\sin(x))\,dx}{\sin(x)(1+\cos(x))} = \int \frac{\left(2+\frac{2t}{1+t^2}\right)dx}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2}$$
Después de realizar operaciones básicas, se obtiene:
$$= \int \frac{\left(2+\frac{2t}{1+t^2}\right)dx}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+t+1}{t}dt$$
$$= \int \frac{t^2+t+1}{t}dt = \int t dt + \int dt + \int \frac{dt}{t}$$
$$= \frac{t^2}{2} + t + Ln|t| + C = \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

3. Encuentre la integral de:
$$\int \frac{dx}{1+2\cos^2(x)}$$
Un cambio de variable : $\tan(x) = t$:
$$\int \frac{dx}{1+2\cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+2\cdot\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+3}$$
Se aplica una propiedad distributiva y un cambio de variable: $t = \sqrt{3}u \longrightarrow dt = \sqrt{3}du$
$$= \int \frac{dt}{3\left[\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}du}{\left[(u)^2+1\right]}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\int \frac{du}{\left[(u)^2+1\right]} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(u) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\int \frac{dx}{1+2\cos^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

4. Encuentre la integral de:
$$\int \frac{xdx}{\cos^2(x)}$$
Su define $\cos(x) \neq 0$. Se aplica el método de integración por partes:
$$\begin{aligned} g(x) &= x & f'(x) &= \frac{dx}{\cos^2(x)} \\ g'(x) &= dx & \int f'(x) &= \int \frac{dx}{\cos^2(x)} \\ & & f(x) &= \tan(x) \end{aligned}$$

Se aplica el método de integración por partes:

$$\int \frac{xdx}{\cos^2(x)} = x\tan(x) - \int \tan(x)dx = x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C$$

5. Encuentre la integral de:

$$\int x\tan^2(x)dx$$

Su define $\cos(x) \neq 0$. Se aplica una identidad trigonométrica :

$$\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$$

$$\int x\tan^2(x)dx = \int x\left[\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right]dx = \int \left[\frac{xdx}{\cos^2(x)}\right] - \left[\int xdx\right]$$

$$\int x\tan^2(x)dx = x\tan(x) + \ln|\cos(x)| - \frac{x^2}{2} + C$$

6. Encuentre la integral de:

$$\int \frac{1 + \sin(x)\cos(x)}{(2 + \cos^2(x))(1 + \sin^2(x))}dx$$

Se transforma a una integral racional:

$$\int \frac{1 + \dfrac{t}{1+t^2}}{\left(2 + \dfrac{1}{1+t^2}\right)\left(1 + \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{1+t^2}$$

Se simplifica:

$$\int \frac{t^2 + t + 1}{(2t^2+3)(2t^2+1)}dt$$

Se ha obtenido una función racional propia, se aplica el método de fracciones parciales:

$$\frac{t^2 + t + 1}{(2t^2+3)(2t^2+1)} = \frac{At + B}{2t^2 + 3} + \frac{Ct + D}{2t^2 + 1}$$

Después de realizar operaciones básicas y de simplificar el denominador, se obtiene:

$$t^2 + t + 1 = (At + B)(2t^2 + 1) + (Ct + D)(2t^2 + 3)$$

El desarrollo ya se conoce; por lo tanto, el estudiante debe realizar el proceso: $A = -\frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{4}$; $C = \frac{1}{2}$; $D = \frac{1}{4}$

$$\frac{t^2 + t + 1}{(2t^2+3)(2t^2+1)} = \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}{2t^2 + 3} + \frac{\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}{2t^2 + 1}$$

Se integra a ambos lados de la identidad:

$$\int \frac{t^2 + t + 1}{(2t^2+3)(2t^2+1)}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}{2t^2 + 3}dt + \int \frac{\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}{2t^2 + 1}dt$$

El lado derecho, se separa en cuatros integrales:

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{2t^2+3} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2t^2+3} + \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{2t^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2t^2+1}$$

La segunda y cuarta integral, se las ha realizado varias veces en este capitulo, el procedimiento lo debe hacer el estudiante.

En la segunda, se realiza un cambio de variable: $t = \sqrt{\frac{3}{2}}u \longrightarrow dt = \sqrt{\frac{3}{2}}du$ y se obtiene:

$$\frac{1}{4}\int \frac{dt}{2t^2+3} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan(u) = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)$$

En la cuarta, se realiza un cambio de variable: $t = \frac{1}{\sqrt{2}}u \longrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2}}du$

$$\frac{1}{4}\int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)$$

La primera y la tercera integral, también, se lo ha integrado varias veces. El estudiante debe hacerlo.
La primera:

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{2t^2+3} = -\frac{1}{8}\ln\left|2t^2+3\right|$$

La tercera:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{2t^2+1} = \frac{1}{8}\ln\left|2t^2+1\right|$$

Finalmente:

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2t^2+1}{2t^2+3}\right| + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tan(x)\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(x)) + C$$

7. Encuentre la integral de:

$$\int \sin^{\frac{1}{3}} x \cos^{-\frac{13}{3}} x dx$$

La presencia en el ejercicio de las funciones seno y coseno, nos daría la idea de que, se puede trabajar en la solución del ejercicio con la función tangente. Por lo tanto, se trabaja con los exponentes y se puede escribir en la forma: $\frac{1}{3} - \frac{13}{3} = -\frac{12}{3} = -4$

$$\int \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{1}{3}} x}\cos^{-\frac{12}{3}} x dx = \int \tan^{\frac{1}{3}} x \cos^{-4} x dx = \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x}\sec^2 x = \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x}(1 + tan^2 x)$$

Se separa en dos integrales:

$$= \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x}(1 + tan^2 x) = \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x}(tan^2 x)$$

En primera integral, se realiza un cambio de variable $\tan x = t$, su derivada $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, se reemplaza en la integral: :

$$= \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\tan^{\frac{4}{3}} x$$

El mismo procedimiento , se realiza en la segunda integral:

$$= \int \tan^{\frac{1}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x}(tan^2 x) = \int \tan^{\frac{7}{3}} x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^{\frac{7}{3}} dt = \frac{t^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1} = \frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}} = \frac{3}{10}\tan^{\frac{10}{3}} x$$

Finalmente:

$$\int \sin^{\frac{1}{3}} x \cos^{-\frac{13}{3}} x dx = \frac{3}{4}\tan^{\frac{4}{3}} x + \frac{3}{10}\tan^{\frac{10}{3}} x + C$$

4.2.2. Ejercicios Propuestos de Integración de Funciones Trigonométricas Transformadas a Funciones Racionales

1. Encuentra la integral de:

1. $\int \frac{dx}{5+4\cos(x)}$
2. $\int \frac{dx}{1+4\sin(x)}$
3. $\int \frac{dx}{\sin(x)+\cos(x)}$
4. $\int \frac{dx}{\sin(x)-\cos(x)}$
5. $\int \frac{3+\sin^2(x)}{2\cos^2(x)-\cos^4(x)}dx$
6. $\int \frac{1+\cos^2(x)}{2\cos^2(x)-\cos^4(x)}dx$
7. $\int \frac{\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}dx$
8. $\int \frac{dx}{(\sin^2(x)+3\cos^2(x))^2}$
9. $\int \frac{dx}{(\sin^4(x)+\cos^4(x))}$
10. $\int \frac{dx}{1-\sin^4}$
11. $\int \frac{\sin^2(x)\cos^2(x)}{(\sin^8(x)+\cos^8(x))}dx$
12. $\int \frac{dx}{1-\sin^2}$
13. $\int \frac{dx}{1-\cos^4}$
14. $\int \frac{dx}{1-\cos^4}$
15. $\int \frac{dx}{1+4\tan(x)}$
16. $\int \frac{dx}{1-\tan(x)}$
17. $\int \frac{dx}{\sin^6}$
18. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$
19. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

1. $\int \frac{dx}{1+\cos(x)}$
2. $\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$
3. $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}dx$
4. $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x)-\cos(x))^2}dx$
5. $\int \frac{dx}{1+\tan(x)}$
6. $\int \frac{dx}{1-\cos(x)}$
7. $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}dx$
8. $\int \frac{\cos(2x)}{\cos^3(x)}dx$
9. $\int \frac{\cos^5(x)}{\sin^3(x)}dx$
10. $\int \frac{\sin^4(x)}{\cos^3(x)}dx$
11. $\int \frac{dx}{\sin^5(x)\cos^3(x)}$
12. $\int \frac{dx}{\sin(x)\cos^3(x)}$
13. $\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^4(x)}$
14. $\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos(x)}$
15. $\int \frac{\sin^4(x)dx}{\cos(x)}$
16. $\int \frac{\sin^3(x)dx}{\cos(x)}$
17. $\int \frac{dx}{1-5\sin^2(x)}$
18. $\int \frac{\sin^3(x)dx}{\cos^8(x)}$
19. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$

2. Encuentra la integral de:

1. $\int \frac{2-\sin(x)}{\sin^2(x)}dx$
2. $\int \frac{\cos^2 x + 3\cos x - 2}{\cos^2(x)}dx$
3. $\int \frac{\sec^2 x}{a - b\tan(x)}dx$
4. $\int \frac{\sin ax}{\cos^3(ax)}$
5. $\int \frac{\sin(x)dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4}}dx$
6. $\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3-\cos^2 x}}dx$
7. $\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3+\cos^4 x}}dx$
8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}$
9. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$
10. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^8 x}$
11. $\int \frac{dx}{(\sin^2(x)\cos^2(x))}$
12. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \sin^3 x}}$
14. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$
15. $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$
16. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}$
17. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}$
18. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$
19. $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$
20. $\int \frac{dx}{1 - \sin^2 x}$

1. $\int \frac{\sin x}{\cos^2(x) - 2\cos x + 5}dx$
2. $\int \frac{\sin(2x)}{1 + 4\cos^2(x)}dx$
3. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$
4. $\int \frac{dx}{(\sin x + 4)(\sin x - 1)}$
5. $\int \frac{1 + \cot x}{1 - \cot(x)}$
6. $\int \frac{dx}{\cos^6(x)}$
7. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5}$
8. $\int \frac{x dx}{1 + \cos(x)}$
9. $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$
10. $\int \frac{dx}{3 - 4\sin^2 x}$
11. $\int \frac{dx}{1 + \cos x \sin x}$
12. $\int \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x}$
13. $\int \frac{dx}{(1 + \tan x)\sin^2 x}$
14. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$
15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}$
16. $\int \frac{dx}{\cos(x)}$
17. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + 3\cos x - 5}$
18. $\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x - 5)}$
19. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$

Se ha analizado las diferentes formas que existen para integrar una función trigonométrica, ahora se puede aplicar estos conocimientos para cuando se tiene una integral con una función irracional, aplicando el método trigonométrico (ver pagina 50).

1. Encuentre la integral de:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$$

Lo primero que se debe observar es que $-3 \le x \le 1$ además, que la variable x es negativo, en consecuencia, al integrar aparecerá la función $\arcsin(x)$.

Se debe transformar a su forma canónica, el trinomio del radical:

$$3-2x-x^2 = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\right] = -1\left[\left(x+\frac{2}{2}\right)^2 - \frac{16}{4}\right]$$

$$3-2x-x^2 = \frac{16}{4} - (x+1)^2 = 4-(x+1)^2$$

Se reemplaza:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}dx$$

Se realiza un cambio de variable: $x+1 = t \longrightarrow dx = dt; \qquad -2 \le t \le 2$

$$\int \sqrt{4-(x+1)^2}dx = \int \sqrt{4-(t)^2}dt = \int \sqrt{4\left(1-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)}dt$$

Cambio de variable: $\frac{t}{2} = k \longrightarrow t = 2k \longrightarrow dt = 2dk$

$$2\int \sqrt{\left(1-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)}dt = 2\int \sqrt{\left(1-(k)^2\right)}2dk = 4\int \sqrt{\left(1-(k)^2\right)}dk =$$

Ahora ya transformada , es más cómodo su integración. Se dibuja un triangulo rectángulo, en el cual, sus catetos representaran la parte irracional de la integral

Se escribe las funciones trigonométricas:

$\sin\alpha = \frac{k}{1}; \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1}; \quad \tan\alpha = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

$csc\alpha = \frac{1}{k}; \quad sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \quad ;ctan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}};$

De estás funciones se escoge la mas simple , la cual será nuestro cambio de variable.

En este caso $\sin\alpha = t$, ahora se deriva. Con todos estos elementos, se reemplaza en la integral irracional.

$$\sin\alpha = k \rightarrow \cos\alpha d\alpha = dk \tag{4.1}$$

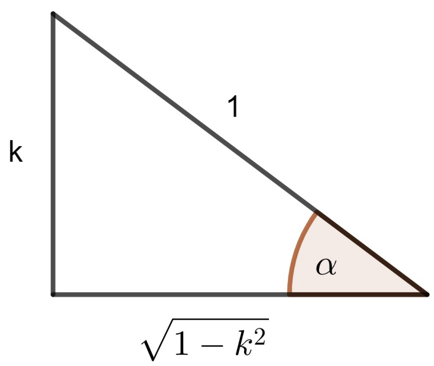


Figura 4.0

Ya con todos los elementos conocidos , se comienza a reemplazar a los elementos de la integral irracional con los elementos trigonométricos; es decir:

$$\int \sqrt{1-k^2}dk \rightarrow \int \cos\alpha\cos\alpha dx \rightarrow \int \cos^2\alpha d\alpha$$

Lo obtenido ya es bien conocida y es:

$$4\int \cos^2\alpha d\alpha = 4\left[\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{4}\right] = 2\alpha+\sin 2\alpha = 2\arcsin t + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+2k\sqrt{1-k^2}$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2k\sqrt{1-k^2} = 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\left[\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}\right] + C$$

2. Encuentre la integral de:

$$\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

Igual que en el ejercicio anterior, se define un triangulo rectángulo con los elementos irracionales de la integral. Si la parte interna de la , no está en la forma presentada en el ejercicio, se debe aplicar la forma canónica de un polinomio de segundo orden.

Se escribe las funciones trigonométricas:

$\sin\alpha = \frac{1}{x}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$csc\alpha = x$; $sec\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $\cot\alpha = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

De estás funciones, se escoge la mas simple, la cual será nuestro cambio de variable.

En este caso, se tiene: $\csc\alpha = x$, ahora, se deriva.

Y Con todos estos elementos, se reemplaza en la integral irracional.

$$(\csc\alpha = x)' \rightarrow -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}d\alpha = dx \tag{4.2}$$

$$-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}d\alpha = dx \rightarrow -cot\alpha\cdot\csc\alpha d\alpha = dx \tag{4.3}$$

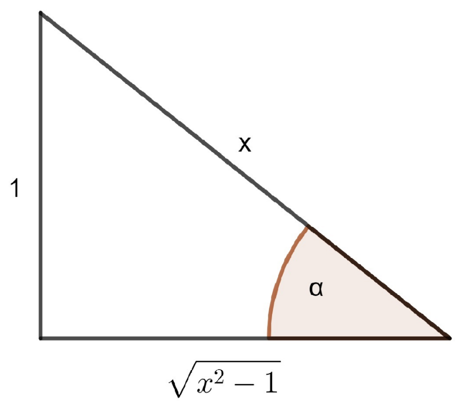


Figura 4.1

$$\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}} \rightarrow \int \frac{-\cot\alpha\cdot\csc\alpha d\alpha}{(2\csc\alpha-1)\cdot\dfrac{1}{\tan\alpha}} \rightarrow -\int \frac{\cos\alpha d\alpha}{\sin\alpha\sin\alpha\cdot\left[\dfrac{2}{\sin\alpha}-1\right]\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} =$$

$$= -\int \frac{d\alpha}{2-\sin\alpha}$$

La integral obtenida, se caracteriza por tener dos diferentes tipos de conjuntos: conjunto de números naturales y conjunto de funciones trigonométricas; por lo tanto, lo mejor es transformarle en una integral racional, para lo cual, se aplica los cambios de variable, ya conocidos:

$$= -\int \frac{d\alpha}{2-\sin\alpha} = -\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[2-\dfrac{2t}{1+t^2}\right]} = -\int \frac{2dt}{(1+t^2)2\left[1-\dfrac{t}{1+t^2}\right]} = -\int \frac{dt}{t^2-t+1} =$$

Al polinomio de segundo orden se lo transforma a su forma canónica:

$$t^2-t+1 = a\left[(t+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = \left[\left(t+\frac{-1}{2}\right)^2-\frac{-3}{4}\right] = \left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] = \frac{(2t-1)^2}{4}+\frac{3}{4}$$

Se reemplaza en la integral:

$$= -\int \frac{dt}{t^2-t+1} = -\frac{1}{\frac{1}{4}}\int \frac{dt}{(2t-1)^2+3} = -4\int \frac{dt}{(2t-1)^2+3}$$

Cambio de variable: (2t - 1) = k, y su derivada es igual: 2dt = dk, se reemplaza en la integral:

$$= -4\int \frac{dt}{(2t-1)^2+3} = -4\int \frac{dk}{2\left[(k)^2+3\right]} = -2\int \frac{dk}{\left[(k)^2+3\right]} =$$

$$-2\int \frac{dk}{\left[(k)^2+3\right]} = -2\int \frac{dk}{\left[3\left[\left(\dfrac{k}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]\right]} = -\frac{2}{3}\int \frac{dk}{\left[\left(\dfrac{k}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} = -\frac{2}{3}\arctan\left[\frac{k}{\sqrt{3}}\right]+C$$

$$= -\frac{2}{3}\arctan\left[\frac{k}{\sqrt{3}}\right]+C = -\frac{2}{3}\arctan\left[\frac{(2t-1)}{\sqrt{3}}\right]+C = -\frac{2}{3}\arctan\left[\frac{2\left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]-1}{\sqrt{3}}\right]+C$$

Capítulo 5

Integrales Indefinidas de Funciones Inversas Trigonométricas

El cien por ciento de este tipo de integrales, se aplica el método de integración por partes. También, es bueno tener en mente las propiedades de una función; ya que: al existir una función existe su inversa y por lo tanto, la inversa de una función es el argumento de la función y al aplicar propiedades de álgebra, se obtendría :

$$\sin(x) = t \to \arcsin(\sin(x)) = \arcsin(t) \to x = \arcsin(t)$$

Estos dos elementos , se aplicará en la integración de este tipo de integrales.

5.1. Ejercicios Resueltos de Funciones Inversas Trigonométricas

1. Encuentre la integral :

$$\int \arcsin(x)dx$$

Se define que: $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned} g(x) &= \arcsin(x) & f'(x) &= dx \\ g'(x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \int f'(x) &= \int dx \\ & & f(x) &= x \end{aligned}$$

Se aplica el método de por partes:

$$\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se realiza un cambio de variable: $\sqrt{1-x^2} = t \longrightarrow 1-x^2 = t^2 \longrightarrow -2xdx = 2tdt$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-tdt}{t} = -\int dt = -t = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

2. Encuentre la integral :

$$\int x\arctan(x)dx$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \arctan(x) & f'(x) &= xdx \\ g'(x) &= \frac{dx}{1+x^2} & \int f'(x) &= \int xdx \\ & & f(x) &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Se aplica el método de por partes:

$$\int x\arctan(x)dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$$

Se trabaja en la última integral:

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^2+1-1)\cdot dx}{1+x^2}$$

Se forma dos integrales:

$$\int \frac{(x^2+1-1)\cdot dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}dx - \int \frac{dx}{1+x^2}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} dx = x - \arctan(x)$$

Finalmente:

$$\int x \arctan(x) dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} [x - \arctan(x)] + C$$

3. Encuentre la integral :

$$\int (\arcsin^2(x)) dx$$

Se define que: $-1 < x < 1$. Se realiza un cambio de variable:

$$\arcsin(x) = t \longrightarrow \sin(\arcsin(x)) = \sin(t)$$

$$x = \sin(t) \longrightarrow dx = \cos(t) dt$$

$$\int (\arcsin^2(x)) \cdot dx = \int t^2 \cos(t) dt$$

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & t^2 & f'(x) & = & \cos(x) dx \\ g'(x) & = & 2t dt & \int f'(x) & = & \int \cos(x) dx \\ & & & f(x) & = & \sin(t) \end{array}$$

Se aplica el método de por partes:

$$= \int t^2 \cos(t) dt = t^2 \sin(t) - 2 \int t \sin(t) dt$$

Se trabaja con la última integral:

$$\int t \sin(t) dt = -t \cos(t) - \int (-\cos(t)) dt = -t \cos(t) + \sin(t)$$

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & t & f'(x) & = & \sin(x) dx \\ g'(x) & = & dt & \int f'(x) & = & \int \sin(t) dx \\ & & & f(x) & = & -\cos(t) \end{array}$$

Se reemplaza:

$$\int t^2 \cos(t) dt = \int t^2 \cos(t) dt = t^2 \sin(t) - 2 [-t \cos(t) + \sin(t)]$$

$$\int t^2 \cos(t) dt = \int t^2 \cos(t) dt = t^2 \sin(t) + 2t \cos(t) - 2 \sin(t)$$

En el intervalo $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ la función $\cos(t) \geq 0$. Se regresa a la variable ’ x ’.

$$t = \arcsin(x) \longrightarrow \sin(t) = x, \quad \cos(t) = \sqrt{1-x^2}$$

Finalmente:

$$\int (\arcsin(x)^2) dx = x(\arcsin(x))^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin(x) - 2x + C$$

5.2. Ejercicios Propuestos de Funciones Inversas Trigonométricas

1. Encuentra la integral :

1. $\displaystyle\int \frac{\arcsin(x)}{(\sqrt{1-x^2})^3}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+9x^2)(\sqrt{\arcsin(3x)}}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{(\arctan(x))^2}{x^2+1}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin(x))(\sqrt{1-x^2}}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x\arcsin(x)dx}{(\sqrt{1-x^2})^3}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x\arctan(x)dx}{(x^2-1)}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x\arctan(e^{\frac{1}{2}x})dx}{e^{\frac{1}{2}x}}dx$
8. $\displaystyle\int (2x+3)\operatorname{arc}\cos(2x-3)dx$
9. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin(x)dx$
10. $\displaystyle\int \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)dx$
11. $\displaystyle\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x}dx$
12. $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
13. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$
14. $\displaystyle\int e^{\arcsin x}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1. $\displaystyle\int x(1+x^2)\arctan(x)dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x\arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$
3. $\displaystyle\int x^3\arctan(x)dx$
4. $\displaystyle\int \frac{\arcsin(x)}{x^2}dx$
5. $\displaystyle\int x^2\arctan(x)dx$
6. $\displaystyle\int x\arcsin(x)dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+4x^2)(\arctan(2x))^2}$
9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)}(\arctan(x))dx$
10. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)}(\arcsin(x))dx$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})(\operatorname{arc}\cos(x))}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})(\operatorname{arc}\cos^2(x))}$
13. $\displaystyle\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}dx$
14. $\displaystyle\int x(\arctan x)^2dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx$
16. $\displaystyle\int x(\operatorname{arc}\cos 2x)dx$

Capítulo 6

Integrales Indefinidas de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

6.1. Elementos Básicos de una Integral Indefinida de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Son integrales de la forma $R(e^x)$, en las cuales, se utiliza el método de cambio de variable:

$$e^x = t \quad donde\ \ t > 0\ \ y\ \ t \neq 1$$

Se aplica la definición de una función logarítmica y se deriva:

$$e^x = t \longrightarrow x = \ln t \longrightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

En el caso, de que la integral tenga como elemento a $\log_p(x)$, lo mas practico es transformar a $ln(x)$, se aplica una de las propiedades de logaritmos:

$$p^{\log_p(x)} = x$$

Se toma la función logarítmica a ambos lados de la identidad:

$$\ln\left[p^{\log_p(x)}\right] = \ln x$$

Se aplica una propiedad de una función logarítmica:

$$\log_p(x) \cdot \ln p = \ln x$$

Se despeja $\log_p(x)$:

$$\log_p(x) = \frac{\ln(x)}{\ln p}$$

6.1.1. Ejercicios Resueltos de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

1. Encuentre la integral :

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$$

Se realiza un cambio de variable $e^x = t \longrightarrow x = \ln t \longrightarrow dx = \dfrac{dt}{t}$, se reemplaza en la integral:

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{t + 1}{(t - 1)} \frac{dt}{t}$$

Gracias, al cambio de variable se ha transformado de una integral exponencial a una integral racional propia. Se aplica el método de fracciones parciales.

$$\frac{t + 1}{(t - 1)t} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t}$$

$$\frac{t + 1}{(t - 1)t} = \frac{At + B(t - 1)}{t(t - 1)}$$

Se simplifica:

$$t + 1 = At + B(t - 1)$$

Si, t = 1

$$t + 1 = At + B(t - 1) \longrightarrow 1 + 1 = A \longrightarrow A = 2$$

Si, t = 0

$$t + 1 = At + B(t - 1) \longrightarrow 0 + 1 = +B(0 - 1) \longrightarrow 1 = -B \longrightarrow B = -1$$

Se reemplaza los valores obtenidos:

$$\frac{t + 1}{(t - 1)t} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t}$$

$$\frac{t+1}{(t-1)t} = \frac{2}{t-1} + \frac{-1}{t}$$

Se integra a ambos lados:

$$\int \frac{t+1}{(t-1)t}dt = \int \left[\frac{2}{t-1} + \frac{-1}{t}\right]dt$$

Se aplica propiedades:

$$\int \frac{t+1}{(t-1)t}dt = 2\int \left[\frac{dt}{t-1}\right] - \int \left[\frac{dt}{t}\right]$$

Se integral:

$$\int \frac{t+1}{(t-1)t}dt = 2\ln|t-1| - \ln|t|$$

Finalmente:

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx = 2\ln|e^x-1| - \ln|e^x| + C$$

2. Encuentre la integral :

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$$

Se realiza un cambio de variable $e^x = t \longrightarrow e^x dx = dt$, se reemplaza en la integral:

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{du}{u + \dfrac{1}{u}} = \int \frac{udu}{u^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|(u^2+1)\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|(e^{2x}+1)\right| + C =$$

3. Encuentre la integral de :

$$\int \frac{dx}{a^x+1} \qquad\qquad Donde:\ a>0,\ a\neq 1$$

Se realiza un cambio de variable:

$$a^x = t \longrightarrow \ln a^x = \ln t, \longrightarrow x = \frac{\ln t}{\ln a}$$

$$x = \frac{\ln t}{\ln a} \longrightarrow dx = \frac{dt}{t\ln a}$$

Se reemplaza en la integral:

$$\int \frac{dx}{a^x+1} = \int \frac{dt}{t\ln a(t+1)} = \frac{1}{\ln a}\int \frac{dt}{t(t+1)} =$$

Se aplica fracciones parciales:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}$$

Se simplifica los denominadores:

$$1 = A(t+1) + Bt$$

Si t = 0:

$$1 = A(t+1) + Bt \longrightarrow 1 = A(0+1) \longrightarrow A = 1$$

Si t = -1:

$$1 = A(-1+1) + B(-1) \longrightarrow 1 = -B \longrightarrow B = -1$$

Se reemplaza los valores obtenidos:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} + \frac{-1}{t+1}$$

Se integra a ambos lados:

$$\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right] dt$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$\int \left[\frac{dt}{t}\right] - \int \left[\frac{dt}{t+1}\right] = \ln t - \ln(t+1)$$

Finalmente:

$$\int \frac{dx}{a^x+1} = \frac{1}{\ln a}\left[\ln a^x - \ln(a^x+1)\right] + C$$

4. Encuentre la integral :

$$\int \log_p x dx \qquad Donde: \ p > 0, \ p \neq 1$$

En estos tipos de ejercicios se representa el $\log_p$ por el $\ln(x)$; por lo tanto:

$$p^{\log_p(x)} = x$$

$$\log_p(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(p)}$$

Se reemplaza :

$$\int \log_p(x)dx = \int \frac{\ln(x)}{\ln(p)}dx = \frac{1}{\ln(p)}\int \ln(x)dx =$$

La integral obtenida y es una integral conocida:

$$\int \log_p(x)dx = \frac{1}{\ln(p)}\int \ln(x)dx = \frac{1}{\ln(p)}x(\ln(x)-1) + C$$

5. Encuentre la integral :

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx \qquad Donde: \ x > 0.$$

Se aplica el método de por partes:

$$\begin{aligned} g(x) &= (\ln(x))^2 & f'(x) &= \frac{dx}{x^2} \\ g'(x) &= \frac{2\ln(x)}{x}dx & \int f'(x) &= \int \frac{dx}{x^2} \\ & & f(x) &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx = -\frac{(\ln(x))^2}{x} + 2\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$$

Para la última integral obtenida, se vuelve aplicar el método de por partes:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(x) & f'(x) &= \frac{dx}{x^2} \\ g'(x) &= \frac{dx}{x} & \int f'(x) &= \int \frac{dx}{x^2} \\ & & f(x) &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \int \frac{-dx}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{dx}{x^2} =$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} =$$

Finalmente:

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx = -\frac{(\ln(x))^2}{x} + 2\left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right] + C$$

6.1.2. Ejercicios Propuestos de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

1. Encuentre la integral :

1. $\int (e^{3x} + \sqrt{e^x})dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-1}$
3. $\int \sqrt{e^x+1}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{2e^x+3}$
5. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x-1)^2}$
6. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$
7. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^x+e^{2x}}$
8. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-5e^{2x}}}$
9. $\int x^3(e^{3x})dx$
10. $\int \ln(x^2+1)dx$
11. $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
12. $\int (4+3x)^2\ln(x)dx$
13. $\int xa^x dx$
14. $\displaystyle\int \frac{xa^x}{a^x+1}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{3x}-1}$
16. $\int \sqrt{e^x-1}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^x-e^{2x}}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-e^{2x}}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-e^{2x}}$

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
2. $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$
3. $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$
4. $\int (e^x+e^{-x})^2dx$
5. $\displaystyle\int \frac{4e^x+6e^{-x}}{9e^x-4e^{-x}}dx$
6. $\int \sqrt{2e^x+4e^x+1}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln(x)}$
8. $\int (\ln(x))^2dx$
9. $\int (\ln(2+5x))dx$
10. $\int x^3(\ln(x^2+3))dx$
11. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\ln(x)}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\ln(x)}$
13. $\displaystyle\int \frac{a^{2x}}{a^x+1}dx$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^x-1}$
15. $\displaystyle\int \frac{a^x}{a^{2x}+1}dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x}{a^x+1}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^x-4}$

1. Encuentre la integral :

1. $\int x^2 e^{-x} dx$
2. $\int x^3 e^{-x^2} dx$
3. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$
4. $\int x \ln x dx$
5. $\int x^3 e^x dx$
6. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
7. $\int x^3 \ln x dx$
8. $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} dx$
9. $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2} dx$
10. $\int \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
11. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}} dx$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{a^x}} dx$
13. $\int \frac{dx}{2^x+1}$
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$
16. $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} dx$
17. $\int \frac{xa^x}{a^x+1} dx$
18. $\int \frac{dx}{e^{3x}-1}$
19. $\int \sqrt{e^x-1} dx$
20. $\int \frac{\cos^2 x dx}{e^x} dx$
21. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x-5}$

1. $\int \frac{(e^x-2)e^x dx}{e^x+1}$
2. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$
3. $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$
4. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$
5. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$
6. $\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx$
7. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$
8. $\int \frac{4e^x+6e^{-x}}{9e^x-4e^{-x}} dx$
9. $\int \sqrt{2e^x+4e^x+1} dx$
10. $\int \frac{dx}{x\ln(x)}$
11. $\int (\ln(x))^2 dx$
12. $\int (\ln(2+5x)) dx$
13. $\int x^3(\ln(x^2+3)) dx$
14. $\int \frac{x dx}{\ln(x)}$
15. $\int \frac{dx}{x^2\ln(x)}$
16. $\int \frac{a^{2x}}{a^x+1} dx$
17. $\int \frac{dx}{a^x-1}$
18. $\int \frac{a^x}{a^{2x}+1} dx$
19. $\int \frac{x}{a^x+1} dx$
20. $\int \frac{dx}{a^x-4}$
21. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

Capítulo 7

Integrales Definidas

7.1. Elementos Básicos de una Integral Definida

Se toma en consideración una función f(x), la cual, está definida, es continua, en el intervalo cerrado $[a,b]$. Se divide al intervalo $[a,b]$ en diferentes segmentos $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m$, los cuales, pueden ser de diferente longitud, pero lo mas cómodo, es que sean de igual longitud. A los segmentos, se los representa con P_m y son determinados con la ayuda de $n_m - 1$. Con lo cual, los números $x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n_{m-1}}$, en tal forma, que se puede escribir:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n_{m-1}} < x_{n_m} = b$$

Para facilidad, se define que : $a = x_0$; $b = x_{n_m}$. Se denomina al segmento $[x_{i-1}, x_i]$ donde $i = 1, 2, 3 \cdots, n_m$ que son los segmentos parciales del segmento P_m, y su longitud está definida por $[x_i - x_{i-1}]$, que se la obtiene de una definición básica de geometría. Se representa a estos segmentos como $\triangle x_i$ y como se puede apreciar, se obtiene una sucesión de elementos, que en este caso, de segmentos, $\{P_m\}$ y se lo denomina , la sucesión de segmentos normales, si cumplen con $\lim_{m \to \infty} P_m = 0$.

Simplemente, este limite nos da la información de que, si el número de segmentos se va incrementando, la longitud de ellos disminuye y tiende a cero.

Si, en el interior de cada uno de estos segmentos $\triangle x_i$, se toma un punto arbitrario c_i, por comodidad, muchas veces se toma el punto medio. Para cada uno de estos puntos, cualquiera, se puede calcular, el valor de $f(x = c_i)$, ya que la función f(x) está definida. Con estos dos elementos, se puede formar rectángulos, de base $\triangle x_i$ y su altura de valor $f(x = c_i)$ y por lo tanto, se puede calcular su área de cada uno de estos rectángulos.

Si a estas áreas de cada uno de estos rectángulos , se los representa con $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$, se puede formar una suma S_m de estás áreas de los rectángulos formados, que es una serie y ademas tendrá un valor definido:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m = \sum_{i=1}^{n_m} f(x = c_i) \triangle x_i$$

Si la sucesión, $\{S_m\}$ cuando $m \to \infty$, es convergente y tiende al mismo limite que la sucesión normal de $\{P_m\}$, independientemente de la forma de elegir el punto c_i, en el interior de cada uno de $\triangle x_i$, a la función f(x), se la denomina: la integral de la función en el intervalo $[a,b]$ y su simbología es:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Se puede demostrar que , para cualquier sucesión normal de $\{S_m\}$ y tiene limite independientemente de la forma de elegir el punto c_i, la función f(x) es integrable.

Una de las formas mas sencillas de formar sucesiones normales, es de trabajar con los puntos medios y en ese caso, se tiene:

$$n_m = 2^m, \qquad \triangle x_i = \frac{b-a}{2^m}$$

En algunos libros, se encuentra la identidad:

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(x = c_i) \triangle x_i \approx \int_a^b f(x)dx$$

Es conocida como, la definición de la integral definida en el intervalo $[a,b]$. El lado izquierdo de la identidad, también es conocida como la suma de Riemann. Que además, es una forma de calcular la integral de la función f(x).

Se puede demostrar que, si la función es continua en un intervalo cerrado, la función es integrable, en forma mas general, se puede indicar, si la función en un intervalo cerrado es continua y tiene un limite; entonces la función es integrable.

7.2. Interpretación Geométrica de una Integral Definida

Si, en el intervalo cerrado $[a,b]$ la función $f(x) \geq 0$ (positiva), el área limitada por : en su parte superior, por la función f(x), en su parte inferior, por el eje Ox y las rectas $x = a; x = b$, está área es igual a la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Si en el intervalo [a,b], la función $f(x) \leq 0$, (negativa) el área debajo de la función f(x) , es igual a:

$$-\int_a^b f(x)dx$$

Por lo tanto, el área definida anteriormente, se la puede expresar con la integral:

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

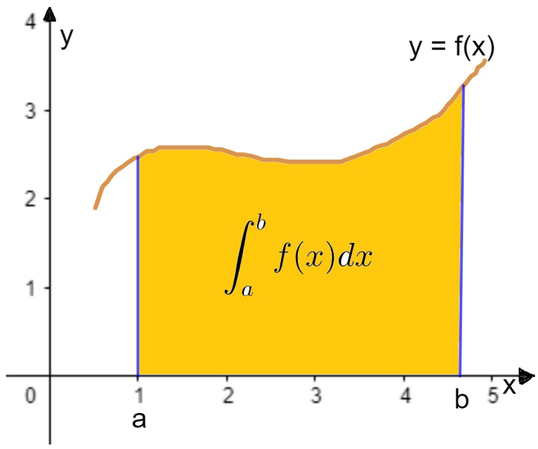


Figura 7.1

La integral $\int_a^b f(x)dx$ donde $a > b$, se entiende que : $-\int_a^b f(x)dx$; igualmente:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

7.3. Propiedades de una Integral Definida

1. Si se tiene que: $a \leq b \leq c$, entonces:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx =$$

Es conocida , como la propiedad de linealidad de las integrales con respecto al intervalo de integración, está propiedad es independiente de los valores a, b, c.

2. Una constante, se lo puede sacar delante del símbolo de integral definida:

$$\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$$

3. La integral de la suma de funciones es igual a la suma de integrales de cada una de las funciones:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Es lo que, se conoce como la linealidad de la integral con respecto a la función de integración.

4. La siguiente fórmula también es verdadera para la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a)$$

Donde k es un número que cumple la desigualdad $m \leq k \leq M$ donde m es el limite inferior, a M es el limite superior de la función f(x) en el intervalo [a,b].

En base a la propiedad de Darboux que dice: Una función continua toma todos los valores medios entre sus limites inferior y superior, lo cual , se puede escribir:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x=c)(b-a)$$

Donde c es un número que cumple la desigualdad $a \leq c \leq b$, si la función f(x) es continua en el intervalo [a,b].

5. La integral como función del limite superior: Si la función f(t) es continua en el intervalo [a,b], la función:

$$h(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Es continua e integrable con respecto a la variable 'x' en el intervalo [a,b] y en cada punto de este intervalo cumple la identidad h´(x) = f(x)

6. La relación entre la integral definida e indefinida: Si por F(x) representa la integral primitiva de la función f(x), continua en el intervalo [a,b], lo que significa, que si, F'(x) = f(x), cumple la relación:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde la diferencia $F(b) - F(a)$ no depende de la constante de integración.

El lado derecho de la identidad,se lo simboliza:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

Si las funciones u, v son funciones con respecto 'x' y tienen continua la derivada, entonces:

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

Este es la fórmula de integración por partes, para la integral definida.

7. Si la función g'(x) es una función continua, además, la función g(x) es una función creciente en el intervalo [a,b], a f(u) es una función continua en el intervalo [g(a), g(b)] entonces cumple la identidad:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

Que es la fórmula del cambio de variable para las integrales definidas.

7.3.1. Ejercicios Resueltos de Integrales Definidas

1. Encuentre el valor de la integral definida :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx$$

Se tiene dos diferentes funciones; por lo tanto, se aplica el método de por partes:

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & x & f'(x) & = & \sin(x)dx \\ g'(x) & = & dx & \int f'(x) & = & \int \sin(x)dx \\ & & & f(x) & = & -\cos(x) \end{array}$$

Se aplica el método:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx$$

$$= 0 + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right] = 1$$

2. Encuentre el valor de la integral definida :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$$

Se realiza un cambio de variable $\sin(x)_{=}u$ se reemplaza: Se aplica el método:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[1^3 - 0\right] = \frac{1}{3}$$

3. Encuentre el área limitada por: $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; el eje ' x '; y $x \in [-1,1]$

Se observa que, la función en cuestión es positiva para todo valor de ' x ',$y > 0$. Esta función es conocida y tiene enormes aplicaciones en la practica. Figura 7.2. En la solución del ejercicio se utiliza la integral básica:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$$

Por lo tanto, el área buscada es :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan(x)]_{-1}^{1} = [\arctan(1) - \arctan(-1)]$$

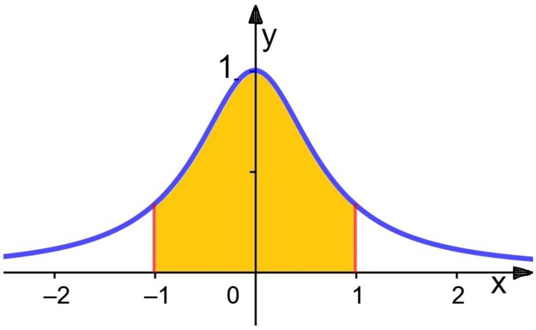


Figura 7.2

$$= \left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)\right] = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

4. Calcular el área limitada por $y^2 = 2x$ y la recta x = 8.

La figura dada es una parábola, es una figura simétrica y además, se habré con respecto el eje x positivo. Aplicando la definición de integral definida , se obtendría el área que está debajo de la parábola y sobre el eje x y por tanto, lo obtenido se debe multiplicar por dos, como se lo aprecia en la figura 7.3.

$$\int_0^8 f(x)dx = \int_0^8 \sqrt{2x}dx = \sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2}\frac{\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^8}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[8^{\frac{3}{2}} - 0\right] = \frac{64}{3}$$

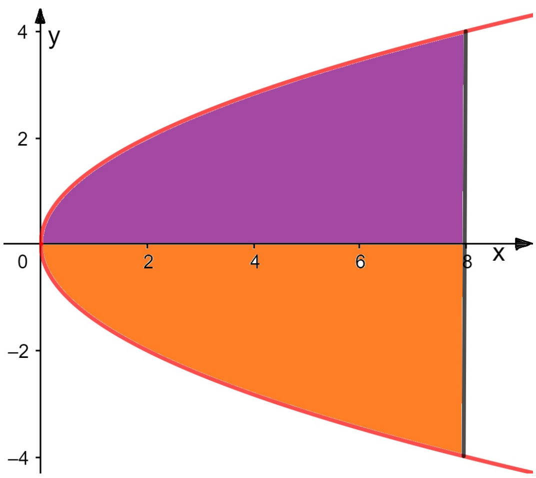


Figura 7.3

Se multiplica por dos, el área es igual : $\dfrac{128}{3}$

5. Calcular el área limitada por $y = x^3 + x^2 - 2x$; el eje x; si $x \in [-2, 2]$.

   Se aplica la fórmula:

$$\int_{-2}^{2} \left| x^3 + x^2 - 2x \right| dx$$

   Para su cálculo, se debe conocer el signo de la función $y = x^3 + x^2 - 2x$. Para lo cual, se debe encontrar sus raíces:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \longrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

   Por lo tanto, sus raíces son: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$
   El intervalo $[-2, 2]$ en función de las raíces , se puede formar tres intervalos: $[-2, 0], [0, 1], [1, 2]$, se determina el signo de la función en estos intervalos. En el primer y tercer intervalo la función es positiva y en el segundo es negativa, se puede escribir:

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x) dx +$$

$$+ \int_{1}^{2} (x^3 + x^2 - 2x) dx =$$

   Se calcula el área en cada uno de los intervalos:

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^{0} =$$

$$= 0 - \left[\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right] = -\left[-\frac{8}{3} \right] = \frac{8}{3}$$

$$= -\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x) dx = -\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{0}^{1} =$$

$$= -\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right] = \frac{5}{12}$$

$$= \int_{1}^{2} (x^3 + x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{1}^{2} =$$

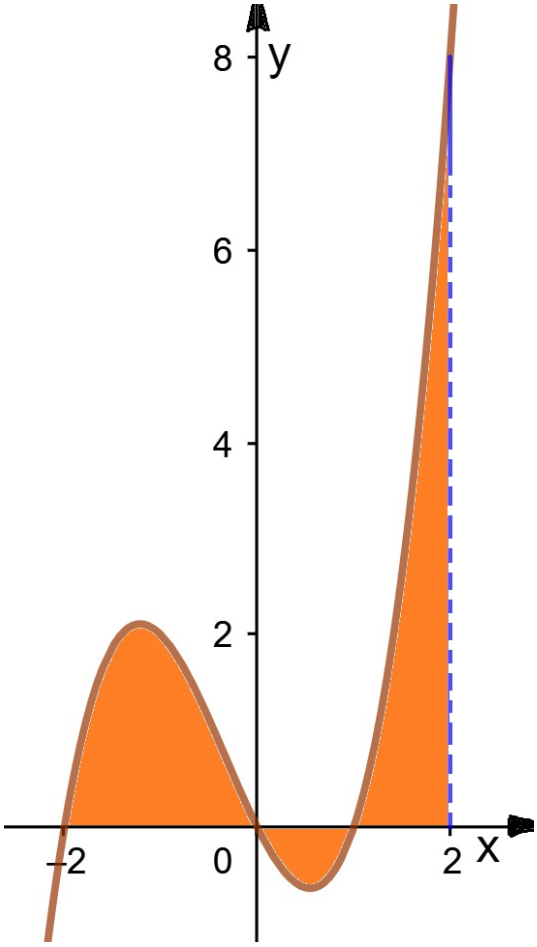


Figura 7.4

$$= \left[\frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 4 \right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right] = \frac{37}{12}$$

   El área total es igual : $A = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = \frac{37}{6}$

6. Calcular el área definida por:

$$I(\alpha) = \int_{0}^{1} \left(\frac{dx}{1 + 2x\cos(\alpha) + x^2} \right) \qquad donde \quad -\pi < \alpha < \pi$$

   Se analiza el discriminante del denominador:

$$\triangle = 4\cos^2(\alpha) - 4 = -4(\sin^2(\alpha))$$

   Se observa que: el $\triangle = 0$ para $\alpha = k\pi$. Para los demás valores de α el $\triangle < 0$. Por la presencia del parámetro α, se realiza el siguiente análisis:

1. Cuando $\alpha = k\pi$, en ese caso se tendría:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{1 + 2x\cos(\alpha) + x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{dx}{1 + 2x + x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{dx}{1 + 2x + x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{dx}{(x+1)^2} \right) = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

2. Se considera α en los intervalos: $-\pi < \alpha < 0; 0 < \alpha < \pi$ en cualquiera de los casos, la función a integrar es positiva.

$$I(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{1 + 2x\cos(\alpha) + x^2} \right) =$$

Se transforma a su forma canónica, el trinomio del denominador:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{(x + \cos(\alpha))^2 + 1 - \cos^2(\alpha)} \right) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{(x + \cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha)} \right)$$

Un cambio de variable: $x + \cos(\alpha) = t\sin(\alpha)$ Se deriva y se obtiene: $dx = \sin(\alpha)dt$

$$= \int_0^1 \left(\frac{dx}{(x + \cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha)} \right) = \int_0^1 \left(\frac{\sin(\alpha)dx}{(t\sin(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha)} \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\sin(\alpha)dx}{(t\sin(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha)} \right) = \frac{1}{\sin(\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{dt}{t^2 + 1} \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{\sin(\alpha)} \arctan t \right]_0^1 = \left[\frac{1}{\sin(\alpha)} \arctan\left(\frac{x + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) \right]_0^1$$

$$\left[\frac{1}{\sin(\alpha)} \arctan t \right]_0^1 = \left[\frac{1}{\sin(\alpha)} \arctan\left(\frac{x + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) \right]_0^1$$

$$\frac{1}{\sin(\alpha)} \left[\arctan\left(\frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) - \arctan\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) \right]$$

Se toma en consideración identidades trigonométricas; es decir:

$$\frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right); \qquad \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \cot(\alpha)$$

Se obtendría:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{1 + 2x\cos(\alpha) + x^2} \right) = \frac{1}{\sin(\alpha)} \left(\arctan\left(\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) - \arctan(cot(\alpha)) \right)$$

Para representar, en forma mas agradable la última integral, se considera dos números $\beta; \gamma$ y teniendo en mente que el dominio del arco-tangente es: $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$, se puede definir:

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}; \qquad \tan(\beta) = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}; \qquad \tan(\gamma) = \cot(\alpha)$$

En este caso, se obtiene:

$$\int_0^1 \left(\frac{dx}{1 + 2x\cos(\alpha) + x^2} \right) = \frac{\beta - \gamma}{\sin(\alpha)}$$

Si, $0 < \alpha < \pi$ en este caso $\beta = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad y \quad \gamma = -\frac{\pi}{2} - \alpha$ Finalmente se obtendría:

$$I(\alpha \neq 0) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{1 + 2x\cos(\alpha) + x^2} \right) = \frac{\alpha}{2\sin(\alpha)}$$

$$I(\alpha = 0) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{1 + 2x\cos(\alpha) + x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

7. Encuentre el valor de la integral definida :

$$\int_0^2 x^2 e^x dx$$

Se tiene dos diferentes funciones; por lo tanto, se aplica el método de por partes:

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & x^2 & f'(x) & = & e^x dx \\ g'(x) & = & 2xdx & \int f'(x) & = & \int e^x dx \\ & & & f(x) & = & e^x \end{array}$$

Se aplica el método:

$$\int_0^2 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x\right]_0^2 - \int_0^2 2xe^x dx = 4e^2 - \int_0^2 2xe^x dx$$

Se aplica el mismo método , para la integral que falta:

$$\int_0^2 2xe^x dx = 2\int_0^2 xe^x dx$$

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & x & f'(x) & = & e^x dx \\ g'(x) & = & dx & \int f'(x) & = & \int e^x dx \\ & & & f(x) & = & e^x \end{array}$$

$$\int_0^2 xe^x dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1$$

Finalmente:

$$\int_0^2 x^2 e^x dx = 4e^2 - (e^2 + 1) = 3e^2 - 1$$

8. Encuentre el valor de la integral definida :

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x) \cdot dx$$

Se tiene dos diferentes funciones; por lo tanto, se aplica el método de por partes:

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & x^2 & f'(x) & = & \sin(x)dx \\ g'(x) & = & 2xdx & \int f'(x) & = & \int \sin(x)dx \\ & & & f(x) & = & -\cos(x) \end{array}$$

Se aplica el método:

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x)dx = -\left[x^2\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x(-\cos(x))dx = -\left[\pi^2 \cdot \cos(\pi-) - 0\right] + \int_0^\pi 2x\cos(x)dx$$

$$= -\left[\pi^2 \cdot (-1)\right] - \int_0^{\pi} 2x\cos(x)dx = \left[\pi^2\right] + 2\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$$

Se tiene que integrar nuevamente; por lo tanto, se aplica nuevamente el método de por partes:

$$= \int_0^{\pi} x\cos(x)dx$$

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & x & f'(x) & = & \cos(x)dx \\ g'(x) & = & dx & \int f'(x) & = & \int \cos(x)dx \\ & & & f(x) & = & \sin(x) \end{array}$$

Se aplica el método:

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx = [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\sin(x))dx = [\pi \cdot \sin(\pi) - 0] - \int_0^{\pi} \sin(x)dx$$

$$= [\pi \cdot (0)] - \int_0^{\pi} \sin(x)dx = [0] - \int_0^{\pi} \sin(x)dx = -(-cos(x))_0^{\pi} =$$

$$= (cos(x))_0^{\pi} = \cos(\pi) - \cos(0) = -1 - 1 = -2$$

Finamente:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(x) \cdot dx = \pi^2 + 2 \cdot (-2) = \pi^2 - 4$$

9. Encuentre el valor de la integral definida :

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x) \cdot dx$$

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & e^x & f'(x) & = & \cos(x) \cdot dx \\ g'(x) & = & e^x dx & \int f'(x) & = & \int \cos(x)dx \\ & & & f(x) & = & \sin(x) \end{array}$$

Se aplica el método:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x)dx = [(e^x \sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (e^x \sin(x))dx = \left[e^{\pi}\sin(\pi) - e^0 \sin(0)\right] - \int_0^{\pi} e^x \sin(x)dx$$

Se tiene que integrar nuevamente; por lo tanto, se aplica nuevamente el método de por partes

$$= \int_0^{\pi} e^x \sin(x)dx$$

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & e^x & f'(x) & = & \sin(x)dx \\ g'(x) & = & e^x dx & \int f'(x) & = & \int \sin(x)dx \\ & & & f(x) & = & -\cos(x) \end{array}$$

Se aplica el método, se despeja la integral del ejercicio y se aplica los limites:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin(x) dx = [(e^x(-\cos(x))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (e^x(-\cos(x)))dx = -\frac{1}{2}\left[e^{\pi}+2\right]$$

7.3.2. Ejercicios Propuestos de Integrales Definidas

1. Calcule la integral:

1. $\displaystyle\int_3^5 \frac{x dx}{x^2-4}$
2. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} \qquad a>0$
3. $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{x^2+2x+1}$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1} dx$
6. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
8. $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) dx$
9. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$
10. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$
11. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$

1. $\displaystyle\int_3^5 \frac{3dx}{4x^2+4x-3}$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$
3. $\displaystyle\int_{-\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}} \frac{dx}{\sqrt{4+5x^2}}$
4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$
6. $\displaystyle\int_1^2 x \ln x dx$
7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$
8. $\displaystyle\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$
9. $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2+3x+2}$
10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+3\cos x}$
11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x$

2. Calcule la integral:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3dx}{4^2+4x-3}$
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$
3. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2} 3x\sqrt{x^2+4a^2}dx \qquad a>0$
5. $\displaystyle\int_{1}^{10} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$
6. $\displaystyle\int_{0}^{6} \frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}}$
7. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\arctan(x)dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{-x}dx$
9. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^2e^{-2x}dx$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2(x)dx$
11. $\displaystyle\int_{1}^{2} x(x^2+1)e^{x^2}dx$
12. $\displaystyle\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}dx \qquad a>0$
13. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}}$
14. $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}$

1. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$
2. $\displaystyle\int_{3}^{4} \sqrt{x^2-2x-1}dx$
3. $\displaystyle\int_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{3}{5}}} \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-4}}$
5. $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{e^xdx}{1+e^x}$
6. $\displaystyle\int_{1}^{3} \sqrt{x^2-4}dx$
7. $\displaystyle\int_{1}^{3} x\sqrt{5x^2+4}dx$
8. $\displaystyle\int_{1}^{3} x^2\sqrt{x^2-4x+3}dx$
9. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$
10. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2-5x+19}}$
11. $\displaystyle\int_{0}^{7} \sqrt[3]{x+1}dx$
12. $\displaystyle\int_{0}^{7} e^{\sin x}\sin(2x)dx$
13. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{3+2\cos x}$
14. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

3. Calcule la integral de:

1. $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} \frac{dx}{1+\cos(x)}$
2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{\cos^3(x)}dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2(x)}$
6. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$
7. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2(x)}{(1+\tan)^2}dx$

1. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{3+5\cos(x)}$
2. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2+\sin(x))^2}$
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)dx}{(25+\sin^2(x))}$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)dx}{\sqrt{1+\sin(x)}}$
5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos(x)dx$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4. Calcular el área común entre las parábolas $y = x^2 \quad y \quad y^2 = x$
5. Calcular el área común entre las parábolas $y^2 = x \quad y \quad x^2 = 8y$
6. Calcular el área común entre las figuras $y = x^3 \quad y \quad y = 4x$
7. Calcular el área común entre las figuras $y = 2x^3 \quad y \quad y^2 = x$
8. Calcular el área común entre las figuras $y = x^2 - x - 6 \quad y \quad y = -x^2 + 5x + 14$
9. Calcular el área común entre las figuras $y^2 = 8x \quad y \quad 8y = x^2$
10. Calcular el área común entre las figuras $y^2 = 2x \quad y \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$
11. Calcular el área común entre las figuras $y = x^2 \quad y \quad 2x - y + 3 = 0$
12. Calcular el área común entre las figuras $y = x^2, \quad y = \dfrac{x^2}{2} \quad y \quad y = 3x$
13. Calcular el área común entre las figuras $y = 2x - x^2 \quad y \quad x + y = 0$
14. Calcular el área común entre las figuras $xy = 4 \quad y \quad x + y = 5$
15. Calcular el área común entre las figuras $x^2 - 12x + y^2 = 0 \quad y \quad y^2 = 6x$
16. Calcular el área limitada por la figura $y = x\sin(4x)$ el eje x definida $0 \le x \le \dfrac{\pi}{8}$
17. Calcular el área limitada por la figura $y = xe^{-2x}$ el eje x definida $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

18. Calcule la integral de:

1. $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$
2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\tan x}{\cos^4} dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2}} dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(3+4\cos x)^3 dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{1+e^{2x}}$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x} dx$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x} dx$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} dx$
10. $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$
11. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$
12. Muéstrese que : $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int_1^2 \frac{e^x}{x}$
13. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2}$

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{3+5\cos(x)}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2+\sin(x))^2}$
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)dx}{(25+\sin^2(x))}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)dx}{\sqrt{1+\sin(x)}}$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos(x)dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
8. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2} dx$
9. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{9-x^2}dx$
10. $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$
11. $\displaystyle\int_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$
12. $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$
13. Muéstrese que : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{dx}{\arcsin x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}$

19. Calcule el área de una elipse , definida por: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
20. Calcule el área que se encuentra las funciones: $xy=1$ y $2x+2y-5=0$
21. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones: $y^2=x;\ \ y=x-2$ y el eje x.
22. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$y^2=2px,\quad x^2=2py$$
23. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$x^2+y^2=5,\quad y=\frac{2}{x}$$
24. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$y=x^3,\quad y=2x,\quad y=x$$
25. Calcule el área que se encuentra limitada por la función:
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$
26. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$y=x^3,\quad y=8,\quad y\ \ el\ \ eje\ \ Oy$$
27. Calcule el área que se encuentra limitada por la función: $\rho=a(1-\cos\varphi)$
28. Calcule el área que se encuentra limitada por la función: $\rho=\cos 3\varphi$
29. Calcule el área que se encuentra limitada por la función: $\rho=a\cos 2\varphi$
30. Calcule el área que se encuentra limitada por la función: $\rho=a\cos\varphi$
31. Calcule el área que se encuentra limitada por la función: $\rho=a\sin 2\varphi)$
32. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$y=\frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}\right];\ \ y=x;\ \ el\ \ eje\ \ Ox\ \ y\ \ el\ \ eje\ \ Oy$$
33. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$yx=a^2,\ \ x=a,b=2a,\ \ y\ \ el\ \ eje\ \ Ox$$
34. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$y=4-x^2;\ \ y\ \ el\ \ eje\ \ Ox$$
35. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$y=4x-x^2;\ \ y=0;\ \ x=1;\ \ x=-3$$
36. Calcule el área que se encuentra limitada por las funciones:
$$y=x^4-4x^2;\ \ y=4x^2$$
37. Calcule el área que se encuentra limitada por la función:
$$9ay^2=x(3a-x^2)$$

Capítulo 8

Aplicaciones de Integrales Definidas

1. Cálculo del Área cuando la función está en su forma paramétrica o Polar
   1.1 Ejercicios Resueltos de Calculo del Área su en forma Paramétrica o Polar
   1.2 Ejercicios Propuestos de Calculo del Área su en forma Paramétrica o Polar
2. Cálculo de la Longitud Arco
   2.1 Ejercicios Resueltos de la Longitud de Arco
   2.2 Ejercicios Propuestos de la Longitud de Arco
3. Cálculo del Volumen y Área de una superficie por Revolución
   3.1 Ejercicios Resueltos del Volumen y Área de superficie por Revolución
   3.2 Ejercicios Propuestos del Volumen y Área de superficie por Revolución
4. Momento de Inercia, Momento Estático y el Centro de Gravedad.
   4.1 Ejercicios Resueltos de Momentos y de Centro de Gravedad
   4.2 Ejercicios Propuestos de Momentos y de Centro de Gravedad

8.1. Cálculo del Área cuando la Función está en su Forma Paramétrica o Polar

En todas las aplicaciones de calculo integral, se utiliza una de las formas de representar a la función. La decisión de cual utilizar depende de varios factores, entre ellos: la estructura de la función, que propiedad o aplicación, se este calculando. A una función, se la puede representar en una de las tres diferentes formas:

1. **Forma cartesiana**. Está forma, es la mas común y la más conocida por todas aquellas personas, que en una u otra forma tienen contacto con la matemática. Su representación es: y = f(x), lo que nos indica, que entre la variable ’ x ’ y la variable ’ y ’ existe una relación dada, por ejemplo:

$$y = 3x + 2; \quad y = \ln x;; \quad y = \sin^2 x \tag{8.1}$$

   Si la curva de la figura está representada en su forma cartesiana; es decir, y = f(x), con lo cual, los conocimientos de calculo diferencial son muy beneficiosos y fácilmente permite definir: cuando una función es creciente: esto se lo define, cuando su primera derivada es positiva. Decreciente, si su primera derivada es negativa. Como también, definir si es, acotada o no; continua o no. Además, se puede definir, si la función y = f(x), es positiva o negativa, lo cual, define si la función y = f(x), está sobre el eje x o está debajo del mismo.

2. **Forma paramétrica.**. Una curva está definida con ecuaciones paramétricas, si tiene la forma : $x = g(t)$; $y = h(t)$, donde las funciones g(t) y h(t) son continuas en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ y además, la función g(t), cumple con la condición, de que es creciente, ver figura 8.0, si tiene, en este intervalo, la primera derivada es positiva y continua. El área de la función está limitada por:, el eje Ox y las rectas $x = x_1$; $x = x_2$ cuando $x_1 = g(t_1)$; $x_2 = g(t_2)$, se la calcula con la ecuación:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \left|y\right| dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) dt =$$

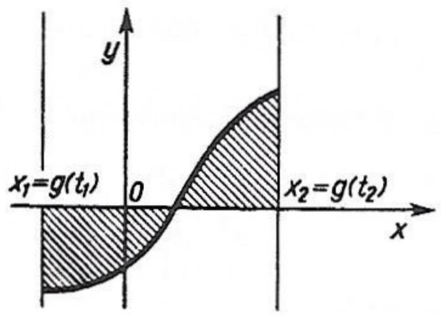


Figura 8.0

   Si, cumple con las mismas condiciones, pero la función g(t) es decreciente, ver figura 8.2, en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ el área, se la calcula con la fórmula:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \left|y\right| dx = -\int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) dt =$$

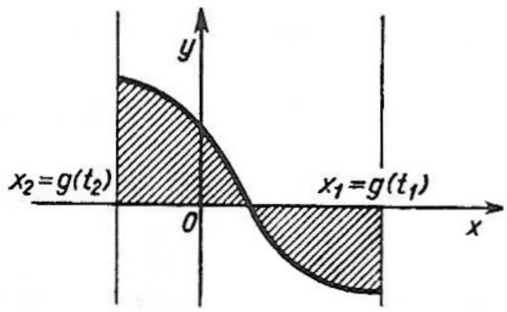


Figura 8.1

3. **Forma polar**. La curva está representada en coordenadas polares; es decir, $\rho = f(\theta)$. La función es positiva, continua en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y si además cumple con: $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, el área limitada por la curva $\rho = f(\theta)$, ver figura 8.3 y los radios salientes de amplitud α, β, se la define con la fórmula:

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta =$$

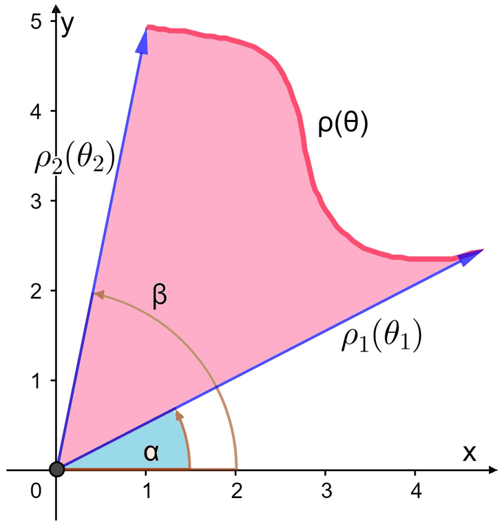


Figura 8.2

Para la demostración de está última fórmula, se toma en consideración una curva de ecuación $\rho = f(\theta)$, donde $f(\theta)$ es una función continua en el intervalo $[\alpha, \beta]$, ver figura 8.3.

Se designa a $W(\theta)$, como el área limitada por el radio vector $\overrightarrow{OA}$ que le corresponde a su amplitud α, el radio vector $\overrightarrow{OK}$, que le corresponde a su amplitud θ y el arco $\widehat{AK}$. Al ángulo θ le damos un aumento de $\Delta\theta$; por lo tanto, en la distancia ρ, se ha producido un aumento $\Delta\rho = ML$.

El área ha aumentado en un ΔW definida por segmento OKL. Queda definido:

$$OK = \rho, \qquad OL = \rho + \Delta\rho \qquad arcos \;\; MK, NL$$

Como ρ es función creciente del ángulo θ, se puede obtener la relación:

$$\text{área sector } OKM < \Delta W < \text{área sector } ONL \tag{8.2}$$

Se recuerda las fórmula del área de un sector circular:

$$\text{Área } \widehat{OKM} = \frac{1}{2}\rho \cdot \widehat{KM} = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \Delta\theta = \frac{1}{2}\rho^2 \Delta\theta$$

Y similar para :

$$\text{Área } \widehat{ONL} = \frac{1}{2} \cdot (\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\theta$$

Lo que permite escribir:

$$\frac{1}{2}\rho^2 \cdot \Delta\theta < \Delta W < \frac{1}{2} \cdot (\rho + \Delta\rho)^2 \cdot \Delta\theta$$

Como $\Delta\theta > 0$, se divide la desigualdad para $\Delta\theta$

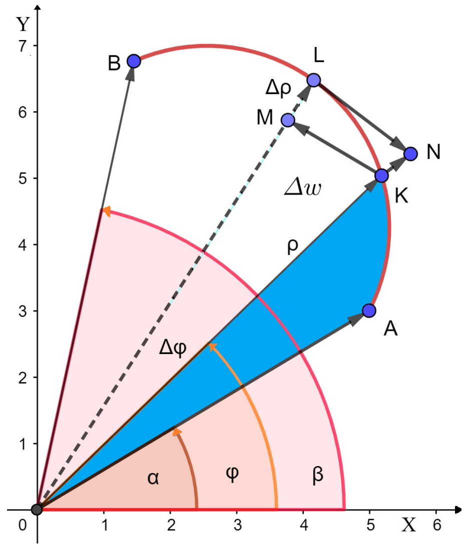


Figura 8.3

$$\frac{1}{2}\rho^2 < \frac{\Delta W}{\Delta \theta} < \frac{1}{2} \cdot (\rho + \Delta\rho)^2$$

Si se considera que:

$$\Delta\theta \to 0 \qquad \Delta\rho \to 0 \qquad (\rho + \Delta\rho)^2 \to \rho^2$$

$$\frac{\Delta W}{\Delta\theta} \to W'(\theta) = \frac{dW}{d\theta}$$

Finalmente:

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

8.1.1. Ejercicios Resueltos de cálculo del Área cuando la Función está en su Forma Paramétrica o Polar

1. Calcular el área limitada por: $x = a\cos(t)$; $y = b\sin(t)$; $a > 0$; $b > 0$, el parámetro t, se encuentra en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Se puede cambiar la estructura de la ecuaciones:

$$\frac{x}{a} = \cos(t); \qquad \frac{y}{b} = \sin(t)$$

Se eleva ambos lados de las ecuaciones:

$$\left[\frac{x}{a}\right]^2 = \cos^2(t); \qquad \left[\frac{y}{b}\right]^2 = \sin^2(t)$$

Se suma estás ecuaciones:

$$\left[\frac{x}{a}\right]^2 + \left[\frac{y}{b}\right]^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t)$$

Se obtiene:

$$\left[\frac{x}{a}\right]^2 + \left[\frac{y}{b}\right]^2 = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se observa, que el área limitada es por una elipse. Se aprecia que, $x = a\cos(t)$ es una función decreciente en el intervalo $0 \le t \le \pi$ su derivada, $dx = -a\sin(t)dt$; es decir, es decreciente en el intervalo $0 \le t \le \pi$; por lo tanto , es negativa. La parte $y = b\sin(t)$, es una función creciente. Lo cual, nos indica, que fórmula se debe aplicar:

$$P_1 = -\int_0^{\pi} b\sin(t)(-a\sin(t))dt = ab\int_0^{\pi} \sin^2(t)dt$$

En el intervalo $\pi \le t \le 2\pi$, la función $x = a\cos(t)$ es positiva, es creciente; por lo tanto, el área del intervalo $\pi \le t \le 2\pi$, se aplica la fórmula:

$$P_2 = \int_{\pi}^{2\pi} b\sin(t)(a\sin(t))dt = ab\int_{\pi}^{2\pi} \sin^2(t)dt$$

La suma del área total; es decir:

$$P = P_1 + P_2 == ab\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt$$

La integral $ab\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = ab\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = ab\pi$

2. Calcular el área limitada por:

$$x = r(t - \sin(t)); \qquad y = r(1 - \cos(t)), \quad r > 0$$

El parámetro t, se encuentra en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Se analiza su derivada; por lo tanto:

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - cos(t))$$

Como $1 - \cos(t) \ge 0$, lo que significa que $\frac{dx}{dt} \ge 0$; es decir: $x = r(t - \sin(t))$ es creciente:

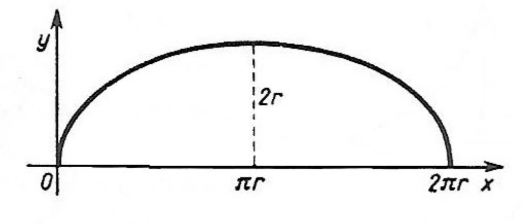


Figura 8.4

$$P = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos(t))r(1 - \cos(t))dt = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos(t))^2 dt =$$

$$P = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos(t))^2 dt = r^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin(t) + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2$$

3. Calcular el área limitada por:

$$x = a\cos^3(t)); \qquad y = a\sin^3(t)), \quad a > 0$$

El parámetro t, se encuentra en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

En el intervalo $O \le t \le \pi$, la función $x = a\cos^3(t)$ es negativa, por lo tanto , es decreciente y se aplica la fórmula con el signo negativo. En el intervalo $\pi \le t \le 2\pi$, la función es positiva , es creciente, lo que significa que, se aplicará la fórmula con el signo positivo:

La figura analizada, está en la figura 8.4. Como se aprecia es simétrica con el eje 'x' y con el eje 'y'. Por lo tanto, se podría calcular el área en el intervalo $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ y se lo puede escribir $P = P_1 + P_2$:

$$P' = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|a\sin^3(t)\right|(-3a\cos^2(t)\sin(t))dt =$$

$$P' = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)(\cos^2(t))dt =$$

El área buscada se la representa:

$$P = 4P'$$

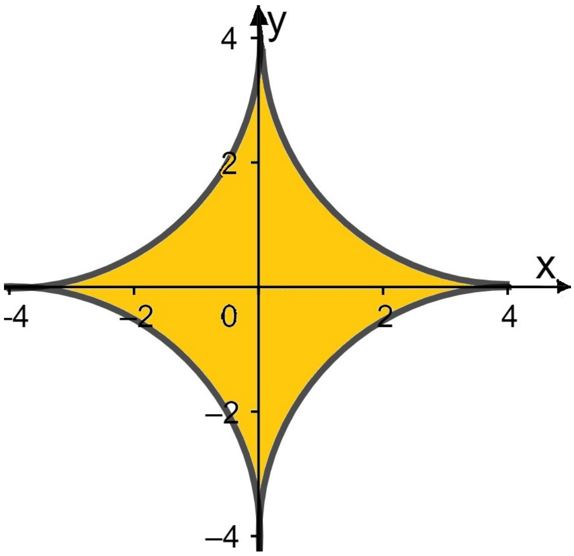


Figura 8.5

Se calcula la integral obtenida:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)(\cos^2(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)(1-\sin^2(t))dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t))dt =$$

Estas dos integrales ya fueron integradas en el capitulo de integrales trigonométricas; por lo tanto;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)dt = \frac{3}{8}t - \frac{3}{8}\sin(t)\cos(t) - \frac{1}{4}\sin^3(t)\cos(t)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t))dt = \left[\frac{5}{16}t - \frac{5}{16}\sin(t)\cos(t) - \frac{5}{24}\sin^3(t)\cos(t) - \frac{1}{6}\sin^5\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

La diferencia de estás dos integrales da como resultado:

$$= \left[\frac{1}{16}t - \frac{1}{16}\sin(t)\cos(t) - \frac{1}{24}\sin^3(t)\cos(t) + \frac{1}{6}\sin^5(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}$$

El área total seria igual a:

$$P = 4\cdot\frac{3\pi a^2}{32} = \frac{3}{8}\pi a^2$$

Si del sistema de ecuaciones, se despeja:

$$x = a\cos^3(t)); \qquad y = a\sin^3(t)),$$

$$\frac{x}{a} = \cos^3(t)); \qquad \frac{y}{a} = \sin^3(t)),$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos(t)); \qquad \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin(t)),$$

Se eleva al cuadrado ambos lados de las ecuaciones:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2(t)); \qquad \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2(t)),$$

Se suma ambas ecuaciones:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2(t) + \cos^2(t); = 1,$$

Se obtiene finalmente:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

8.2. Cálculo de la Longitud de Arco

Si una curva, está definida por la función de la forma f(x), además, está función, en el intervalo $a \leq x \leq b$ tiene continua su derivada, entonces, la longitud de arco, formado por está función, en un intervalo dado, se la calcula con la fórmula expresada en su forma cartesiana:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

El diferencial de la longitud de arco, está definida, en su forma cartesiana, por:

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Si la curva, está dada en su forma paramétrica, con la ayuda de las ecuaciones, x = g(t), y = h(t). Las funciones g(t), h(t), en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, son continuas y su longitud de arco no se repite, entonces la longitud de arco, se define:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Su demostración, está basada en función de la fórmula de longitud de arco, obtenida para la forma cardinal; es decir:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} dx =$$

Suma de fracciones:

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dx}{\frac{dx}{dt}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Y su diferencial, de la longitud de arco, en su forma paramétrica:

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

Si la curva, está dada en su forma polar $\rho = f(\theta)$. La función $f(\theta)$, en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$, su derivada es continua y su longitud de arco arco, en este intervalo no se repite, en ese caso la fórmula :

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Su diferencial es:

$$dL = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Para verificar, si la longitud de arco, se repite o no,en un intervalo dado, se revisa que: $\beta - \alpha \leq \pi$ o también, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, en cualquiera de los dos casos, la función, $\rho = f(\theta)$, de seguro, no tiene partes repetidas, en el intervalo analizado.
La demostración de su expresión matemática, para forma polar, es la siguiente:
Primero, su demostración, se basa en la fórmula de la longitud de arco en su forma paramétrica; es decir:

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

Cada punto, par ordenado en el plano cartesiano, del intervalo cerrado en que se analiza la función f(x), existe una relación biunívoca entre la abscisa y la ordenada; por lo tanto, para cada valor de x e y se lo puede escribir y reemplazar:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \qquad y = \rho \cdot \sin\varphi$$

Se puede generalizar estás relaciones y escribirlas:

$$x = f(\rho) \cdot \cos\varphi, \qquad y = f(\rho) \cdot \sin\varphi$$

Se deriva, poniendo atención que el lado derecho está formado por dos funciones con respecto a ρ; por lo tanto, se debe aplicar la propiedad de la derivada del producto de dos funciones:

$$x' = (f(\rho) \cdot \cos\varphi)' \quad \rightarrow \quad dx = [f'(\rho) \cdot \cos\varphi + f(\rho)(-\sin\varphi)]\, d\varphi$$

$$y' = (f(\rho) \cdot \sin\varphi)' \quad \rightarrow \quad dy = [f'(\rho) \cdot \sin\varphi + f(\rho)(\cos\varphi)]\, d\varphi$$

Se eleva al cuadrado:

$$d^2x = (f'(\rho)\cos\varphi + f(\rho)(-\sin\varphi))^2 \;\; \rightarrow \;\; d^2x = f'^2(\rho)\cos^2\varphi - 2f'(\rho)f(\rho)(\sin\varphi)\cos\varphi + f^2(\rho)(\sin^2\varphi)d^2\varphi$$

$$d^2y = (f'(\rho)\sin\varphi + f(\rho)(\cos\varphi))^2 \;\; \rightarrow \;\; d^2y = f''^2(\rho)\sin^2\varphi + 2f(\varphi)f(\rho)(\sin\varphi)\cos\varphi + f^2(\rho)(\cos^2\varphi)d^2\varphi$$

Se suma y simplifica estás dos identidades, se obtiene:

$$d^2x + d^2y = \left[f'^2(\rho)\cos^2\varphi + f^2(\rho)(\sin^2\varphi) + f'^2(\rho)\sin^2\varphi + f^2(\rho)(\cos^2\varphi)\right] d^2\varphi$$

Se simplifica y se obtiene:

$$d^2x + d^2y = \left[f'^2(\rho)\left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right] + f^2(\rho)\left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right]\right] d^2\varphi$$

$$d^2x + d^2y = \left[f'^2(\rho) + f^2(\rho)\right] d^2\varphi$$

Se obtiene la raíz de la suma:

$$\sqrt{d^2x + d^2y} = \sqrt{[f^2(\rho) + f'^2(\rho)]\, d^2\varphi} = \sqrt{\rho^2 + f'^2(\rho)} d\varphi = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

Su diferencial seria igual:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

Finalmente la longitud de arco en su forma polar:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} \quad \rightarrow \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (f'(\rho))^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + f'^2(\rho)} d\varphi$$

La longitud de arco de cualquier curva, se define como el limite de la longitud de la linea quebrada inscrita en la curva, con la condición de que la cantidad de lados de la linea quebrada crezca al infinito, al mismo instante que la longitud de de estos lados tiendan a cero. Se demuestra la fórmula de la longitud de arco:

Se considera una función y = f(x), que es continua y tiene su primera derivada f'(x) en el intervalo $[a,b]$. Sobre el gráfico de la función y = f(x) se inscribe la linea quebrada (color rojo) en el mismo intervalo, ver figura 8.6. Se define la sucesión de pares ordenados M_i, desde el inicio del intervalo hasta el final del mismo:

$$M_0(x_0, y_0), \cdots M_k(x_k, y_k), \cdots M_n(x_n, y_n),$$

Donde los valores de ordenadas y abscisas forman también sucesiones; es decir:

$$a = x_0 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = b$$

$$y_0 = f(x_0), \cdots, y_k = f(x_k), \cdots, y_n = f(x_n),$$

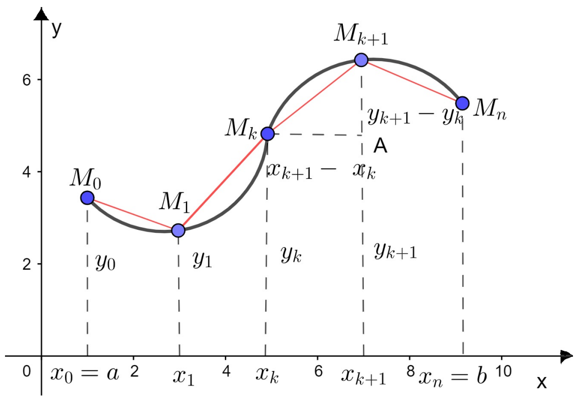


Figura 8.6

La longitud de cada uno de los segmentos de la linea quebrada, se la puede definir aplicando Pitagoras:

$$\overline{M_k M_{k+1}} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

Se recuerda la ecuación de la recta o el teorema del valor medio, aquí se aplico le ecuación de la recta:

$$y_{k+1} - y_k = m(x_{k+1} - x_k) \qquad \rightarrow \qquad y_{k+1} - y_k = f'(x_{\xi})(x_{k+1} - x_k)$$

donde: $x_k < x_{\xi} < x_{k+1}$. Se reemplaza en el segmento $\overline{M_k M_{k+1}}$:

$$\overline{M_k M_{k+1}} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (x_{k+1} - x_k)^2 f'^2(x)} = \sqrt{1 + f'^2(x)}(x_{k+1} - x_k) = \sqrt{1 + f'^2(x)}(\Delta x_k)$$

La suma de todos estos segmentos de la linea quebrada en el intervalo $[a,b]$ y después al tomar el limite cuando $\Delta x_k \rightarrow 0$, se obtiene:

$$l_n = \lim_{\Delta k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{M_k M_{k+1}} = \lim_{\Delta k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(x)}(\Delta x_k) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

8.2.1. Ejercicios Resueltos de Longitud de Arco

1. Calcular la longitud de arco de la parábola $y = x^2$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$ Se calcula la derivada $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

Se realiza un cambio e variable $2x = t \longrightarrow 2dx = dt$, y sus nuevos limites $0 \leq t \leq 4$, se reemplaza:

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{1 + (t)^2} dt$$

Se obtuvo una integral irracional, en el capitulo 3, se analizo este tipo de integrales; por lo tanto:

$$L = \frac{1}{4}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{4}\ln(t+\sqrt{t^2+1})$$

Se regresa a la variable x:

$$L = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{4}\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})\right]_0^2$$

$$L = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17}) - \frac{1}{4}\ln(1)$$

Finalmente:

$$L = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})$$

2. Calcule la longitud de arco del cicloide, definida por:

$$x = a\cos^3(t); \qquad y = a\sin^3(t) \qquad a > 0$$

El parámetro t pertenece al intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ Se calcula las derivadas con respecto al parámetro t.

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2(\sin(t)); \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2(t)\cos(t)$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^4(t)\sin^2(t) + 9a^2\sin^4(t)\cos^2(t)dt}$$

$$= \int_0^{2\pi} 3a\sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))}dt$$

Pero:

$$\sin^2(t)+\cos^2(t) = 1; \qquad \sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)} = |\sin(t)\cos(t)| = \frac{1}{2}|\sin(2t)|$$

Se reemplaza y se obtiene:

$$= \int_0^{2\pi} 3a\sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))}dt = \frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin(2t)|\,dt$$

La figura es simétrica con respecto el eje x y el eje y; por lo tanto, se puede calcular el área con el valor de t: $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ multiplicado por 4:

$$\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin(2t)|\,dt = \frac{3}{2}a\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a\cdot 4 = 6a$$

3. Calcule la longitud de arco del cicloide, definida por:

$$x = a(t-\sin(t)); \qquad y = a(1-\cos(t)) \qquad a > 0$$

El parámetro t pertenece al intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ Se calcula las derivadas con respecto al parámetro t.

$$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos(t)); \qquad \frac{dy}{dt} = a\sin(t)$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos(t))^2 + a^2\sin^2(t)dt} =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2+\sin^2(t)}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t)}dt$$

$$a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t)}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos(t)+1}dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}dt =$$

Se aplica identidades trigonométricas:

$$1-\cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Se reemplaza:

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt$$

En los limites de integración $0 \le t \le 2\pi$, el $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \ge 0$; por lo tanto:

$$L = 2a\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2a\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8a$$

4. Calcule la longitud de arco de la figura espiral logarítmica que se lo presenta: $\rho = ae^{k\theta}$, $a > 0$; $k \neq 0$ y $0 \le \theta \le \alpha$.

$$\rho = ae^{k\theta}; \qquad \frac{d\rho}{d\theta} = ake^{k\theta}$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\alpha \sqrt{\left(ae^{k\theta}\right)^2 + \left(ake^{k\theta}\right)^2} d\theta$$

$$= a\int_0^\alpha \sqrt{e^{2k\theta} + k^2\left(e^{2k\theta}\right)}d\theta = a\int_0^\alpha \sqrt{(1+k^2)e^{2k\theta}}d\theta$$

$$= a\sqrt{1+k^2}\int_0^\alpha e^{k\theta}d\theta = a\sqrt{1+k^2}\left[\frac{1}{k}e^{k\theta}\right]_0^\alpha$$

$$L = a\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\left[e^{k\alpha}-1\right]$$

5. Calcular la longitud de arco de la espiral logarítmica definida por la relación $\rho = e^\varphi$ en el intervalo $0 \le \varphi \le 2\pi$. Se conoce que:

$$x = \rho\cos\varphi = e^\varphi\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi = e^\varphi\sin\varphi$$

Se deriva estás expresiones matemáticas expresadas en su forma polar:

$$x = \rho\cos\varphi = e^\varphi\cos\varphi \quad \rightarrow \quad dx = (e^\varphi\cos\varphi - e^\varphi\sin\varphi)d\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi = e^\varphi\sin\varphi \quad \rightarrow \quad dy = (e^\varphi\sin\varphi + e^\varphi\cos\varphi)d\varphi$$

Se eleva al cuadrado cada elemento:

$$dx = (e^\varphi\cos\varphi - e^\varphi\sin\varphi)d\varphi \quad \rightarrow \quad d^2x = (e^\varphi\cos\varphi - e^\varphi\sin\varphi)^2d^2\varphi$$

$$dy = (e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}\cos\varphi)d\varphi \quad \rightarrow \quad d^2y = (e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}\cos\varphi)^2 d^2\varphi$$

Se desarrolla los binomios:

$$d^2x = (e^{\varphi}\cos\varphi - e^{\varphi}\sin\varphi)^2 d^2\varphi = (e^{2\varphi}\cos^2\varphi - 2e^{2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + e^{2\varphi}\sin^2\varphi)d^2\varphi$$

$$d^2y = (e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}\cos\varphi)^2 d^2\varphi = (e^{2\varphi}\sin^2\varphi + 2e^{2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + e^{2\varphi}\cos^2\varphi)d^2\varphi$$

Se suman y se simplifican las expresiones obtenidas:

$$d^2x + d^2y = \left[e^{2\varphi}\cos^2\varphi + e^{2\varphi}\sin^2\varphi + e^{2\varphi}\sin^2\varphi + e^{2\varphi}\cos^2\varphi\right]d^2\varphi$$

$$\frac{d^2x}{d^2\varphi} + \frac{d^2y}{d^2\varphi} = \left[e^{2\varphi}\cos^2\varphi + e^{2\varphi}\sin^2\varphi + e^{2\varphi}\sin^2\varphi + e^{2\varphi}\cos^2\varphi\right]$$

$$\frac{d^2x}{d^2\varphi} + \frac{d^2y}{d^2\varphi} = \left[e^{2\varphi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + e^{2\varphi}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\right]$$

$$\frac{d^2x}{d^2\varphi} + \frac{d^2y}{d^2\varphi} = e^{2\varphi}\left[(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\right]$$

$$\frac{d^2x}{d^2\varphi} + \frac{d^2y}{d^2\varphi} = e^{2\varphi}[2]$$

Se aplica la raíz a ambos lados de la identidad:

$$\sqrt{\frac{d^2x}{d^2\varphi} + \frac{d^2y}{d^2\varphi}} = \sqrt{e^{2\varphi}[2]} = \sqrt{2}\cdot e^{\varphi}$$

Se calcula la integral de la longitud de arco:

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^{\varphi}d\varphi =$$

$$L = \int_0^{2\pi} e^{\varphi}d\varphi = \sqrt{2}\,[e^{\varphi}]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$$

8.2.2. Ejercicios Propuestos de Longitud de Arco

1. Calcule la longitud de arco de:

   1. $y^2 = 4x^3;\quad y > 0;\quad 0 \leq x \leq \dfrac{8}{9}$
   2. $9y^2 = 2x^3;\quad y > 0;\quad 0 \leq x \leq 2$
   3. $9y^2 = x^3;\quad y > 0;\quad 0 \leq x \leq 12$
   4. $2y^2 = x^3;\quad y > 0;\quad 0 \leq x \leq 2$
   5. $y^2 = 2x - x^2;\quad y > 0;\quad 0 \leq x \leq 1$
   6. $y^2 = 2\sqrt{x};\quad y > 0;\quad 0 \leq x \leq 1$

   1. $9y^2 = 4x^3;\quad 0 \leq x \leq 3$
   2. $3y^2 = 4x^3;\quad 0 \leq x \leq 1$
   3. $2y^2 = 3x^3;\quad 0 \leq x \leq 2$
   4. $y = 2\sqrt{x};\quad 1 \leq x \leq 9$
   5. $2y^2 = x - 2x^2;\quad 1 \leq x \leq 9$
   6. $y = 2\sqrt{3}x;\quad 0 \leq x \leq 1$
   7. $y = e^x;\quad 0 \leq x \leq 1$

2. Calcule el arco de la curva y = $\ln(\sin(x));\quad x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3. Calcule el arco de la curva $y = 1 - \ln(\cos(x));\quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

4. Calcule el arco de la curva $y = a\cosh\left[\dfrac{x}{a}\right]; a > 0;\quad x \in [-a, a]$

5. Calcule el arco de la curva $y = \ln(x);;\quad, \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2}$
6. Calcule el arco de la curva $y = \ln(1-x^2);\quad, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
7. Calcule el arco de la curva $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln(y);\quad, 1 \leq y \leq 2$
8. Calcule el arco de la curva $y^2 = \frac{x^3}{2a-x};\quad, 0 \leq x \leq \frac{5}{3}$
9. Calcule el arco de la curva $r = a(1+\cos(\theta));\quad a > 0;\quad, 0 \leq \theta \leq \pi$
10. Calcule el arco de la curva $r = a\theta;\quad a > 0;\quad, 0 \leq \theta \leq 1$
11. Calcule el arco de la curva $r = \frac{a}{\theta};\quad a > 0;\quad, \frac{2}{3} \leq \theta \leq \frac{3}{4}$
12. Calcule el arco de la curva $r = 2a\cos(\theta);\quad a > 0;\quad, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
13. Calcule el arco de la curva $r = \frac{p}{1+\cos(\theta)};\quad a > 0;\quad, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
14. Calcule el arco de la curva $x = t^2; y = t - \frac{1}{3}t^3;\quad a > 0;\quad, 0 \leq t \leq \sqrt{3}$
15. Calcule el arco de la curva $x = a(\cos(t) + t\sin(t); y = a(\sin(t) - t\cos(t) - \frac{1}{3}t^3;\quad a > 0;\quad,\quad 0 \leq t \leq \pi$
16. Calcule el arco de la curva $x = 2t\cos(t) + (t^2-2)\sin(t); y = 2t\sin(t) - (t^2-2)\cos(t) - \frac{1}{3}t^3;\quad,\quad 0 \leq t \leq \pi$
17. Calcule el arco de la curva $x = a\cos^5\left(\frac{t}{2}\right); y = a\sin^5\left(\frac{t}{2}\right);\quad,\quad 0 \leq t \leq \pi$
18. Calcule el arco de la curva $x = 2a\sin^2(t); y = 2a\sin^2(t)\tan(t);\quad a > 0,\quad 0 \leq t \leq t_1$
19. Calcule el arco de la curva $x = 5\cos(t)(1+\cos(t)); y = 5\sin(t)(1+\cos(t));\quad a > 0,\quad 0 \leq t \leq 2\pi$
20. Calcule el arco de la curva $x = a\cos^4(t); y = a\sin^4(t);\quad a > 0,\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
21. Calcule el arco de la curva $x = a\cos^5(t); y = a\sin^5(t);\quad a > 0,\quad 0 \leq t \leq a$
22. Calcule el arco de la curva $y = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2};;\quad,\quad -1 \leq x \leq 1$
23. Calcule la longitud de arco de la parábola $y^2 = 4(x-1)$ desde su vértice hasta la ordenada x = 2.
24. Calcule la longitud de arco del asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
25. Dada la cardiode $\rho = a(1+\cos\varphi)$
    a) Calcule el arrea limitada por ella
    b) Calcule su longitud de arco, $0 \leq \varphi \leq \pi$
26. Calcule la longitud de arco de la hoja de Kartezjusza $x^3 + y^3 = 3axy$
27. Hállese la longitud de arco del bucle de la curva $x = a(t^2+1),\quad y = \frac{a}{3}(t^3-3t)$
28. Hállese la longitud de arco de la cardiode $\rho = 2(1-\cos\varphi)$ que se encuentra dentro de la circunferencia de radio igual a uno.

8.3. Cálculo del Volumen y Área de una superficie por Rotación

Una curva AB de ecuación y = f(x), donde f(x) es una función continua y positiva en el intervalo [a,b]. Por comodidad, se ha considerado que la curva es positiva, lo que significa que se encuentra en el primer cuadrante cartesiano En el momento en que, esta curva gire alrededor del eje Ox o Oy, se forma un cuerpo, por lo tanto, se puede calcular el volumen de ese cuerpo, que se ha obtenido, por rotación con respecto a uno de los ejes. Este volumen está limitado por el área de superficie, la capa mas externa del cuerpo. La cual resulta, cuando con sus valores de ordenada, en los extremos de la curva, realiza una revolución alrededor del eje Ox, como se puede de apreciar en la figura 8.3. Este volumen, se lo calcula, con la fórmula siguiente y está expresada en su forma cartesiana:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

El área de la superficie, que se obtiene también por revolución de la curva AB de ecuación y = f(x), que surge por realizar una revolución alrededor del eje Ox, se la calcula con la fórmula expresada en su forma cartesiana:

$$S = 2\pi \int_A^B y dL = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Con la condición adicional de que, la función y = f(x), en el intervalo $a \leq x \leq b$ sea continua, lo que significa que, existe su derivada, lo que nos asegura que la función es continua en ese intervalo. Si la curva AB esta expresada en la forma paramétrica; es decir: $x = g(t)$, $y = h(t)$; en un intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$., también debe cumplir con las mismas condiciones:

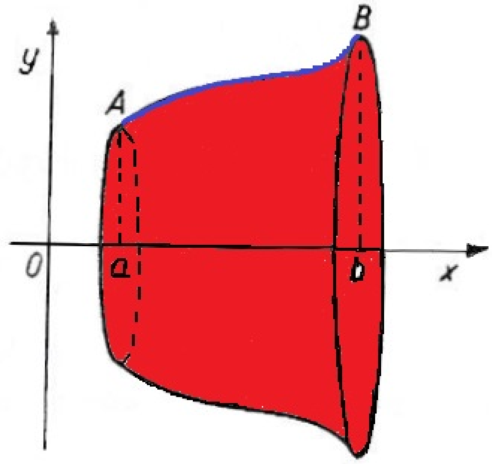


Figura 8.7

Las expresiones de las dos funciones, expresadas en su forma paramétrica, $x = g(t)$ e $y = h(t)$, tienen en este intervalo su derivada; por lo tanto, son continuas. Si la expresión x = g(t), es en este intervalo,es continua, lo que significa que, es creciente o en el caso de que sea negativa, con lo cual, será decreciente. Si la función h(t) tiene valores positivos, la curva AB esta sobre el eje x. El volumen del cuerpo por revolución en su forma paramétrica es:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{t_1}^{t_2} (h(t))^2 \frac{dx}{dt} dt$$

Y la superficie por revolución, se la calcula:

$$S = 2\pi \int_A^B y dL = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

La demostración de estas fórmulas, para el calculo del volumen y el área de superficie, que se obtuvieron por rotación con respecto el eje x, no demanda mucho trabajo, ya que es el mismo procedimiento que anteriormente, se ha aplicado en este capitulo de propiedades de integrales. El estudiante debería obtenerla sin dificultad alguna.

El calculo del volumen por rotación con respecto el eje y, demanda la aplicación de un conocimiento adicional y por lo tanto, se la obtendrá. A está forma de calcular el volumen, por rotación, con respecto el eje y ; también, se lo conoce, con el nombre método de los anillos .

La ecuación y = f(x), donde f(x) es una función continua y positiva en el intervalo [a,b]. En ese momento, el volumen del cuerpo por rotación esta limitado por una área de superficie, la cual resulta, cuando con sus valores de abscisa en los extremos de la curva, realiza una revolución alrededor del eje Oy.
Se divide está área en 'n' franjas, se forma los rectángulos correspondientes y se los rota alrededor del eje y, por lo cual , se produce anillos cilíndricos de altura y_k , y de base $\xi_k - \xi_{k-1} = \Delta x_k$. Los segmentos $O\xi_k$ y $O\xi_{k-1}$ pasan hacer los radios externo e interno, en el momento que, se produce la rotación del rectángulo analizado.

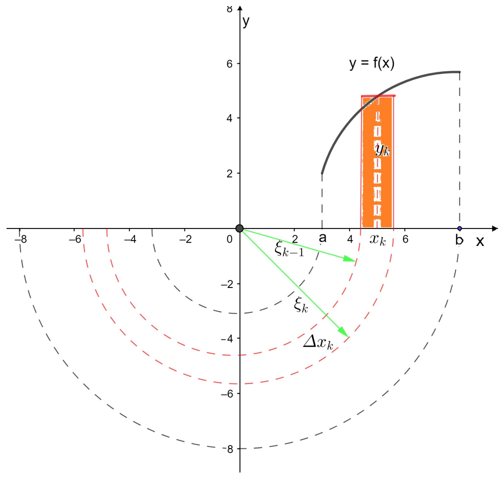


Figura 8.8

El volumen del anillo, que se forma al rotar el rectángulo alrededor del eje y es igual a:

$$\Delta v_k = \pi(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2) \cdot y_k$$

Hay diferentes formas que, se podría utilizar para expresar el elemento $(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2)$, en está demostración, se aplica elementos básicos de álgebra, que el estudiante debe haber utilizado en el área de matemáticas:

$$\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2 = (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k + \xi_{k-1})$$

El primer elemento es igual a:

$$\xi_k - \xi_{k-1} = \Delta x_k$$

El segundo elemento, se lo define de propiedades de geometría analítica:

$$\frac{\xi_k + \xi_{k-1}}{2} = x_k \quad \rightarrow \quad \xi_k + \xi_{k-1} = 2 \cdot x_k$$

Se reemplaza en el volumen del anillo, que se forma al rotar el rectángulo alrededor del eje y, es igual a:

$$\Delta v_k = \pi(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2) = \pi \cdot \Delta x_k \cdot 2 \cdot x_k \cdot y_k = 2\pi \cdot \Delta x_k \cdot x_k \cdot y_k$$

Como en todas las aplicaciones de integrales definidas, se toma la suma de las 'n' franjas en el intervalo $[a,b]$ de la función f(x), después, se toma el limite, cuando $n \to \infty$ y en ese momento $\Delta x_k \to 0$, con lo cual, $\Delta x_k \to dx$ y el error de calculo del volumen por rotación es mínimo, y además $x_k = x$ y $y_k = y$:
Primero la suma:

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta v_k = \sum_{k=0}^{n} 2\pi \cdot \Delta x_k \cdot x_k \cdot y_k$$

Segundo el limite:

$$\lim_{n\to\infty} V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 2\pi \cdot \Delta x_k \cdot x_k \cdot y_k$$

Por ultimo, se considera el teorema de Riemann :

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 2\pi \cdot \Delta x_k \cdot x_k \cdot y_k = \int_a^b 2\pi \cdot x \cdot y \cdot dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

8.3.1. Ejercicios Resueltos del cálculo de Volumen y Área de la Superficie por Revolución

1. Calcule el área de superficie por revolución de una parábola $y^2 = 4x$ en los limites $0 \leq x \leq 3$ alrededor del eje OX y el volumen del cuerpo limitada con el plano x = 3.

   Para el cálculo del are de superficie, se necesita el cálculo del diferencial de longitud de arco, para lo cual:

$$y^2 = 4x \longrightarrow y = 2\sqrt{x}$$

$$2ydy = 2\frac{dx}{2\sqrt{x}} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)} dx$$

Se realiza el cálculo del área de superficie por rotación:

$$S = 2\pi \int_0^3 y dL = 2\pi \int_0^3 y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^3 y\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1} dx =$$

$$= 4\pi \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{8\pi}{3}\pi\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}\pi[8-1] = \frac{56}{3}\pi$$

Se calcula el volumen del cuerpo por revolución:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^3 4x dx = 4\pi \int_0^3 x dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= 2\pi\left[x^2\right]_0^3 = 18\pi$$

2. Calcule el área de superficie por revolución de un cicloide definida por:

$$x = a(t - \sin(t)); \qquad y = a(1 - \cos(t))$$

Cuando $a > 0$; $0 \leq t \leq 2\pi$ alrededor del eje OX y el volumen del cuerpo limitada por está figura.

Se debe primero realizar una análisis del comportamiento de las funciones $x = g(t), y = h(t)$. La respuesta a esto nos da la derivada:

$$x = a(t - \sin(t)) \longrightarrow dx = a(1 - \cos(t))dt \longrightarrow \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos(t))$$

Como los valores de $\cos(t) \leq 1$; en consecuencia, el lado derecho de la identidad es mayor a cero, es positiva, es una función creciente. La función $y = h(t)$

$$y = a(1 - \cos(t)) \longrightarrow dy = a(0 + \sin(t))dt \longrightarrow \frac{dy}{dt} = a(\sin(t))$$

Por lo tanto, la función, también, toma valores positivos, es creciente.

Se calcula el volumen del cuerpo por rotación:

$$V = \pi \int_a^b y^2 \frac{dx}{dt} dt = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos(t))^2 a(1 - \cos(t))dt$$

$$= a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^3 dt =$$

Se desarrolla el binomio:

$$= a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos(t) + 3\cos^2(t) - \cos^3(t))dt =$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$= a^3\pi\left[\int_0^{2\pi} dt - 3\int_0^{2\pi} \cos(t)dt + 3\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt - \int_0^{2\pi} \cos^3(t)dt\right] =$$

Todas las integrales del ejercicio ya fueron resueltas en el capitulo de integrales trigonométricas, se aconseja al estudiante, la revisión de este capitulo.

$$= a^3\pi\left[[t]_0^{2\pi} - 3[\sin(t)]_0^{2\pi} + 3\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} - \left[\sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t)\right]_0^{2\pi}\right] =$$

Se recuerda que : $\sin(t = 0) = 0; \sin(2t = 0) = 0$

$$V = a^3\pi\left[2\pi - 3(0) + 3\left[\frac{2\pi}{2} + (0)\right] - (0)\right] == a^3\pi\left[2\pi + 3\left[\frac{2\pi}{2}\right]\right] = 5a^3\pi^2$$

El área de la superficie por rotación, se la calcula:

$$S = 2\pi\int_A^B y dL = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

La longitud de arco ya se lo cálculo en ejercicios anteriores:

$$dL = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

Se reemplaza:

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y dL = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1 - \cos(t))2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 8a^2\pi\int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right)dt =$$

La última integral se la obtuvo en el capitulo 5, el estudiante debe recordarla:

$$= 8a^2(-2)\pi\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = -16a^2\left[\left(-1 + \frac{1}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$S = \frac{64}{3}\pi a^2$$

3. Calcular el volumen y el área de superficie de una elipsoide que surge al rotar una elipse alrededor del eje OX.

   La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   Se despeja y:

$$y^2 = b^2\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] \longrightarrow y^2 = \left[b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right]$$

   La fórmula de volumen por rotación es y se aprovecha la simetría de la figura y por lo tanto, se calcula la mitad del volumen:

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^a y^2 dx = \pi\int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right]dx$$

Se aplica propiedades de integrales:

$$= b^2\pi\int_0^a \left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]dx = b^2\pi\left[\int_0^a dx - \int_0^a \frac{x^2}{a^2}dx\right]$$

$$= 2b^2\pi\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2\pi b^2\left(a-\frac{1}{a^2}\frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

Para el cálculo del área de la superficie por rotación, es mejor aprovechar sus ecuaciones paramétricas :

$$x = a\cos(t); \qquad y = b\sin(t)$$

$$dx = -a\sin(t)dt; \qquad dy = b\cos(t)dt$$

La función $x = a\cos(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq \pi$ es decreciente, a la función $y = b\sin(t)$ toma valores positivos, se aplica :

$$S = 2\pi\int_A^B y dL = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$S = 2\pi\int_0^\pi (b\sin(t))\sqrt{(-a\sin(t))^2+(b\cos(t))^2}dt$$

$$S = 2\pi\int_0^\pi (b\sin(t))\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt$$

$$S = 2\pi\int_0^\pi (b\sin(t))\sqrt{a^2\left[1-\cos^2(t)\right]+b^2\cos^2(t)}dt$$

Se realiza un cambio de variable: $\cos(t) = u$, su derivada: -$\sin(t)dt = du$, para después no regresar a la variable t, se realiza un cambio en sus limites; es decir:

$$si \quad t = 0 \longrightarrow \cos(0) = u \longrightarrow u = 1$$

$$si \quad t = \pi \longrightarrow \cos(\pi) = u \longrightarrow u = -1$$

Se reemplaza:

$$S = 2b\pi\int_{-1}^1 \sqrt{a^2\left[1-u^2\right]+b^2u^2}du$$

$$S = 2b\pi\int_{-1}^1 \sqrt{a^2-u^2(a^2-b^2)}du$$

Son tres casos que puede suceder:

a) Si a = b

$$S = 2b\pi\int_{-1}^1 \sqrt{a^2-u^2(a^2-b^2)}dt = 2b\pi\int_{-1}^1 \sqrt{a^2}dt = 2b\pi\int_{-1}^1 adu$$

$$S = 2ba\pi\int_{-1}^1 du = 2ab\pi\left[u\right]_{-1}^1 = 2a^2\pi\left[1-(-1)\right] = 4a^2\pi$$

b) Si $a > b$, se realiza un cambio de variable: $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ se reemplaza:

$$S = 2b\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{a^2 - u^2(a^2-b^2)}du = 2ab\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2\frac{(a^2-b^2)}{a^2}}du$$

$$= 2ab\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2\varepsilon^2}du$$

Esta última integral ya es conocida por nosotros y es igual a:

$$= 2ab\pi\left(\frac{u}{2}\sqrt{1-\varepsilon u^2} + \frac{1}{2\varepsilon}\arcsin(\varepsilon u)\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$S = 2ab\pi\left(\frac{u}{2}\sqrt{1-\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\arcsin(\varepsilon)\right)$$

c) Si $a < b$ se realiza un cambio de variable $\sqrt{b^2-a^2} = c$

$$S = 2b\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{a^2 - u^2(a^2-b^2)}du = 2b\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{a^2 + u^2(b^2-a^2)}du$$

$$= 2b\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{b^2+u^2c^2}du$$

Esta última integral, también, es conocida:

$$= 2b\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{b^2+u^2c^2}du = 2b\pi\left(\frac{u}{2}\sqrt{a^2+c^2u^2} + \frac{a^2}{2c}\ln\left[cu + \sqrt{a^2+c^2u^2}\right]\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$S = 2b\pi\left(\sqrt{a^2+c^2} + \frac{a^2}{2c}\ln\left[\frac{\sqrt{a^2+c^2}+c}{\sqrt{a^2+c^2}-c}\right]\right)$$

4. Hállese el volumen generado en la rotación alrededor del eje y del área limitada por el arco del cicloide $x = \Theta - \sin\Theta$, e $y = 1 - \cos\Theta$ y el eje x. Se recuerda la fórmula demostrada:

$$V = 2\pi \int_{a}^{b} xf(x)dx = 2\pi \int_{0}^{2\pi} xf(x)dx$$

La figura está definida en su forma paramétrica; por lo tanto:

$$V = 2\pi \int_{0}^{2\pi} xf(x)dx = 2\pi \int_{0}^{2\pi} g(\Theta)h(\Theta)d\Theta$$

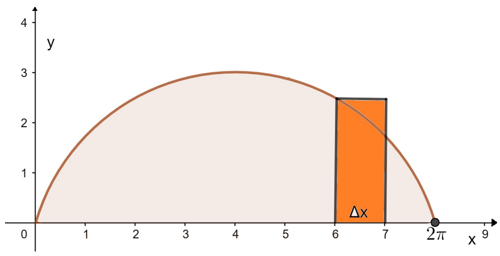


Figura 8.9

Se reemplaza:

$$V = 2\pi \int_{0}^{2\pi} (\Theta - \sin\Theta)(1-\cos\Theta)(1-\cos\Theta)d\Theta$$

Se realiza el producto:

$$V = 2\pi \int_{0}^{2\pi} (\Theta - \sin\Theta)(1-\cos\Theta)^2 d\Theta = 2\pi \int_{0}^{2\pi} (\Theta - \sin\Theta)(1 - 2\cos\Theta + \cos^2\Theta)d\Theta$$

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} (\Theta - 2\Theta\cos\Theta + \Theta\cos^2\Theta - \sin\Theta + 2\sin\Theta\cos\Theta - \sin\Theta\cos^2)d\Theta$$

Finalmente, se aplica propiedades de calculo integral. Estas integrales son conocidas por el estudiante; por lo tanto, no le debe causar ningún problema y lo debe realizar por su cuenta. La respuesta del ejercicio es:

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} (\Theta - 2\Theta\cos\Theta + \Theta\cos^2\Theta - \sin\Theta + 2\sin\Theta\cos\Theta - \sin\Theta\cos^2)d\Theta = 6\pi^3$$

8.3.2. Ejercicios Propuestos del Cálculo de Volumen y Área de Superficie por Revolución

1. Calcular el volumen de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $xy^2 = 1$ y los planos x = a y x = b, donde $b > a > 0$.

2. Calcular el volumen de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $xy = 1; 1 \leq x \leq \infty$

3. Calcular el volumen y el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $y = \sin(x)$; $0 \leq x \leq \pi$

4. Calcular el volumen de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $y^2(x-4) = x(x-3)$; $0 \leq x \leq 3$

5. Calcular el volumen y el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $3y - x^2 = 0, \quad ; 0 \leq x \leq 1$

6. Calcular el volumen y el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $x^2 - y^2 = a, \quad a > 0$; $a \leq x \leq a\sqrt{2}$

7. Calcular el volumen y el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $3y - x^3 = 0, \quad ; 0 \leq x \leq 1$

8. Calcular el volumen y el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0 ; -a \leq x \leq a$

9. Calcular el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $y = \sqrt{2rx - x^2}, \quad r > 0 ; 0 \leq x \leq 2$

10. Calcular el volumen y el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $x^3 = y^2(2r - x), \quad r > 0 ; 1 \leq x \leq 2$

11. Calcular el volumen y el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $x = a\cos^3(t); y = a\sin^3(t) \quad a > 0 ; 0 \leq x \leq \pi$

12. Calcular el volumen y el área de superficie de un cuerpo limitada por revolución alrededor del eje Ox de $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3} \quad ; 0 \leq x \leq \sqrt{3}$

1. Calcular el volumen y área de superficie, alrededor del eje Ox, de:

1. $y = \sin^{\frac{7}{2}}(x);$ $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$
2. $y = a\cos\left(\dfrac{2\pi}{b}\right);$ $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{b}{4}$
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$
4. $25x^2 + 4y^2 = 100$
5. $3y^2 = 4x;$ $\quad 0 \leq x \leq 1$
6. $y^2 = \dfrac{1}{x-1};$ $\quad 2 \leq x \leq 4$
7. $y = e^{-x}\sqrt{\sin(x)};$ $\quad 0 \leq x \leq \pi$

1. $y = \cos^{\frac{7}{2}}(x);$ $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$
2. $16x^2 + 8y^2 = 144$
3. $x^2 + y^2 - 20y + 75 = 0$
4. $y = 2x^3$ $\quad 0 \leq x \leq 1$
5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad 2 \leq x \leq 4$
6. $y = \dfrac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x^2-6x+15}}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

2. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las lineas y = x, $y = x + \sin^2 x$ en el intervalo $0 \leq x \leq$
3. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las lineas $y = 2x^2$, $\; y = 0$, $\; 0 \leq x \leq$; $\; x = 5$.
4. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las lineas $e^x \sin x$ primer cuadrante.
5. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las lineas $y = x^2 - 5x + 62x^2$, $\; y = 0$,

8.4. Cálculo del Momento de Inercia, Momento Estático y Centro de Gravedad de un Cuerpo

El momento de inercia de un sistema de masas $m_1,\ m_2, \cdots,\ m_n$ con respecto el eje Ox de rotación (Oy) se llama a la suma:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \qquad \left(I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2\right)$$

donde y_i, (x_i) significa la distancia de la masa m_i al eje Ox (Oy), m_i significa la masa puntual de la división del sistema. El momento de inercia puede ser calculado con respecto un eje (una recta) o una superficie (un plano: xy, xz, yz). Las formulas escritas tienen un error de calculo y esto depende de la forma del sistema. Por lo tanto, al sistema se lo divide en ' n ' partes de tal forma que $n \to \infty$ con lo cual, la masa, m_i de cada punto material tiende a cero; es decir, en algún momento $m_i \approx dm$, se puede escribir:

$$\lim_{n\to\infty} I_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \quad \to \quad I_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \quad \to \quad I_x = \int_1^n y^2 dm \qquad \left(I_y = \int_1^n x^2 dm\right)$$

Uno de los parámetros que fácilmente, se llega a conocer de un cuerpo (o sistema), es su densidad, la cual, puede ser: lineal (
$lambda_L$) ,superficial (ρ) o de volumen (δ). Por definición de densidad y del diferencial de arco, se puede escribir que:

$$\mu_l = \frac{dm}{dL} \quad \to \quad dm = \lambda \cdot dL$$

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Un análisis muy parecido se puede hacer para la densidad superficial o de volumen. Esta densidad lineal y diferencial de arco, se reemplaza en la formula:

$$I_x = \int_1^n y^2 dm = \int_1^n y^2 \lambda \cdot dL = \int_1^n y^2 \lambda \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dx \qquad \left(I_y = \int_1^n x^2 \lambda \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy\right)$$

El momento de inercia de un arco (segmento), de una curva AB con respecto el eje Ox (Oy), se la define con la integral:

$$I_x = \int_{(A)}^{(B)} \lambda y^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \left(I_y = \int_{(A)}^{(B)} \lambda x^2 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\right)$$

Donde λ significa la densidad lineal del arco (segmento) y dL es el diferencial de la longitud de la curva AB (segmento), además $y^2 = (f(x))^2$

Si la función y = f(x) es continua en el intervalo $a \le x \le b$ y toma valores positivos y además, AA' es la ordena inicial de la curva (segmento) y = f(x) en el punto x = a, a BB' es la ordena final de la curva (segmento) AB, en el punto x = b. El momento de inercia del trapecio curvilíneo, A'ABB' , ver figura 8.4, con respecto el eje Ox; es decir, el área limitada por A'B' del eje Ox, las ordenadas A'A y B'B y el arco de la curva y = f(x), se la define con la integral:

$$I_x = \frac{1}{3}\rho \int_a^b y^3 dx$$

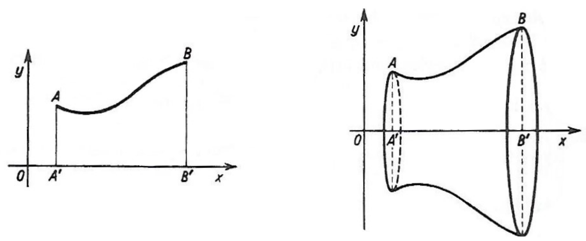


Figura 8.10

Donde ρ es la densidad superficial.

Si el trapecio curvilíneo A'ABB' da una revolución alrededor del eje Ox, volumen, ver figura 8.4, el momento de inercia del cuerpo con respecto el eje Ox, que surge al girar, , se la define con la integral:

$$I_x = \frac{1}{2}\pi\sigma \int_a^b y^4 dx$$

Donde σ es la densidad del cuerpo (volumétrica).

El momento estático de las masas $m_1, m_2, \cdots, m_k$ con respecto el eje Ox (Oy), se llama a la suma:

$$M_x = \sum_{i=1}^{k} m_i y_i \qquad \left(M_y = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i\right)$$

Donde y_i es la distancia de la masa m_i al eje Ox (Oy).

El momento estático de un arco (segmento) AB con respecto el eje Ox (Oy) se define con la integral:

$$M_x = \lambda \int_A^B y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \left(M_y = \lambda \int_A^B x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\right)$$

Donde λ es la densidad lineal y en este caso, se considera constante, es por eso que esta delante de la integral, a dL es el diferencial de la longitud del arco AB. Además, y = f(x).

El momento estático del trapecio curvilíneo (área) con respecto el eje Ox (Oy), ver figura 8.4, limitado por el arco (segmento) AB de la curva y = f(x), en el plano cartesiano, su ordenada A'A, en el punto x = a, la ordenada final B'B, en el punto x = b, y el segmento A'B' en el eje Ox se lo define con la integral:

$$M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b y^2 dx \qquad \left(M_y = \frac{1}{2}\rho \int_a^b x^2 dy\right)$$

Donde ρ es la densidad de superficie.

El centro de gravedad (centroide) de un cuerpo, es un punto, en un sistema o cuerpo, (ξ, η), en el cual, se equilibra el momento estático del cuerpo (en su totalidad) con el momento estático producido por el centro del gravedad; por lo tanto, el cuerpo esta en equilibrio:

$$\sum_{i}^{n} m_i \xi - M_y = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i}^{n} m_i \xi = M_y \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{M_y}{\sum_{i}^{n} m_i} \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}{\sum_{i}^{n} m_i}$$

Al realizar un análisis con respecto a la densidad lineal, se obtiene:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}{\sum_{i}^{n} m_i} = \frac{\int_a^b \lambda x dL}{\int_a^b \lambda dL} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}; \qquad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i y_i}{\sum_{i}^{n} m_i} = \frac{\int_a^b \lambda y dL}{\int_a^b \lambda dL} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}$$

Las coordenadas del centro de gravedad del arco (segmento)AB de densidad lineal λ constante o uniforme, se define con las fórmulas:

$$\xi = \frac{\int_A^B x dL}{\int_A^B dL}; \qquad \eta = \frac{\int_A^B y dL}{\int_A^B dL};$$

Donde dL es el diferencial de la longitud de arco AB. Este análisis es cuando se desea encontrar el centro de gravedad de un cuerpo con respecto a uno de los ejes del plano cartesiano.
Las coordenadas del centro de gravedad del trapecio curvilíneo (una área) limitado por el arco de la curva y = f(x), la ordenada A'A en el punto x = a, la ordenada final B'B en el punto x = b y el segmento A'B' en el eje Ox, se define con las fórmulas:

$$\xi = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}; \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx};$$

Con la condición de que la densidad superficial ρ, sea constante.

Si el trapecio curvilíneo A'ABB' realiza una revolución alrededor del eje Ox, el centro de gravedad del cuerpo por revolución, que resulta, sus coordenadas:

$$\xi = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}; \qquad \eta = 0$$

Un análisis del centro de gravedad de un cuerpo con respecto a los planos cartesianos, xy, xz, yz , se lo realiza en el capitulo de integrales múltiples. A menudo, en el cálculo de las coordenadas del centro de gravedad, se puede utilizar el teorema de Guldine.

Teorema De Guldine : Si el área plana G rota al rededor de un eje, sin puntos comunes o de intersección, se encuentran en un mismo plano, entonces, el volumen que resulta por la rotación del cuerpo es igual al producto del área P de está área, por la longitud del circulo $2\pi r$ inscrito en está rotación por el centro de gravedad del área G.

8.4.1. Ejercicios Resueltos de Momentos y de Centro de Gravedad

1. Calcular el momento de inercia con respecto al eje Ox, de un arco definido por : $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, que se encuentra en el primer cuadrante del plano cartesiano, en el intervalo $0\leq x\leq a$, además considere, que la densidad lineal es constante.

   El momento de inercia de la figura dada con respecto el eje Ox, primero se despeja la variable:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\longrightarrow y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

   Se encuentra la derivada:

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})=-\frac{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

   Se calcula el diferencial de la longitud de arco:

$$dL=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{1+\left(-\frac{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2}dx=\sqrt{1+\frac{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{2}{3}}}}dx$$

   Se realiza la suma de quebrados:

$$dL=\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

   Se calcula el momento de inercia:

$$I_x=\int_{(A)}^{(B)}\lambda y^2 dL=\int_0^a\lambda\left((a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\right)^2\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=$$

$$I_x=\lambda a^{\frac{1}{3}}\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3x^{-\frac{1}{3}}dx=\lambda a^{\frac{1}{3}}\int_0^a\left(a^2x^{-\frac{1}{3}}-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x-x^{\frac{5}{3}}\right)dx$$

$$I_x=\lambda a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{2}a^2x^{\frac{2}{3}}-\frac{9}{4}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}x^2-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\right]_0^a=\lambda a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{2}a^2a^{\frac{2}{3}}-\frac{9}{4}a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}a^2-\frac{3}{8}a^{\frac{8}{3}}\right]=$$

$$I_x=\lambda a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{2}a^{\frac{8}{3}}-\frac{9}{4}a^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{2}a^{\frac{8}{3}}-\frac{3}{8}a^{\frac{8}{3}}\right]=\lambda a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{8}{3}}\left[\frac{12-18+12-3}{8}\right]=\frac{3}{8}\lambda a^3$$

2. Una tabla de longitud 'l' sujeta de uno de sus lados de la pared, quedo cubierta uniformemente de nieve. El peso de la nieve por unidad de longitud es igual a 'p'. Calcular el momento total de doblamiento de la tabla producido por el peso de la nieve.

   El peso de la nieve sobre la tabla en una longitud $\triangle x$ es igual a $\triangle p=p\triangle x$. El cual produce, un momento por el peso igual a $\triangle M=xp\triangle x$.
   El momento total producido por el peso de la nieve es igual :

$$M=\lim_{\triangle x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}px_i\triangle x_i=$$

$$=\int_0^l pxdx=p\int_0^l xdx=p\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l=\frac{1}{2}pl^2$$

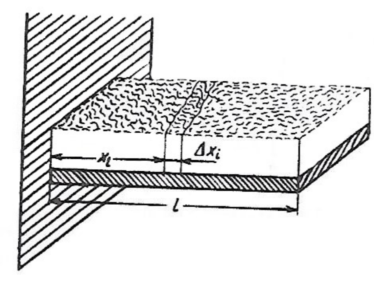


Figura 8.11

3. Calcular el momento de inercia de un cicloide definido por $x=a(t-\sin(t));\quad y=a(1-\cos(t));\ a>0;\ 0\leq t\leq 2\pi$ con respecto el eje Ox, su densidad λ es constante.

Se conoce que, para el cicloide su $dL = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)$:

$$I_x = \int_0^{2\pi} \lambda a^2(1-\cos(t))^2 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt =$$

De identidades trigonométricas se obtiene:

$$1-\cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$I_x = \int_0^{2\pi} \lambda a^2(1-\cos(t))^2 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = \int_0^{2\pi} \lambda a^2\left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$8\lambda a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\left(\frac{t}{2}\right)dt = 8\lambda a^3\int_0^{2\pi}\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 8\lambda a^3\int_0^{2\pi}\left[\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 8\lambda a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

Se realiza un cambio de variable:

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) = u \longrightarrow -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = du \longrightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = -2du$$

Se reemplaza:

$$= 8\lambda a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = -16\lambda a^3\int_0^{2\pi}\left(1-u^2\right)^2 du$$

$$= -16\lambda a^3\int_0^{2\pi}\left(1-2u^2+u^4\right)du = -16\lambda a^3\left[\left(\int_0^{2\pi}du - 2\int_0^{2\pi}u^2du + \int_0^{2\pi}u^4du\right)\right] =$$

$$= -16\lambda a^3\left[u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right]_0^{2\pi} = -16\lambda a^3\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^3+\frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^5\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -16\lambda a^3\left[\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\right] = -16\lambda a^3\left[\left(\frac{-15+10-3}{15}\right)-\left(\frac{15-10+3}{15}\right)\right]$$

$$= -16\lambda a^3\left[\left(\frac{-8}{15}\right)-\left(\frac{8}{15}\right)\right] = 16\lambda a^3\left[\left(\frac{16}{15}\right)\right] = \lambda a^3\frac{256}{15}$$

4. A un paralelepípedo, se lo llena de agua hasta una altura 'h'. Calcular el momento por unidad de longitud del recipiente, causado por la presión 'p' del agua.

   A una altura $(h-x_i)$ la presión es igual $P_{x_i} = dg(h-x_i)$ donde d es la densidad del agua. g gravedad. La fuerza en cada elemento de la pared de área $1\cdot\triangle x_i$ es igual:

$$P_{x_i} = p_{x_i}\cdot 1\cdot\triangle x_i = dg(h-x_i)\triangle x_i =$$

   el momento que está fuerza produce es igual:

$$\triangle M_{x_i} = \triangle P_{x_i}\cdot x_i = dg(hx_i - x_i^2)\triangle x_i$$

   El momento total que se produce en las paredes es:

$$M = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n \triangle M_{x_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n dg(hx_i-x_i^2)\triangle x_i =$$

$$= \int_0^h dg(hx_i-x_i^2)dx = dg\int_0^h (hx_i-x_i^2)dx =$$

$$= dg\left[\frac{hx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^h = dg\left[\frac{hh^2}{2}-\frac{h^3}{3}\right] = dg\left[\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right] = \frac{1}{6}dgh^3$$

5. Calcular el momento de inercia con respecto el eje Ox del área limitada por la parábola $y^2 = 2px$, se encuentra sobre el eje Ox, $a \le x \le b$, su densidad de superficie es constante.

   Se aplica la fórmula:

$$I_x = \frac{1}{3}\rho\int_a^b y^3 dx = \frac{1}{3}\rho\int_a^b \left(\sqrt{2px}\right)^3 dx = \frac{1}{3}(\sqrt{2p})^3\rho\int_a^b \left(\sqrt{x}\right)^3 dx$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{2p})^3\rho\int_a^b \left(\sqrt{x}\right)^3 dx = \frac{1}{3}(\sqrt{2p})^3\rho\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_a^b = \frac{1}{3}(\sqrt{2p})^3\rho\left[b^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}\right]$$

6. La parábola $y^2 = 2px$, donde $p > 0$ rota alrededor del eje Ox. Calcular su momento de inercia con respecto el eje Ox del segmento de la parábola que rota en el intervalo $0 \le x \le a$. Considere que la densidad volumétrica σes constante.

$$I_x = \frac{1}{2}\pi\sigma\int_0^a y^4 dx = \frac{1}{2}\pi\sigma\int_0^a (2px)^2 dx = 2p^2\pi\sigma\int_0^a (x)^2 dx =$$

$$I_x = 2p^2\pi\sigma\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}p^2\pi\sigma x^3$$

7. Calcular el momento estático con respecto el eje Ox del cicloide $x = a(t - \sin(t)); y = a(1 - \cos(t))$ donde $a > 0; \quad 0 \le t \le 2\pi$ La densidad lineal λ es constante.

   Para su cálculo se recurre a:

$$M_x = \lambda\int_A^B ydL = \lambda\int_0^{2\pi} ydL$$

   La longitud de arco para este tipo de cicloide , ya se la cálculo anteriormente : $dL = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)$. Se reemplaza en la relación de momento estático:

$$M_x = \lambda\int_0^{2\pi} a(1 - \cos(t))2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2a^2\lambda\int_0^{2\pi}(1 - \cos(t))\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

   Se recuerda que:

$$1 - \cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

   Se reemplaza:

$$M_x = 2a^2\lambda\int_0^{2\pi}(1 - \cos(t))\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2a^2\lambda\int_0^{2\pi} 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$M_x = 4a^2\lambda\int_0^{2\pi}\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)dt = 4a^2\lambda\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$M_x = 4a^2\lambda\int_0^{2\pi}\left(1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

   Se realiza un cambio de variable:

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) = u \longrightarrow -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = du \longrightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = -2du$$

Se reemplaza:

$$M_x = 4a^2\lambda \int_0^{2\pi} \left(1-u^2\right)(-2du) = -8a^2\lambda \int_0^{2\pi} \left(1-u^2\right)(du)$$

$$M_x = -8a^2\lambda \left[\int_0^{2\pi} du - \int_0^{2\pi} u^2 du\right] = -8a^2\lambda \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$M_x = -8a^2\lambda \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3}\right]_0^{2\pi} = -8a^2\lambda \left[\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$M_x == -8a^2\lambda \left[\frac{-4}{3}\right] = \frac{32}{3}a^2\lambda$$

8. Calcular el momento estático con respecto el eje Ox de una semi-elipse. La densidad de superficie ρ es constante.

   Se escribe la ecuación de una elipse:

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$

   Se calcula el momento solicitado:

   $$M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{2}\rho \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\rho \int_{-a}^{a} \left(a^2-x^2\right)dx$$

   $$M_x = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\rho \int_{-a}^{a} \left(a^2-x^2\right)dx = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\rho \left(a^2x - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right)_{-a}^{a}$$

   $$M_x = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\rho\left(a^3 - \left(\frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right)\right)$$

   $$M_x = \frac{1}{2}a^3\frac{b^2}{a^2}\rho\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{2}a^3\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{4}{3}\right] = \frac{2}{3}ab^2\rho$$

9. Calcular el centro de gravedad de la figura definida por: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $a > 0$; $y \geq 0$; $0 \leq x \leq a$.

   Sus fórmulas para el cálculo son:

   $$\xi = \frac{\int_A^B x dL}{\int_A^B dL}; \qquad \eta = \frac{\int_A^B y dL}{\int_A^B dL}$$

   En forma mas cómoda:

   $$\xi = \frac{1}{L}\int_A^B x dL; \qquad \eta = \frac{1}{L}\int_A^B y dL$$

   En ejercicios anteriores se obtuvo que:

   $$L = \int_A^B dL = \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \left[3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}\right] = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a =$$

$$L = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left[a^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2}a$$

Ahora la otra integral:

$$\int_0^a xdL = \int_0^a xa^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx = a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{\frac{2}{3}}dx = a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^a = \frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}\left[x^{\frac{5}{3}}\right]_0^a = \frac{3}{5}a^2$$

Los valores obtenidos se reemplaza:

$$\xi = \frac{2}{3a}\frac{3a^2}{5} = \frac{2a}{5};$$

$$\int_a^0 ydL = \int_a^o \left[a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx$$

Se ha obtenido una función irracional, se realiza cambio de variable:

$$\left[a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} = t \longrightarrow \left[a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right] = t^{\frac{2}{3}}$$

Se deriva ambos lados:

$$-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}dt \longrightarrow x^{-\frac{1}{3}}dx = -t^{-\frac{1}{3}}dt$$

Se reemplaza:

$$= \int_a^o \left[a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx = a^{\frac{1}{3}}\int_a^0 tt^{-\frac{1}{3}}dt$$

$$= -a^{\frac{1}{3}}\int_a^0 t^{\frac{2}{3}}dt = -a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right]_a^0 = \frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}a^2$$

$$\eta = \frac{2}{3a}\frac{3a^2}{5} = \frac{2a}{5};$$

Como $\xi = \eta$ nos indica que la figura es simétrica, con la recta y = x.

10. Encontrar el centro de gravedad de un cuarto de elipse:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};\quad a > 0;\quad b > 0;\quad 0 \le x \le a;\quad ejes\quad Ox, Oy$$

Sus fórmulas para el cálculo son:

$$\xi = \frac{\int_0^a xydx}{\int_0^a ydx};\qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2dx}{\int_0^a ydx}$$

Se calcula:

$$\int_0^a xydx = \frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{2a}\left[-\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{1}{3}a^2b$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a y^2dx = \frac{b^2}{2a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{b^2}{2a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3}ab^2$$

$$\int_0^a ydx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{1}{4}\pi ab$$

Los valores obtenidos , se reemplaza:

$$\xi = \frac{\int_0^a xydx}{\int_0^a ydx} = \frac{\frac{1}{3}a^2b}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}; \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2dx}{\int_0^a ydx} = \frac{\frac{1}{3}ab^2}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}$$

El ejercicio, también, se lo podría resolver aplicando el teorema de Guldine, los pasos a realizar son:

a) Se calcula el área del un cuarto de la elipse, que es igual a: $\frac{1}{4}ab\pi$

b) Se calcula el volumen del cuerpo al rotar, alrededor del eje Ox, que es igual: $\frac{2}{3}\pi ab^2$

c) Se aplica el teorema de Guldine:

$$\frac{2}{3}\pi ab^2 = \frac{1}{4}\pi ab\cdot 2\pi\eta \longrightarrow \eta = \frac{4b}{3\pi}$$

Para encontrar la abscisa de las coordenadas del centro de gravedad, se realiza la rotación con respecto el eje Oy:

$$\frac{2}{3}\pi a^2b = \frac{1}{4}\pi ab\cdot 2\pi\xi \longrightarrow \xi = \frac{4a}{3\pi}$$

11. Calcular el momento de inercia de la llanta de auto si su radio interno 'r' y el radio externo 'R'. Considere que la densidad del material del cual esta hecho ρ es constante.

    El momento de inercia de un anillo de grosor Δx_i y de radio x_i es igual $\Delta B_i = \Delta m_i\cdot x_i^2$, donde la $\Delta m_i = 2\pi\cdot\Delta x_i\cdot\rho\cdot x_i$ es la masa del anillo; por lo tanto, se obtiene:

$$\Delta B_i = 2\pi x_i\cdot\Delta x_i\cdot\rho\cdot x_i^2 = 2\pi\cdot x_i^3\cdot\rho\Delta x_i$$

El momento total de toda la llanta:

$$B = \sum_1^n \Delta B_i = 2\pi\cdot\rho\sum_1^n x_i^3\cdot\Delta x_i$$

Para poder aplicar el teorema de Riman, se aplica el limite a ambos lados de la igualdad, cuando ΔB_i tiende a cero:

$$\lim_{\Delta B_i\to 0} B = \lim_{\Delta B_i\to 0}\sum_1^n \Delta B_i = 2\pi\cdot\rho\cdot\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_1^n x_i^3\cdot\Delta x_i$$

Se aplica propiedades de limites y el teorema de Riman:

$$B = \lim_{\Delta B_i\to 0}\sum_1^n \Delta B_i = 2\pi\cdot\rho\cdot\int_r^R x_i^3\cdot dx$$

Se integra:

$$B = 2\pi\cdot\rho\cdot\int_r^R x_i^3\cdot dx = 2\pi\cdot\rho\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_r^R = \frac{1}{2}\pi\cdot\rho\cdot\left(R^4-r^4\right)$$

12. Encuentre el centro de gravedad de un cuerpo que se obtiene al girar alrededor del eje Ox de la parábola $y^2 = 2px$, donde p es no-negativa, en el intervalo de $0\le x\le a$.

Como se aprecia, es un cuerpo que gira alrededor del eje Ox; por lo tanto, las formulas a aplicar son:

$$\xi=\frac{\int_a^b xy^2dx}{\int_a^b y^2dx};\qquad \eta=0$$

Se reemplaza 'y' y se obtiene:

$$\xi=\frac{\int_a^b xy^2dx}{\int_a^b y^2dx}=\frac{\int_a^b x\cdot 2p\cdot xdx}{\int_a^b 2p\cdot x\cdot dx}=\frac{\int_a^b x^2\cdot dx}{\int_a^b x\cdot dx};\qquad \eta=0$$

$$\xi=\frac{\int_a^b x^2\cdot dx}{\int_a^b x\cdot dx}=\frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a}=\frac{2a^3}{3a^2}=\frac{2a}{3};\qquad \eta=0$$

13. Encuentre el centro de gravedad de un triangulo de base a y altura h ? El centro de gravedad de un cuerpo esta relacionado con los momentos de primer orden o también llamados momentos estáticos de un cuerpo. Se dibuja un triangulo cualquiera de base a y de altura h; por lo tanto, el triangulo tiene una área. Esta premisa se debe tener en mente. En el interior del triangulo de dibuja un rectángulo, el cual, tiene dimensiones extremadamente pequeñas. En el gráfico, se ha exagerado estas dimensiones, para poder explicar la solución del ejercicio. El rectángulo graficado en el interior del triangulo tiene los objetivos:

    a) Poder determinar el área de este rectángulo, que es igual a dA = y·dx, lo cual, permite definir, la masa elemental del triangulo y esto es posible aprovechando la densidad superficial del cuerpo, que es igual :

    $$\delta_s=\frac{dm}{dA}\rightarrow dm=\delta_s\cdot dA$$

    De la definición de momento estático es igual a $M_y=x\cdot dm\rightarrow M_y=x\cdot\delta_s\cdot dA$. Se considera en estos ejercicios que la densidad superficial del cuerpo, es uniforme; es decir, $\delta_s=1$.

    b) Se puede determinar el centro de gravedad de este rectángulo infinitesimal, lo cual, permite calcular el centro de gravedad del cuerpo. Este punto es igual: $(x_c,\ y_c)$ es igual a: $\left(x,\ \frac{y}{2}\right)$

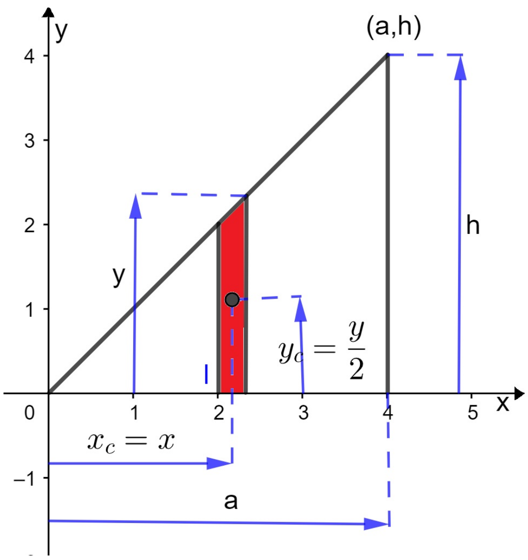


Figura 8.12

Se calcula el área del triangulo:

$$dA=ydx\rightarrow A=\int_0^a y\cdot dx=\int_0^a\frac{h}{a}x\cdot dx=\frac{h}{a}\int_0^a x\cdot dx=\frac{h}{a}\frac{x^2}{2}\Big]_0^a=\frac{ha^2}{2a}=\frac{ha^2}{2}$$

Se calcula el centro de gravedad $(\xi,\ \eta)$:

$$\xi=\frac{M_y}{A}=\frac{xdm}{A}=\frac{x\delta_s dA}{\int\limits_0^a y\cdot dx}=\frac{\int\limits_0^a x\cdot\delta_s y\cdot dx}{\int\limits_0^a y\cdot dx}=\frac{\int\limits_0^a x\cdot\delta_s\frac{hx}{a}\cdot dx}{\frac{ha}{2}}=\frac{\int\limits_0^a x^2\cdot\frac{h}{a}\cdot dx}{\frac{ha}{2}}=$$

$$\xi=\frac{\frac{h}{a}\int\limits_0^a x^2\cdot dx}{\frac{ha}{2}}=\frac{\frac{h}{a}\frac{x^3}{3}\Big]_0^a}{\frac{ha}{2}}=\frac{\frac{h}{a}\frac{a^3}{3}}{\frac{ha}{2}}=\frac{ha^3}{\frac{3\cdot ha^2}{2}}=\frac{2a}{3}$$

$$\eta=\frac{M_x}{A}=\frac{y_c dm}{A}=\frac{y_c\delta_s dA}{\int\limits_0^a y_c\cdot dx}=\frac{\int\limits_0^a \frac{y}{2}\cdot\delta_s y\cdot dx}{\int\limits_0^a y\cdot dx}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^a \delta_s\left(\frac{hx}{a}\right)^2\cdot dx}{\frac{ha}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^a x^2\cdot\frac{h^2}{a^2}\cdot dx}{\frac{ha}{2}}=$$

$$\eta=\frac{h^2x^3\Big]_0^a}{3a^3h}=\frac{h^2a^3}{3a^3h}=\frac{h}{3}$$

14. Encuentre los momentos de inercia de un triangulo escaleno? Los momentos de inercia de un cuerpo conocidos también como los momentos de segundo. Los cuales se definen con la relación:

$$M_x=\sum_{i=1}^{n} r^2dm_i=\sum_{i=1}^{n} y^2dm_i=$$

$$M_x=\sum_{i=1}^{n} y^2dm_i=\sum_{i=1}^{n} y^2\delta_s\cdot dA$$

Se toma el limite cuando n tiende al infinito se obtiene:

$$M_x=\int\limits_0^a y^2\cdot\delta_s\cdot dA=\int\limits_0^a y^2\cdot EF\cdot dy$$

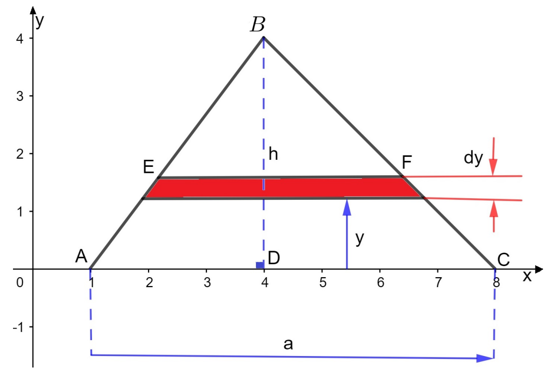


Figura 8.13

El problema que se tiene, es la distancia $\overline{EF}$, que cambia de valor conforme se dibuje en otro lugar del rectángulo infinitesimal . El gráfico nos indica que se tiene dos triángulos semejantes; por lo cual, se escribe proporciones:

$$\triangle CEF\approx\triangle ABC\rightarrow\frac{h-y}{h}=\frac{\overline{EF}}{a}\rightarrow\overline{EF}=\frac{a(h-y)}{h}$$

Se reemplaza:

$$M_x=\int\limits_0^a y^2\cdot\overline{EF}\cdot dy=\int\limits_0^a y^2\cdot\frac{a(h-y)}{h}\cdot dy=\int\limits_0^a y^2ady-\frac{a}{h}\int\limits_0^a y^3\cdot dy=$$

$$M_x=\int\limits_0^a y^2ady-\frac{a}{h}\int\limits_0^a y^3\cdot dy=a\frac{y^3}{3}\Big]_0^h-\frac{a}{h}\frac{y^4}{4}\Big]_0^h=ah^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{ah^3}{12}$$

el calculo de M_y es exactamente lo mismo, en este caso, el rectángulo infinitesimal es paralelo al eje y.

15. Encontrar el momento de inercia de un rectángulo?
Se considera que el rectángulo tiene su base igual a ' a ' y su altura igual a ' h ', ademas, que su densidad superficial es uniforme. El momento de inercia con respecto al eje x se calcula con la formula:

$$I_x = \int_0^h y^2 dm = \int_0^h y^2 \delta_s dA = \int_0^h y^2 \delta_s a \cdot dy =$$

$$I_x = \delta_s a \int_0^h y^2 \cdot dy = \delta_s a \frac{y^3}{3}\Big]_o^h = \delta_s a \frac{h^3}{3}$$

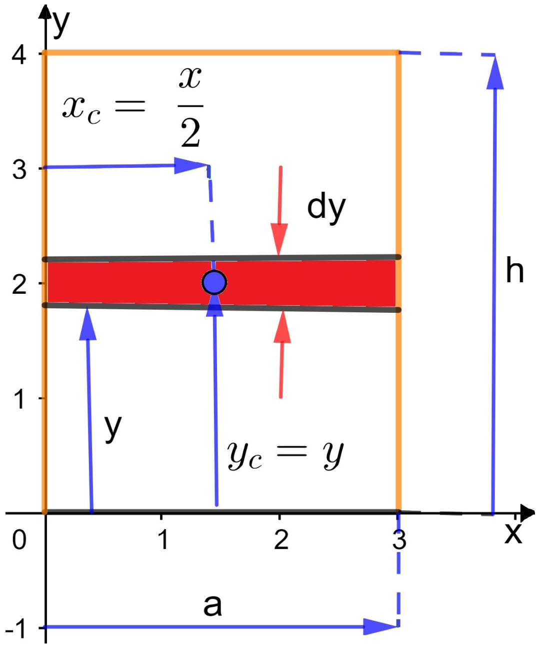


Figura 8.14

Para encontrar el centro de gravedad del rectángulo, se debe calcular el momento estático del cuerpo:

$$M_x = \int_0^h y_c \cdot dm = \int_0^h y \cdot \delta_s dA = \int_0^h y \cdot \delta_s \cdot a \cdot dy =$$

$$M_x = \delta_s \cdot a \int_0^h y \cdot dy = \delta_s \cdot a \ \frac{y^2}{2}\Big]_0^h = \frac{\delta_s a \cdot h^2}{2}$$

La coordenada (y_c), se lo define:

$$y_c = \frac{M_x}{A} = \frac{\delta_s a h^2}{2a \cdot h} = \frac{\delta_s h}{2} = \frac{h}{2} \qquad donde \ \ \delta_s = 1$$

Se considera que el rectángulo tiene su base igual a ' a ' y su altura igual a ' h ', ademas, que su densidad superficial es uniforme. El momento de inercia con respecto al eje y se calcula con la formula:

$$I_y = \int_0^a x^2 dm = \int_0^a x^2 \delta_s dA = \int_0^a x^2 \delta_s h \cdot dx =$$

$$I_y = \delta_s h \int_0^a x^2 \cdot dx = \delta_s h \frac{x^3}{3}\Big]_o^a = \delta_s h \frac{a^3}{3}$$

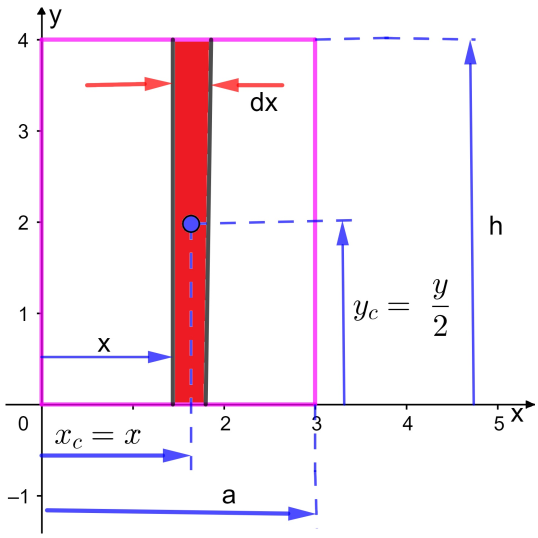


Figura 8.15

Para encontrar el centro de gravedad del rectángulo, se debe calcular el momento estático con respecto el eje x del cuerpo:

$$M_y = \int_0^a x_c \cdot dm = \int_0^a x \cdot \delta_s dA = \int_0^a x \cdot \delta_s \cdot h \cdot dx =$$

$$M_x = \delta_s \cdot h \int_0^a x \cdot dx = \delta_s \cdot h \ \frac{x^2}{2}\Big]_0^a = \frac{\delta_s h \cdot a^2}{2}$$

La coordenada (x_c), se lo define:

$$x_c = \frac{M_x}{A} = \frac{\delta_s h a^2}{2a \cdot h} = \frac{\delta_s a}{2} = \frac{a}{2} \qquad donde \ \ \delta_s = 1$$

Finalmente : $(x_c, \ y_c) = \left(\frac{x}{2}, \ \frac{y}{2}\right)$.

16. Encontrar el momento de inercia de un cono de masa ' M ' , su altura ' h ' y el radio de la base igual a ' R '.
El momento de inercia se lo calcula con la formula:

$$I_x = \int_0^h \frac{1}{2} r^2 \cdot dm$$

Se requiere una relación para el diferencial de la masa, como su densidad es uniforme, se debe aprovechar de esta definición, para el cono en su totalidad ; es decir:

$$\sigma_s = \frac{M}{A} = \frac{M}{\frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}}$$

Y de la densidad para un elemento diferencial, en el gráfico de color rojo:

$$\sigma_s = \frac{dm}{A} = \frac{dm}{\pi \cdot r^2 \cdot dy}$$

Estas dos expresiones se puede igualar con respecto a δ_s, se obtiene:

$$\sigma_s = \frac{dm}{A} = \frac{dm}{\pi \cdot r^2 \cdot dy} = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi \cdot R^2 \cdot h}$$

Se despeja dm:

$$dm = \frac{3Mr^2 dy}{R^2 h}$$

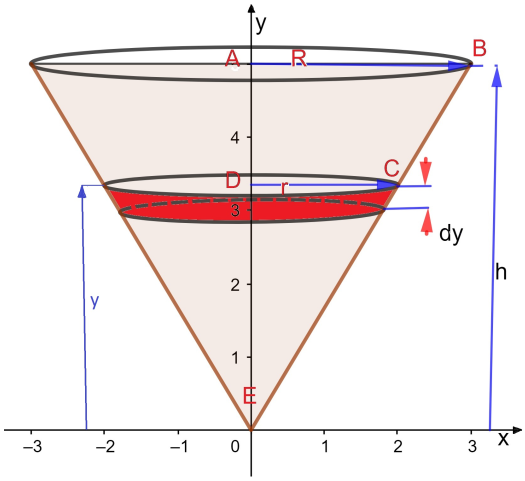


Figura 8.16

Se reemplaza estos valores en la definición de momento de inercia:

$$I_x = \int_0^h \frac{1}{2} r^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \int_0^h r^2 \cdot \frac{3Mr^2}{hR^2} =$$

El gráfico nos indica que el valor de ' r ' va cambiando conforme cambia el valor de ' y '; por lo tanto, se debe encontrar una relación entre estas dos variables. Para cumplir con este objetivo, se ha definido dos triángulos $\Delta ABE \ y \ \Delta CDE$ estos triángulos son semejantes ya que todos sus ángulos son iguales, esto nos permite escribir proporciones:

$$\frac{r}{R} = \frac{y}{h} \rightarrow r = \frac{Ry}{h}$$

Se reemplaza:

$$I_x = \frac{1}{2} \int_0^h r^2 \cdot \frac{3Mr^2 dy}{hR^2} = \frac{1}{2} \int_0^h \cdot \frac{3Mr^4 dy}{hR^2} = \frac{3M}{2} \int_0^h \cdot \frac{R^4 y^4 dy}{h^4 hR^2} = \frac{3M}{2} \int_0^h \cdot \frac{R^2 y^4 dy}{h^5} =$$

$$I_x = \frac{3MR^2}{2} \int_0^h \cdot \frac{y^4 dy}{h^5} = \frac{3MR^2}{2h^5} \frac{y^5}{5} \Big]_0^h = \frac{3MR^2}{10}$$

17. Encontrar el momento de inercia de una esfera hueca de masa ' M ' y radio ' R '.
En la practica uno de las variables que es fácil de determinar es la masa del cuerpo en análisis. Gracias a lo cual, nos ayuda en determinar la densidad del cuerpo, esto se lo puede hacer como un todo o en función de la masa diferencial:

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA}$$

El área de superficie de una esfera es $4\pi \cdot R^2$, La longitud de arco $\overline{CD}$, que se la puede calcular con la formula conocida, pero también se puede utilizar la relación de segmento circular $dL = R \cdot d\theta$. Ademas, se puede escribir la función :

$$\sin\theta = \frac{r}{R} \to r = R \cdot \sin\theta$$

Con estos datos escritos, se puede escribir:

$$dA = 2 \cdot \pi r \cdot dL = 2 \cdot \pi r \cdot Rd\theta = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sin\theta d\theta$$

Se reemplaza en la relación de densidad:

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \to dm = \frac{dA \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R^2} =$$

$$dm = \frac{dA \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{M \cdot \sin\theta}{2}$$

Se escribe la relación de momento de inercia:

$$I_x = \int_0^\pi r^2 \cdot dm = \int_0^\pi R^2 \cdot \sin^2\theta \cdot dm =$$

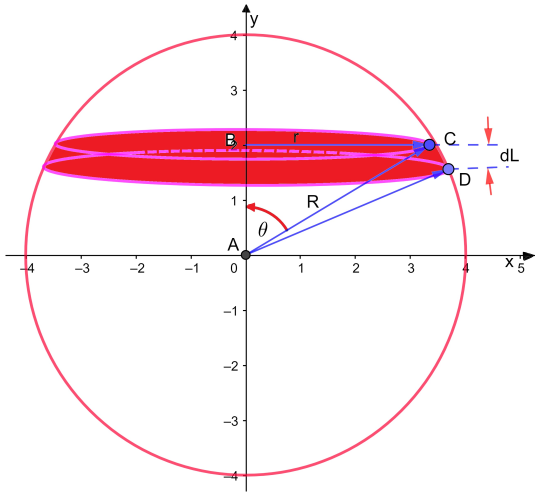


Figura 8.17

$$I_x = \int_0^\pi R^2 \cdot \sin^2\theta \cdot dm = \int_0^\pi R^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \frac{M \cdot \sin\theta}{2} = R^2 \cdot M \int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{2} d\theta$$

La integral $\sin^3\theta$ es ya conocida por el estudiante, se la escribe directamente:

$$I_x = R^2 \cdot M \int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{2} d\theta = \frac{R^2 \cdot M}{2}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = -(-1-1) + \frac{-1-1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot R^2 \cdot M}{3}.$$

18. Encontrar el momento de inercia y el centro de gravedad del área limitada por las figuras $y_1 = k_1\sqrt{x}$; $\quad y_2 = k_2 x^2$
En la solución del ejercicio se debe considerar que el cuerpo es uniforme. En las funciones dadas, se debe representar k_1, k_2 en función del par ordenado (a,b); por lo tanto:

$$y_1 = k_1\sqrt{x} \to b = k_1\sqrt{a} \to k_1 = \frac{b}{\sqrt{a}}$$

$$y_1 = \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}$$

Lo mismo se realiza para la segunda función:

$$y_2 = k_2 x^2 \to b = k_1 a^2 \to k_2 = \frac{b}{a^2}$$

$$y_2 = \frac{b}{a^2} x^2$$

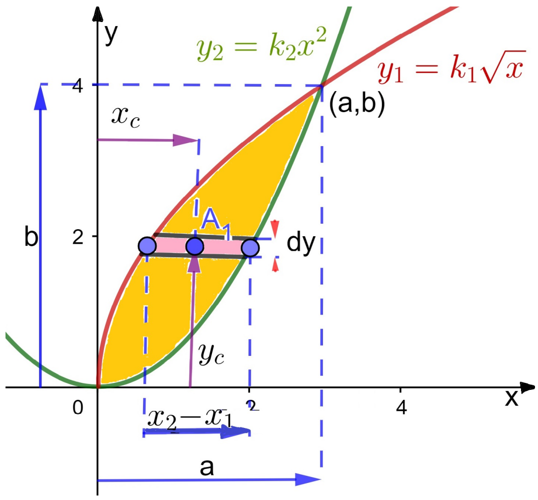


Figura 8.18

Se dibuja el rectángulo auxiliar, sus lados están definidos por ; altura = dy, su largo esta definida por su distancia que es igual: $x_2 - x_1$. Como el rectángulo esta paralelo al eje 0x , sus resultados serán con respecto al eje 0x.

$$dA = dy \cdot (x_2 - x_1) \to dA = dy \cdot \left(\frac{a \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{b}} - \frac{y^2 a}{b^2}\right)$$

El centro de gravedad, en el gráfico , esta definida por el par ordenado (x_c, y_c). El rectángulo tiene dimensiones bien pequeñísimas, diferenciales; por lo tanto: $y_c = y$), la coordenada x_c es el punto medio del largo del rectángulo , el cual, es igual: $x_c = \dfrac{x_2 + x_1}{2}$. Con estos elementos definidos, se puede ya calcular lo que se pide en el ejercicio.

a) Calculo de momento de inercia con respecto el eje 0x:

$$I_x = \int_0^b y^2 \cdot dm = \int_0^b y^2 \cdot \sigma dA = \int_0^b y^2 \cdot dA = \int_0^b y^2 \cdot \left(\frac{a\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{b}} - \frac{y^2 a}{b^2}\right) dy =$$

$$I_x = \int_0^b y^2 \cdot \left(\frac{a\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{b}}\right) dy - \int_0^b \left(\frac{y^4 a}{b^2}\right) dy = \frac{a}{\sqrt{b}} \int_0^b y^{\frac{5}{2}} dy - \frac{a}{b^2} \int_0^b y^4 dy =$$

$$I_x = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\Bigg]_0^b - \frac{a}{b^2} \cdot \frac{y^5}{5}\Bigg]_0^b = \frac{2ay^3}{7}\Bigg]_0^b - \frac{a}{b^2} \cdot \frac{y^5}{5}\Bigg]_0^b = \frac{2ab^3}{7}\Bigg] - \frac{a}{b^2} \cdot \frac{b^5}{5}\Bigg] =$$

$$I_x = \frac{2a}{7} b^3 - \frac{a}{5} b^3 = ab^3 \left[\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{35} ab^3.$$

El calculo de momento de inercia con respecto el eje 0y, es exactamente lo mismo, en este caso, en el gráfico el rectángulo auxiliar es paralelo al eje 0y. El estudiante debe hacerlo como trabajo autónomo.

b) El calculo del centro de gravedad, el par ordenad: $(x_c,\ y_c)$ esta basado en el momento estático del cuerpo, ademas, se considera que el cuerpo es uniforme:

$$M_x = \int_0^b y \cdot dm = \int_0^b y \cdot dA = \sigma \int_0^b y \cdot \left(\frac{a\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{b}} - \frac{y^2 a}{b^2}\right) dy =$$

19. Encontrar el centro de de la función $f(x) = k\cdot x^3$.Considere que la masa de la placa que representa la función es uniforme.

Primero se debe encontrar el valor de k en función de a y h, por lo tanto, se reemplaza en la función:

$$y = kx^3 \rightarrow h = k \cdot a^3 \rightarrow k = \frac{h}{a^3}$$

La función queda de la forma $f(x) = \dfrac{h}{a^3} x^3$. Para el calculo del centro de gravedad es necesario conocer el diferencial del área del rectángulo auxiliar(en rojo) , ver fig.8.19.

$$dA = x \cdot dy = \left[\frac{a \cdot y^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}\right] dy$$

Al integrar se obtiene:

$$A = \int_0^h \left[\frac{a \cdot y^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}\right] dy = \frac{a}{h^{\frac{1}{3}}} \int_0^h y^{\frac{1}{3}} dy = \frac{a}{h^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4}\Bigg]_0^h =$$

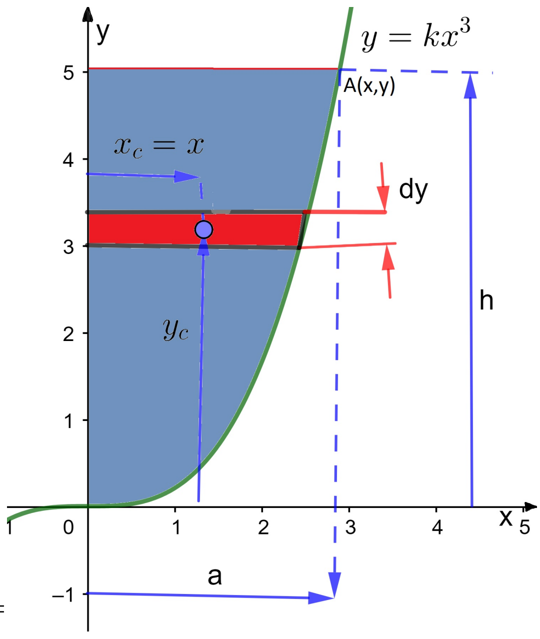


Figura 8.19

$$A = \frac{a}{h^{\frac{1}{3}}} \cdot \left[\frac{3h^{\frac{4}{3}}}{4}\right] = \frac{3ah}{4}$$

Se tiene una relación que representa el área, que se requiere en el calculo de centro de gravedad, que es el área sombreada del ejercicio. Se calcula el centro de gravedad:

$$M_x = \int_0^h y \cdot dm = \int_0^h y \cdot \sigma \cdot da = \int_0^h y \cdot \sigma \cdot x \cdot dy = \sigma \int_0^h y \cdot x \cdot dy = \sigma \int_0^h y \left[\frac{a \cdot y^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}\right] dy =$$

$$= \frac{a\sigma}{\cdot h^{\frac{1}{3}}} \int_0^h \left[y^{\frac{4}{3}} \right] dy = \frac{a\sigma}{\cdot h^{\frac{1}{3}}} \left. \frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} \right]_0^h = \frac{a\sigma}{\cdot h^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{3}{7} h^{\frac{7}{3}} \right] = a\sigma \left[\frac{3}{7} h^2 \right]$$

$$M_y = \int_0^h x \cdot dm = \int_0^h x \cdot \sigma \cdot da = \int_0^h x \cdot \sigma \cdot \frac{x}{2} \cdot dy = \frac{\sigma}{2} \int_0^h x^2 \cdot dy = \frac{\sigma}{2} \int_0^h \left[\frac{a^2 \cdot y^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}} \right] dy =$$

$$= \frac{a^2 \sigma}{2h^{\frac{2}{3}}} \int_0^h \left[y^{\frac{2}{3}} \right] dy = \left. \frac{a^2 3 \cdot \sigma}{2 \cdot 5h^{\frac{2}{3}}}\, y^{\frac{5}{3}} \right]_0^h = \frac{a^2 \cdot 3\sigma}{2 \cdot 5h^{\frac{2}{3}}} h^{\frac{5}{3}} = \frac{3a^2 h\sigma}{10}$$

Con los momentos estáticos y el área obtenidos, se calcula las coordenadas del centro de gravedad (x_c, y_c), se recuerda ademas, que la densidad superficial de la plancha es uniforme ,$\sigma = 1$

$$x_c = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{3a^2 h\sigma}{10}}{\frac{3ah}{4}} = \frac{4a}{10} = \frac{2a}{5}$$

$$y_c = \frac{M_x}{A} = \frac{a\sigma 2 \left[\frac{3}{7} h^2 \right]}{\frac{3ah}{4}} = \frac{4h}{7}$$

8.4.2. Ejercicios Propuestos de Momentos y de Centro de Gravedad

1. Calcular el momento de inercia de un rectángulo de lados a,b con respecto al lado a. Considere que la densidad de superficie ρ es constante.

2. Calcular el momento de inercia con respecto al eje de rotación de un cilindro de radio r y altura h. Considere que la densidad de volumen δ es constante.

3. Calcular el momento de inercia de superficie de un triangulo de base a y altura h.con respecto a la base Considere que la densidad de superficie ρ es constante.

4. Calcular el momento de inercia de un cono cilíndrico de radio r y altura h.con respecto al eje de rotación. Considere que la densidad de volumen δ es constante.

5. Calcular el momento de inercia de un circunferencia de radio r,con respecto a su diámetro. Considere que la densidad de lineal δ es constante.

6. Calcular el momento de inercia de un circulo de radio r,con respecto a su diámetro. Considere que la densidad de superficie ρ es constante.

7. Calcular el momento de inercia de una esfera de radio r,con respecto a su diámetro. Considere que la densidad de volumen ρ es constante.

8. Calcular el momento de inercia con respecto el eje Ox de un cuerpo de una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; a > 0; b > 0$. Considere que la densidad de volumen ρ es constante.

9. Calcular el momento de inercia con respecto el eje Ox de una cadena $y = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right);\ a > 0;\ -a \leq x \leq a$. Considere que la densidad lineal λ es constante.

10. Calcular el momento de inercia de un rectángulo de lados a,b con respecto su base. Considere que la densidad de superficie ρ es constante.

11. Calcule el momento estático de un rectángulo de base a y altura h, con respecto a su base. Considere su densidad de superficie ρ constante.

    a) Su volumen de rotación con respecto el eje y

    b) Su volumen de rotación con respecto el eje x

   c) Su centro de gravedad
   d) Su momento de inercia

12. Calcule el momento estático de un triangulo rectángulo de lados a,b, con respecto sus lados. Considere su densidad de superficie ρ constante.
13. Calcule el momento estático de un segmento parabólico $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$; $a > 0$; $h > 0$. Considere su densidad de superficie ρ constante.
14. Calcule el momento estático con respecto el eje Ox y Oy de un segmento parabólico $y = \sqrt{2px}$; con el eje Ox y la recta $x = x_0$ Considere su densidad de superficie ρ constante.
15. Calcule el momento estático con respecto el eje Ox y Oy de un segmento parabólico $y = a\cos\left(\frac{2\pi}{b}x\right)$; Considere su densidad de superficie ρ constante.
16. Calcule el momento estático con respecto el eje Ox de un segmento parabólico $y = \sqrt{2px}$; $0 \leq x \leq 2$.
17. Calcule el momento estático con respecto el eje Ox y Oy de una área limitada $x = t^2 - t$; $y = t^3 + t^2$ con el eje Ox.
18. Calcule el momento estático con respecto el eje Ox y Oy de una área limitada $x = t^2 - t$; $y = t^3 + t^2$ con el eje Ox.
19. Encuentre el centro de gravedad de una semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; $-r \leq x \leq r$
   a) Su volumen de rotación con respecto el eje y?
   b) Su volumen de rotación con respecto el eje x?
   c) Su centro de gravedad?
   d) Su momento de inercia?
20. Encuentre el centro de gravedad de una semiesfera que resulta al rotar un cuarto de circulo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; $-r \leq x \leq r$ alrededor del eje Ox.
21. Encuentre el centro de gravedad de un cono circular de base r y altura h.
22. Encuentre el centro de gravedad de una cadena $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $a > 0$; $-a \leq x \leq a$
23. Encuentre el centro de gravedad de un cicloide $x = a(t - \sin(t)); y = a(1 - \cos(t)); a > 0; 0 \leq t \leq 2\pi$
24. Hállese el momento estático de la sinusoide $y = \sin x$, $0 \leq x \leq$ con respecto:
   a) Con respecto el eje y?
   b) Con respecto el eje x?
   c) Su centro de gravedad?
   d) Su momento de inercia?
25. Hállese el momento de inercia de un cuerpo homogéneo $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ para x = 0 ,y = 0, z = 0 y $a, b, c > 0$
   a) Con respecto el plano Oxy,?
   b) Con respecto el plano Oxz,?
   c) Con respecto el plano Oyz?

1. Por el método del trapecio y de Simpson calcular.
   a) La integral $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + x^2}dx$ donde n = 5 , calcule, además, el error cometido.

b) La integral $\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{1-x^3}$ donde n = 10 , calcule, además, el error cometido.

c) La integral $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$ donde n = 10 , calcule, además, el error cometido.

d) La integral $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^3}dx$ donde n = 10 , calcule, además, el error cometido.

e) La integral $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$ donde n = 10 , calcule, además, el error cometido.

2. Al dividir el intervalo de integración en 12 partes iguales calcular $\ln 5 = \int_{1}^{5} \frac{dx}{x}$, además, calcule el error cometido.

3. Calcular el valor aproximado del valor de π, aplique el método del trapecio de la integral : $\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{1+x}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 6.

5. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{x^2}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 4.

6. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}dx$ con precision de hasta 0,01 , tomando n = 8.

7. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}dx$ con precision de hasta 0,01 , tomando n = 8.

8. Al dividir el intervalo de integración en 10 partes iguales calcular $\ln 2 = \int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$, además, calcule el error cometido.

9. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{x^3}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 4.

10. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 6.

11. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 6.

12. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_{1}^{2} \frac{dx}{1+x^2}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 8.

13. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}dx$ con precision de hasta 0,001, tomando n = 10

Capítulo 9

Integrales Impropias

9.1. Características Básicas De Integrales Impropias

En todo el estudio realizado, hasta ahora, de integrales definidas, se han utilizado principalmente dos propiedades fundamentales:

1. la función tenía que ser acotada en un intervalo $[a, b]$ donde a,b $\in$ **R**; por lo tanto, debe ser continua en ese intervalo, y
2. El intervalo de integración tenía que ser cerrado y acotado.

En este capitulo, se ampliará los conceptos de la integral de Riemann:

1. La integral de una función acotada, definida en un intervalo no acotado: son integrales impropias de primer tipo, un ejemplo de este tipo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in [1, \infty)$$

2. La integral de una función no acotada, definida en un intervalo acotado: son integrales impropias de segundo orden, un ejemplo de este tipo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in (0, 1]$$

3. La integral de una función no acotada, definida en un intervalo no acotado: son integrales impropias de primer y segundo tipo, un ejemplo de este tipo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in (0, \infty)$$

Lo que significa que:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x} dx}_{primer \quad tipo} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x} dx}_{segundo \quad tipo} =$$

9.2. Integrales Impropias de Primer Tipo

Integrales impropias de primer tipo, son todas aquellas que tienen la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \qquad \int_a^{\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Siendo la función f(x) acotada en el intervalo correspondiente. En base a lo escrito, se puede concluir que; si una función f(x) es acotada y definida en un intervalo $[a, \infty)$ donde $a \in \mathbf{R}$. Si para todo valor $b > a$, la función es integrable en el intervalo definido $[a, \infty)$ y además, es finito (convergente) el limite:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

En tal caso; se dice, que la integral impropia de f(x) en el intervalo $[a, \infty)$ existe y es convergente. De la misma manera, se puede concluir que: si una función f(x) es acotada y definida en un intervalo $[-\infty, b)$ donde $b \in \mathbf{R}$. Si para todo valor $b > a$, la función es integrable en el intervalo definido $[-\infty, b)$ y además, es finito (convergente) el limite:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

En tal caso; se dice, que la integral impropia de f(x) en el intervalo $[a, \infty)$ existe y es convergente. De la misma manera, se puede a concluir que: si una función f(x) es acotada y definida en un intervalo

$[-\infty,\infty)$. Si para todo valor $b > a$, la función es integrable en el intervalo definido $[a,b]$ y además, es finito (convergente) el limite:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad y \qquad \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

En tal caso; se dice, que la integral impropia de f(x) en el intervalo $[-\infty,\infty)$ existe y es convergente. Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

De las fórmulas arriba escritas, se debe entender que:

1. Se debe obtener la integral indefinida y se lo hará en la misma forma como se lo ha hecho en el curso de cálculo integral.,
2. En las funciones primitivas, se reemplaza los valores de los limites de integración, con los valores de a o b.
3. Se aplica las definiciones y propiedades de limites.

De lo comentado sobre integrales impropias de primer tipo, se puede entender, que son todas aquellas integrales, en las cuales, en uno de sus extremos o en ambos, del intervalo de integración está definido por mas/menos infinito ($\pm\infty$).

9.3. Integrales Impropias de Segundo Tipo

Integrales de segundo orden, son todas aquellas, en las cuales en el interior del dominio de la función f(x), existe una asimptota; por lo tanto, la función no es continua en todo su intervalo cerrado $[a,c]$ donde $a,c \in \mathbf{R}$.
Al aplicar propiedades de intervalos al dominio, se lo puede escribir:

$$[a,c] = [a,b) + (b,c]$$

El punto b, seria el punto en el cual la función f(x) no es continua en el intervalo $[a,c]$, pero, para que el intervalo sea cerrado, se lo puede escribir en la forma:

$$[a,c] = [a,b-\varepsilon] + [b+\varepsilon,c]$$

Donde epsilon seria un valor positivo cualquiera que tiende a cero ($\varepsilon \to 0$). En función de lo escrito, se tendría dos casos:

1. Sea una función f(x) definida (continua) en el intervalo $[a,b)$ y supóngase que la función f(x) es integrable en el intervalo $[a,b-\varepsilon]$ para todo valor positivo de epsilon mayor a cero. Si existe el limite de:

   $$\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

   En tal caso; existe la integral impropia y es convergente.

2. Sea una función f(x) definida (continua) en el intervalo (b,c) y su póngase que la función f(x) es integrable en el intervalo $[b+\varepsilon, c\varepsilon]$ para todo valor positivo de epsilon mayor a cero. Si existe el limite de:

   $$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{b+\varepsilon}^{c} f(x)dx$$

   En tal caso, existe la integral impropia y es convergente.

En función a lo que se ha escrito:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to0}\int_{b+\varepsilon}^{c} f(x)dx =$$

De la fórmula arriba escrita, se debe entender que:

1. Se debe obtener la integral indefinida y se lo hará en la misma forma como se lo ha hecho en el curso de cálculo integral.,
2. En las funciones primitivas, se reemplaza los valores de los limites de integración, con los valores de ε.
3. Se aplica las definiciones y propiedades de limites.

9.3.1. Ejercicios Resueltos de Integrales Impropias

1. Calcule la integral $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

La función es no continua en el punto x = 0; por lo que, se puede escribir, como limite inferior de la integral $\varepsilon > 0$:

$$\int_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^3 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}$$

Como ε es un valor positivo, pero muy pequeño, es decir, $\varepsilon \to 0$, se debe escribir:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^3 = 2\sqrt{3}$$

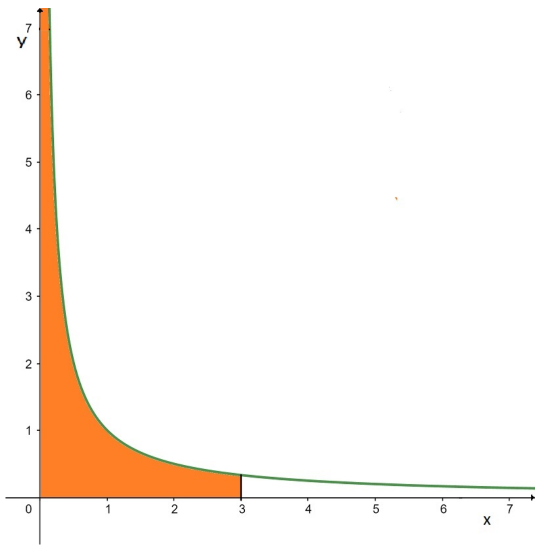


Figura 9.1

2. Integra la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ en el intervalo $0 \le x \le 9$.

Se realiza el gráfico de la función dada, figura 9.2; para lo cual, se aplica los diferentes teoremas, definiciones que fueron analizados en cálculo diferencial.
El estudiante debe poner a prueba el conocimiento que debe tener de cálculo diferencial para obtener el gráfico de la función dada.
El dibujo presenta el área que se desea calcular. además la función no es continua en el punto x = 1, que pertenece al intervalo $[0,9]$ para los valores $x < 1$ la función es negativa y para los valores $x > 1$ la función es positiva. El área buscada es igual a la integral:

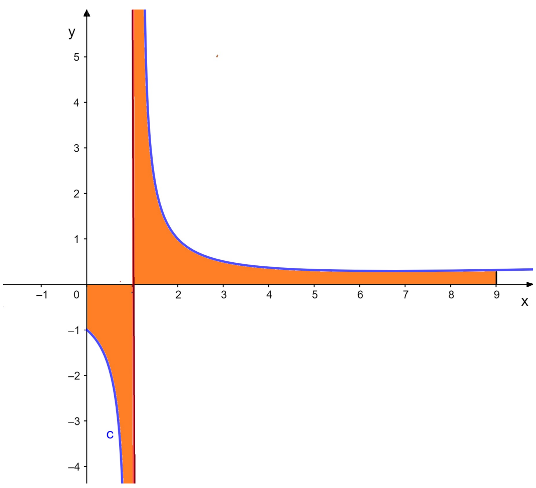


Figura 9.2

$$\int_0^9 \frac{dx}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^9 \frac{dx}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|}$$

Por facilidad, se calcula la integral indefinida de la función dada:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int (x-1)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x-1})^2$$

Se escribe los limites de integración:

$$-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|}=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|}\right]=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x-1})^2\right]_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{-\varepsilon})^2-\frac{3}{2}\right]=-\left[-\frac{3}{2}\right]=\frac{3}{2}$$

Se calcula la segunda integral:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{9}\frac{dx}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{1+\varepsilon}^{9}\frac{dx}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x-1})^2\right]_{1+\varepsilon}^{9}=6$$

Finalmente, se puede ya escribir:

$$\int_0^9\frac{dx}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|}=\frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}$$

3. Calcule la integral $\int\limits_0^1\frac{dx}{x\sqrt{x}}$

   La función es continua en el intervalo $[0,1]$ con excepción del punto x = 0. Calculamos la integral:

$$\int_0^1\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2+\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=+\infty$$

   Lo que significa, que el cálculo de esa área es imposible de calcular y ; por lo tanto, la integral es divergente.

4. Calcule la Integral:

$$\int_1^{\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2dx$$

   En la forma como está escrita la integral, se concluye que es una integral impropia y por lo tanto, se escribe:

$$\lim_{v\to\infty}\int_1^{v}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2dx$$

   Se calcula la integral indefinida:

$$\int\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2dx=\int\frac{4}{x^2}dx+\int\frac{4}{x^3}dx+\int\frac{1}{x^4}dx=-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$$

   Se pasa a la integral definida:

$$\int_1^{v}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2dx=-\frac{4}{v}-\frac{2}{v^2}-\frac{1}{3v^3}-\left(-4-2-\frac{1}{3}\right)=$$

   Cuando v tiende al infinito ($v\to\infty$) los tres primeros expresiones son igual a cero y finalmente se obtiene:

$$\int_1^{\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2dx=\frac{19}{3}$$

5. Calcule la integral $y = \dfrac{5x}{x^4+1}$ en el intervalo de $(-\infty, \infty)$
   Como se puede observar, es una integral impropia; por lo tanto, se debe escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5xdx}{x^4+1} = \lim_{u\to-\infty} \int_{u}^{0} \frac{5xdx}{x^4+1} + \lim_{v\to\infty} \int_{0}^{v} \frac{5xdx}{x^4+1} =$$

   Del gráfico que representa la integral buscada, se observa que:

$$\frac{5x}{x^4+1} < 0 \quad cuando \quad x < 0 \qquad\qquad \frac{5x}{x^4+1} > 0 \quad cuando \quad x > 0$$

   El gráfico de la función debe hacerlo el estudiante. El número 5 es una constante y puede salir delante de la integral; por lo tanto, se escribirá el 5 al final del ejercicio.
   En función de la información del gráfico se debe escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1} = \lim_{u\to-\infty} - \int_{u}^{0} \frac{xdx}{x^4+1} + \lim_{v\to\infty} \int_{0}^{v} \frac{xdx}{x^4+1} =$$

   Se calcula la integral indefinida, para lo cual, en la integral se realiza un cambio de variable $x^2 = t, \quad 2xdx = dt$:

$$\int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \arctan t = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$$

   Se escribe las integrales definidas:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{x^4+1} = \lim_{u\to-\infty} \left[-\int_{u}^{0} \frac{xdx}{x^4+1} \right] = \lim_{u\to-\infty} -\left[\frac{1}{2} \arctan(x^2) \right]_{u}^{0} = -\left[\frac{-\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1} = \lim_{v\to\infty} \left[\int_{0}^{v} \frac{xdx}{x^4+1} \right] = \lim_{v\to\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan(x^2) \right]_{0}^{v} = \left[\frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{4}$$

   Finalmente, se debe escribir que el área buscada es igual a : $A = 5\left[\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right] = \dfrac{5\pi}{2}$. Se presente el gráfico de la integral:

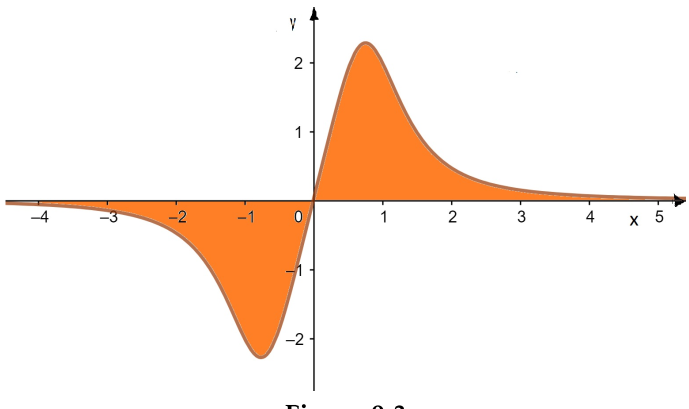


Figura 9.3

6. Un conductor lineal suficientemente largo, está cargado eléctricamente uniforme; en tal forma que, la carga por unidad de longitud es igual a γ . Calcular el valor de intensidad del campo eléctrico K a una distancia 'a' del conductor.

   De física, se conoce que el campo electrostático de un cuerpo es una importante propiedad, que se lo conoce con el nombre de Teorema de Gauss.

El componente paralelo al vector K del campo en el punto P producido por la carga $\triangle q = \gamma \triangle l$ que se acumula en un segmento $\triangle l$, se lo puede calcular en función de la relación.

$$\triangle k = \frac{\triangle q \cos\varphi}{r^2} = \frac{\gamma \triangle l \cos\varphi}{r^2} \qquad Donde \qquad r = \frac{a}{\cos\varphi}$$

Por lo que :

$$\triangle k = \frac{\gamma \triangle l \cos^3\varphi}{a^2}$$

La intensidad del campo electrostático K en el punto P seria igual:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \cos^3 \varphi dl}{a^2}$$

Se realiza un cambio de variable $l = a \sin\varphi$ por lo cual, $dl = a\cos\varphi d\varphi$. Se reemplaza:

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma \cos^4 \varphi d\varphi}{a} = \frac{\gamma}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\gamma}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + 4\cos 2\varphi + \cos\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{\gamma}{8a}\left(3\varphi + 2\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi\gamma}{8a}$$

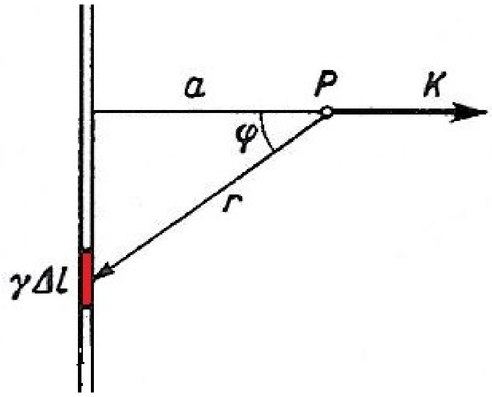


Figura 9.4

7. Calcular el área de la figura conocida con el nombre de hoja Cartesiana definida por las relaciones:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Donde $a > 0$ y el parámetro t toma valores del intervalo $0 \leq t \leq +\infty$.

Se aplica la integral en su forma paramétrica, para el cálculo del área requerida:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{3at^2}{(1+t^3)} \frac{3a(1-2t^2)}{(1+t^3)^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{9a^2t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt = 9a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt$$

Se debe tener en cuenta que la derivada $\frac{dx}{dt}$ es negativa; por lo tanto, se debe anteponer el signo negativo en la integral, además por facilidad de integración se realiza un cambio de variable $t^3 = k$ y su derivada es igual a $3t^2 dt = dk$:

$$= -\left[9a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt\right] = -\left[-9a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2(2t^3-1)}{(1+t^3)^3} dt\right] = \left[9a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt\right] =$$

$$= \left[3a^2 \int_0^{\infty} \frac{(2k-1)}{(1+k)^3} dk\right] = \lim_{v\to\infty}\left[3a^2 \int_0^{v} \frac{(2k-1)}{(1+k)^3} dk\right] = 3a^2 \lim_{v\to\infty}\left[\int_0^{v} \frac{(2k-1)}{(1+k)^3} dk\right]$$

Se encuentra la integral:

$$\int_0^{v} \frac{(2k-1)}{(1+k)^3} dk = \lim_{v\to\infty}\left[-\frac{2}{(1+k)} + \frac{3}{2}\frac{1}{(1+k)^2}\right]_0^{v} = \frac{3}{2}a^2$$

9.3.2. Ejercicios Propuestos de Integrales Impropias

1. Calcular las integrales:

1. $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x}$
2. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$
3. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{4x^3}}$
4. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
5. $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{xdx}{\sqrt{4-9x^4}}$
6. $\int_{-2}^0 \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$
7. $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$
8. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x-x^2}}$
9. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
10. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
12. $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$
13. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$
14. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$
15. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$
16. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$
17. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
2. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$
4. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $\quad a<b$
5. $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^2}$
6. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
7. $\int_2^4 x\sqrt{\frac{x-2}{4-x}}dx$
8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2}}$
9. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$
11. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$
12. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$
13. $\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$
14. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
15. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
16. $\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$
17. $\int_0^{\to\infty} x\cos x dx$

Capítulo 10

Integrales Aproximadas

10.1. Características Básicas De Integrales Aproximadas

Integración aproximada o integración numérica, es un capitulo de la matemática de gran utilidad en las distintas ramas de la Ingeniería. Se utiliza, cuando es dificultoso, trabajoso o incluso imposible, obtener el valor exacto, por métodos tradicionales, de una integral definida, y entonces nos conformamos con un valor aproximado. Pero además, el Ingeniero necesita saber, cuán confiable es el resultado obtenido. En otras palabras, desea conocer el error cometido.

Por ejemplo, encontrar la primitiva de la función $f(x) = e^{-x^2}$, la cual, no se puede expresar como una combinación de **un número finito de pasos** de las llamadas funciones elementales.
Por otra parte, en el trabajo diario de un Ingeniero, se suele trabajar con funciones **cuya ley no se conoce.** Son funciones "empíricas"; es decir que, surgen de mediciones de un experimento realizado.
Por dar sólo un ejemplo, imaginemos que la Empresa Provincial de la Energía mide, en cada instante del día, la potencia total demandada por sus clientes de la Mitad del Mundo, expresada en kilovatios. La integral de la potencia con respecto al tiempo, a lo largo de 24 horas, nos dará la energía total consumida durante la jornada (en kilovatios/hora).
Ante la imposibilidad de determinar el valor exacto, en un momento dado, por medio de una integral, pero se desea hallar un valor lo más aproximado posible. En las páginas que siguen, se presenta algunas técnicas, para calcular tal valor aproximado y para obtener una estimación del error cometido.
En una forma rápida, se podría decir, que la Teoría de integración numérica o integración aproximada comprende de 3 etapas, a saber:

1. **Diseñar distintos métodos que permitan obtener el valor aproximado de una integral.** Estos métodos son conocidos y tienen actualmente un sencillo algoritmo informático.

2. **Para cada método, encontrar una fórmula que exprese el error cometido,** al estilo del Teorema de Lagrange, se encuentra una apropiada derivada, en un punto intermedio desconocido.

3. **Aplicar la fórmula del paso anterior para determinar la deseada acotación del error.**

10.2. Intención de las Integrales Aproximadas

La intención de las integrales aproximadas, se lo puede indicar en los siguientes pasos:

1. Dado que, a la integral definida, se la define como un límite de sumas de Riemann, la idea inicial es aproximar el valor de la integral mediante una transformación conveniente de la suma de Riemann. El valor $f(\xi_i)$ es un buen indicador de los distintos valores que asume $f(\xi_i)$ en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

2. Al intervalo analizado, [a,b] donde $a, b \in \mathbf{R}$, se lo divide, por obvias razones de comodidad, para los cálculos, se lo divide en particiones, donde cada uno de ellos tiene (o no) la misma longitud; es decir que:
$$\triangle_{x_i} = \frac{b-a}{n} \qquad \forall i = 1, 2...n; \quad i \in N$$
Con lo cual, se puede encontrar:
$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_{x_i}) \triangle x_i = \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_{x_i}) \left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_{x_i})$$
Esta condición es bastante real y de alta aplicación, para las funciones empíricas, que analiza un Ingeniero, pues las mediciones, en forma general, se realizan a intervalos regulares. Por lo tanto, está condición, se puede aplicar en todos los análisis matemáticos.

3. Según , la terminología utilizada $y_i = f(\xi_i)$, las alternativas mas comunes para ξ_i

   a) Métodos del lado izquierdo, cuando $\xi_i = x_{i-1}$,

   b) Métodos del lado derecho, cuando $\xi_i = x_i$,

   c) Métodos del valor medio, cuando $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$,

   Con lo cual, se está en condiciones de obtener sumas de Riemann; es decir:

a) $I_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{i=n} f(x_{i-1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}),$

b) $D_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_n),$

c) $M_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{i=n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$

La pregunta que, debe hacer el estudiante es: Cual de los tres métodos utilizar? No hay una respuesta clara de cual utilizar, se puede aplicar la intuición. En cualquiera de los tres métodos, el error tiende a cero cuando $'n'$, cuando el número de particiones del intervalo, tiende al infinito. La única diferencia, entre los tres métodos, es la velocidad, con la cual, el error tiende a cero. En el método del valor medio, su velocidad es la mayor.

Si se conoce que la función f(x) es continua en el intervalo [a,b], se puede calcular:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde F(x) es la función primitiva de la función f(x) en el intervalo [a,b].

En muchas casos, encontrar la función primitiva F(x) de la función f(x) no demanda mucho trabajo en su cálculo, pero en algunos casos, puede dificultarse por:

1. La función primitiva F(x), no se la puede representar por funciones básicas o elementales,
2. El cálculo de la función primitiva F(x) es un proceso largo y complicado o el cálculo del valor de la función en sus extremos demanda cálculos aproximados o complejos.

En estos casos, el cálculo de la función primitiva F(x), se lo realiza aplicando métodos aproximados de integración y entre ellos hay dos métodos:

1. Método del Trapecio,
2. Método de Simpson.

10.3. Método del Trapecio

Dada una función f(x), continua en el intervalo [a,b]. Al intervalo [a,b], se lo divide en ' n ' partes iguales. Los puntos $A_i(x_i, y_i)$, donde $y_i = f(x_i)$ divide al gráfico de la función y = f(x) en 'n' arcos, ver gráfico. Por lo tanto, se forman trapecios, de ahí, proviene el nombre del método.

El trapecio definido por los puntos $x_{i-1},\ x_i,\ A_i\ y\ A_{i-1}$, donde el segmento formado por los puntos x_{i-1} , x_i es la altura del trapecio, los segmentos x_{i-1} , A_{i-1} es la base menor y x_i ,A_i es la base mayor del trapecio.

El área de un trapecio está definido por la relación:

$$P = \frac{altura\ (base\ menor + base\ mayor)}{2}$$

En este análisis, se tendría la simbología:

$$altura = \frac{b-a}{n} = x_{i-1} - x_i$$

$$base\ menor = f(x_{i-1}) = y_{i-1}$$

$$base\ mayor = f(x_i) = y_i$$

Por lo tanto:

$$P = \left(\frac{b-a}{n}.\right)\left[\frac{(y_{i-1}\ +\ y_i\ )}{2}\right] \qquad (i = 1, 2, 3...n)$$

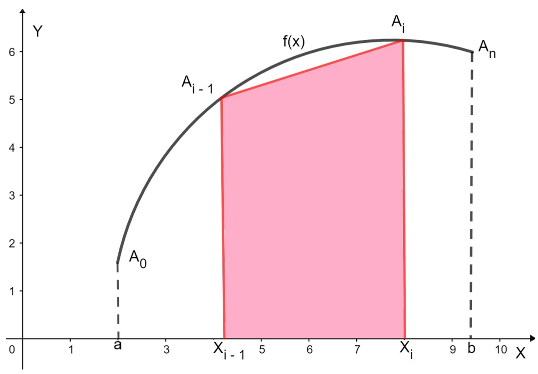


Figura 10.1

La suma de todos los trapecios en el intervalo [a,b]:

$$\delta_n = \sum_1^n P_i = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_1^n \left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right)\right]$$

Se toma limites a ambos lados de la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n P_i = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_1^n \left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right)\right]$$

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n P_i = \left(\frac{b-a}{2n}\right)\left[\lim_{n\to\infty} \sum_1^n (y_{i-1}+y_i)\right]$$

Se puede escribir:

$$\delta \approx \int_a^b f(x)dx \approx \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{b-a}{2n}\right)\sum_1^n (y_{i-1}+y_i)\right]$$

Una forma mas cómoda para realizar los cálculos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}))\right]$$

Que representa el área debajo de la función f(x).
En los cálculos, se puede solicitar:

1. El error, que se comete en el cálculo de la integral. El cual, se lo puede obtener:

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - \delta_n$$

2. Se desea conocer 'n' para que los cálculos tengan un error pre-determinado.

Existe diferentes fórmulas para el cálculo del error, la mas común, define que, si la función f(x) es continua en el intervalo [a,b], es decir, es una función C^2 y posee las derivadas hasta segundo orden, R_n se puede calcular:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \qquad donde: M_2 = \max_{a\le x\le b} \left|f''(x)\right|$$

De está desigualdad resulta que, 'R_n' tiende a cero cuando 'n' tiende al infinito.
Si se desea calcular la integral con un grado de exactitud $\varepsilon > 0$; entonces, el intervalo [a,b] se divide en un número de 'n' partes, para que cumpla la desigualdad:

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 < \varepsilon$$

En ese caso, n:

$$n = \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2}$$

10.4. Método del Simpson

Una de las aplicaciones de integrales, es el calculo del área que se forma debajo de la función f(x) y el eje Ox. Esta área, se lo puede calcular por diferentes métodos, dependiendo del tipo de función f(x) que se tenga. Estos métodos son ya conocidos, por el estudiante. En el momento en que, la función f(x), no se puede descomponer en funciones básicas o elementales, se debe aplicar el método del trapecio. La base de este método es formar trapecios uniendo los puntos y_i con y_{i+1} con una recta. Si se desea encontrar el área con mucha más exactitud, es mejor utilizar el método de Simpson.

La diferencia con el método del trapecio, es que, se utiliza una parábola, en vez de una recta; pero como, el teorema básico de la parábola indica que, se debe haber tres puntos, para dibujar una parábola. Es la razón, por lo cual, al intervalo [a,b], se lo divide en un numero par de puntos, de tal forma que n = 2m.
En nuestro caso, los tres puntos serian A_0, A_1, A_2.

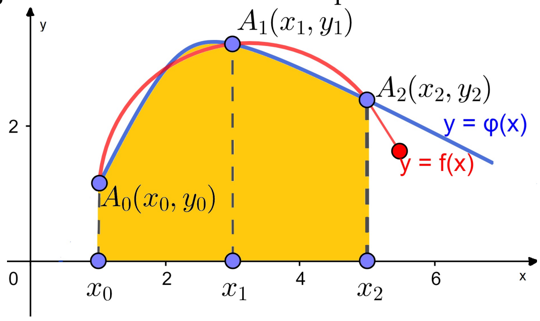


Figura 10.2

La parábola en su forma general, se la define $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ y debe pasar por los tres puntos $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$ y pertenecen al gráfico de $y(x)$. Al punto A_1, se lo expresa, como el punto medio entre A_1 *y* A_2; es decir:

$$x_1 = \left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right), \quad y_1 = \left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right)$$

El intervalo [a,b] ha sido dividido:

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, ..., x_{2m-2}, \quad x_{2m-1}, \quad x_{2m} = b$$

La distancia entre punto y punto, se la define, en forma general:

$$x_{2m+1} - x_{2m} = \left(\frac{b-a}{2m}\right)$$

Que es la misma distancia, para dos puntos seguidos del intervalo [a,b]. Los valores de la función f(x), en los puntos del intervalo, son:

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad ..., \quad y_{2m-2}, \quad y_{2m-1}, \quad y_{2m}$$

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad ..., \quad y_{2m-1} = f(x_{2m-1}), \quad y_{2m} = f(x_{2m})$$

Con todos estos elementos definidos, para este análisis, se toma en consideración, el primer elemento, limitado por x_0, x_1, x_2, donde:

$$x_1 = \left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right), \quad \rightarrow \quad x_0 + x_2 = 2x_1$$

En el intervalo $[x_1, x_2]$ el arco de l función f(x), se la reemplaza por la función $\varphi(x)$ que es el arco de la parábola; por lo tanto:

$$\varphi(x) = px^2 + qx + r$$

La parábola pasa por los puntos: $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$; por lo cual, se puede escribir:

$$y_0 = \varphi(x_0) = px_0^2 + qx_0 + r$$

$$y_1 = \varphi(x_1) = px_1^2 + qx_1 + r$$

$$y_2 = \varphi(x_2) = px_2^2 + qx_2 + r$$

El área s_1 limitada por el eje Ox, las ordenadas y_0, y_2 y el arco de la parábola $\varphi(x)$, se lo puede encontrar por la integral:

$$s_1 = \int_{x_0}^{x_2} (px^2 + qx + r)dx = \left(\frac{p}{3}\right)(x_2^3 - x_0^3) + \left(\frac{q}{2}\right)(x_2^2 - x_0^2) + r(x_2 - x_0) =$$

$$= \left(\frac{p}{3}\right)(x_2 - x_0)(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + \left(\frac{q}{2}\right)(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) + r(x_2 - x_0) =$$

Se aplica propiedades de: factor común y mínimo común múltiplo:

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)\Big[2p(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + 3q(x_2 + x_0) + 6r\Big] =$$

Se aplica asociativa:

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)\Big[(px_2^2 + qx_2 + r) + px_2^2 + 2px_2x_0 + 2px_0^2 + 2qx_2 + 3qx_0 + 5r\Big] =$$

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)\Big[y_2 + p(x_2^2 + 2x_2x_0 + x_0^2) + px_0^2 + 2qx_2 + 3qx_0 + 5r\Big] =$$

$$= \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)\Big[y_2 + p(x_2 + x_0)^2 + px_0^2 + 2q(x_2 + x_0) + qx_0 + 5r\Big] =$$

Se aplica asociativa:

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)\Big[y_2 + (p(x_2 + x_0)^2 + 2q(x_2 + x_0) + 4r) + (px_0^2 + qx_0 + r)\Big] =$$

Se recuerda que: $2x_1 = x_2 + x_0$

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)\Big[y_2 + (p(2x_1)^2 + 2q(2x_1) + 4r) + (px_0^2 + qx_0 + r)\Big] =$$

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)\Big[y_2 + 4(p(x_1)^2 + q(x_1) + r) + (px_0^2 + qx_0 + r)\Big] =$$

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)[y_2 + 4(x_1) + (y_0)] =$$

Se conmuta la última expresión:

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)[y_0 + 4(y_1) + (y_2)]$$

Se debe considerar que:

$$x_2 - x_0 = 2\left(\frac{b - a}{2m}\right) = 2\left(\frac{b - a}{n}\right)$$

Finalmente se obtiene:

$$s_1 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)[y_0 + 4(y_1) + (y_2)] = \left(\frac{b - a}{3n}\right)[y_0 + 4(y_1) + (y_2)]$$

Se realiza un análisis idéntico para s_2, se obtiene:

$$s_2 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)[y_2 + 4(y_3) + (y_4)] = \left(\frac{b - a}{3n}\right)[y_2 + 4(y_3) + (y_4)]$$

$$s_3 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)[y_4 + 4(y_5) + (y_6)] = \left(\frac{b - a}{3n}\right)[y_4 + 4(y_5) + (y_6)]$$

$$s_4 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)[y_6 + 4(y_7) + (y_8)] = \left(\frac{b - a}{3n}\right)[y_6 + 4(y_7) + (y_8)]$$

$$s_4 = \left(\frac{x_2 - x_0}{6}\right)[y_6 + 4(y_7) + (y_8)] = \left(\frac{b - a}{3n}\right)[y_6 + 4(y_7) + (y_8)]$$

....

$$s_m = \left(\frac{b - a}{3n}\right)[y_{2m-2} + 4(y_{2m-1}) + (y_{2m})]$$

La suma de s_i cuando i = 0,1,2,3...m, nos daría en aproximación el área debajo de función f(x) y el eje Ox. Para que, la aproximación sea mas exacta; con lo cual, mas cercana a la realidad, se toma el limite cuando n (o m) tiende al infinito. Realizadas estás dos operaciones, se puede escribir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b - a}{3n}\right)[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})]$$

A está ultima relación, se la conoce con el nombre de fórmula de Simpson. El método de Simpson, por lo general da mejores resultados de aproximación que el método del trapecio.

Existe diferentes fórmulas para el cálculo del error, la mas común, define que, si la función f(x) es continua en el intervalo [a,b], es decir, es una función C^4 y posee las derivadas hasta cuarto orden, R_n se puede calcular:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4 \qquad donde : M_4 = \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(IV)}(x) \right|$$

De está desigualdad resulta que, 'R_n' tiende a cero cuando 'n' tiende al infinito.
Si se desea calcular la integral con un grado de exactitud $\varepsilon > 0$; entonces, el intervalo [a,b] se divide en un número de 'n' partes, para que cumpla la desigualdad:

$$\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4 < \varepsilon$$

En ese caso, n:

$$2n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M_4} \quad o \quad 2n \geq (b-a)\sqrt{\frac{(b-a)}{180\varepsilon} M_4}$$

10.4.1. Ejercicios Resueltos de Integrales Aproximadas

1. Calcule con el método del trapecio la integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, considere que n = 4. Primero, se calcula los puntos con los cuales, se divide al intervalo [0,1], además: a = 0, b = 1, n = 4:

$$\frac{b-a}{2n} = \frac{1}{8}; \qquad x_i = a + \left(\frac{b-a}{2n} \right) \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

Se obtiene:

$$x_0 = 0, \;\; x_1 = 1, \;\; x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \;\; x_3 = \frac{3}{4}, \;\; x_4 = 1, \;\; y_i = f(x_i) = \frac{1}{1+x_i}$$

Se obtiene los valores de y_i

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{16}{17}, \quad y_2 = \frac{4}{5}, \quad y_3 = \frac{16}{25}, \quad y_4 = \frac{1}{2},$$

De acuerdo a la fórmula del método del trapecio:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \left(\frac{1}{8} \right) \left[1 + \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} \right) \right] \approx 0,782$$

2. Calcular con el método del trapecio el valor aproximado de la integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ con una exactitud del 0,002.

Primero, se realiza el cálculo de n:

$$n = \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2}$$

Que es el número de partes en que se divide al intervalo $[1,2]$, para esté calculo, se necesita el valor de M_2

$$M_2 = \max_{a \leq x \leq b} \left| f''(x) \right| = \max_{1 \leq x \leq 2} \left| \left(\frac{1}{x} \right)'' \right| = \max_{1 \leq x \leq 2} \frac{2}{x^3} = 2$$

Ya con este valor, se calcula n:

$$n > \sqrt{\frac{1}{12(0,002)} 2} = \sqrt{83} = 9, ...$$

Se considera que n = 10. El valor de la función $y_i = \dfrac{1}{x_i}$ para i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, se presenta en la tabla:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_i = \dfrac{1}{x_i}$	1	0.909	0.833	0.769	0.714	0.666	0.625	0.577	0.555	0.526	0.50

Se aplica la fórmula del método del trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}))\right]$$

En el ejercicio, la suma expresada por $2(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}) = 6{,}18$; por lo tanto:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \left[\frac{2-1}{2(10)}(1 + 0{,}5 + 2(6{,}18))\right] = 0{,}6937$$

Los dos primeros decimales de la aproximación son seguros.

3. Calcule por el método del trapecio la integral $\int_0^1 e^{x^2}dx$; considere que, n = 5, además obtenga el error. Primero se obtiene los valores de la función $y_i = e^{x_i^2}$, para i = 0,1,2,3,4,5. los cuales se encuentran en la tabla:

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y_i = e^{x_i^2}$	1	1,0408	1,1734	1,4333	1.8965	2.7182

Se aplica la fórmula del método del trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{b-a}{2n}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}))\right]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} \approx \left[\left(\frac{1-0}{2(5)}\right)(3{,}7182 + 2(5{,}5441))\right] = 1{,}48064$$

Para el calculo del error, se debe obtener las derivadas y calcular para los valores deseados :

$y' = 2xe^{x^2}$, $\quad y'' = 2e^{x^2}(2x^2+1)$, $\quad y''' = 4xe^{x^2(2x^2+3)}$

La tercera derivada en el intervalo [0,1] es positiva; por lo tanto, la segunda derivada toma valores positivos y es creciente además, en este intervalo:

$$M_2 = \max_{a\le x\le b} \left|f''(x)\right| = \max_{0\le x\le 1} \left|\left(e^{x^2}\right)''\right| = \max_{0\le x\le 1} 2e^{x^2}(2x^2+1) = 6e$$

Según la fórmula del error se tiene:

$$|R_n| \le \left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2\right| \le \left|\frac{(1-0)^3}{12(5)^2}6e\right| \le 0{,}0555$$

4. Dada la función f(x) en su forma tabular:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	5	4,9	4,3	3,6	2,8	1,5

Calcular con el método del trapecio la integral $\int_0^1 f(x)dx$.

De los datos del ejercicio, se obtiene que: a = 0, b = 1, n = 5, $\frac{b-a}{2n} = \frac{1}{10}$ Se aplica la fórmula del método del trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}))\right]$$

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \left[\left(\frac{1-0}{2(5)}\right)(5 + 1,5 + 2(4,9 + 4,3 + 3,6 + 2,8))\right] = 3,77$$

5. Calcule la integral $\int_0^1 x \tan x dx$ aplicando el método de Simpson y 2n = 4

   Los puntos de los intervalos, se los calcula de acuerdo a la fórmula $\frac{b-a}{2n}$

   $$x_0 = 0, \quad x_1 = 0{,}25, \quad x_2 = 0{,}5, \quad x_3 = 0{,}75, \quad x_4 = 1$$

   Es mucho mas cómodo presentar los valores calculados y leídos de una tabla trigonométrica, en forma de la siguiente tabla:

x *en radianes*	0	0.25	0.5	0.75	1
x *en grados*	0°	14°19′	28°39′	42°58′	57°18′
$\tan x$	0	0.2552	0.5464	0.9314	1.5578
$x \tan x$	0	0.0638	0.2732	0.6985	1.5578
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

   Se aplica la fórmula de Simpson, la cual es:

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{3(2n)}\right)[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})]$$

   Lo que significa en este caso:

   $$\int_0^1 x \tan x dx \approx \left(\frac{1}{12}\right)[0 + 1{,}5578 + 4(0{,}0638 + 0{,}6985) + 2(0{,}2732)]$$

   $$\int_0^1 x \tan x dx \approx \left(\frac{1}{12}\right)[1{,}5578 + 4(0{,}7623) + (0{,}5464)]$$

   $$\int_0^1 x \tan x dx \approx \left(\frac{1}{12}\right)[1{,}5578 + (3{,}0496) + (0{,}5464)]$$

   $$\int_0^1 x \tan x dx \approx \left(\frac{1}{12}\right)[4{,}6074 + (0{,}5464)]$$

   $$\int_0^1 x \tan x dx \approx \left(\frac{1}{12}\right)[5{,}1538]$$

   $$\int_0^1 x \tan x dx \approx 0{,}4295$$

   Finalmente, se define que el área debajo de la curva continua $x \tan x$ en el intervalo definido por $0 \leq x \leq$ es igual a 0.4295 u^2

10.4.2. Ejercicios Propuestos de Integrales Aproximadas

1. Por el método del trapecio y de Simpson calcular.

   a) La integral $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^2}dx$ donde n = 5 , calcule, además, el error cometido.

   b) La integral $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1-x^3}$ donde n = 10 , calcule, además, el error cometido.

   c) La integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ donde n = 10 , calcule, además, el error cometido.

   d) La integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}dx$ donde n = 10 , calcule, además, el error cometido.

   e) La integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ donde n = 10 , calcule, además, el error cometido.

2. Al dividir el intervalo de integración en 12 partes iguales calcular $\ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x}$, además, calcule el error cometido.

3. Calcular el valor aproximado del valor de π, aplique el método del trapecio de la integral : $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{1+x}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 6.

5. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x^2}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 4.

6. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}dx$ con precision de hasta 0,01 , tomando n = 8.

7. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}dx$ con precision de hasta 0,01 , tomando n = 8.

8. Al dividir el intervalo de integración en 10 partes iguales calcular $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$, además, calcule el error cometido.

9. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x^3}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 4.

10. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 6.

11. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 6.

12. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}dx$ con precision de hasta 0,01, tomando n = 8.

13. Calcular por la fórmula de los Simpson $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}dx$ con precision de hasta 0,001, tomando n = 10

Capítulo 11

Funciones de dos o más Variables

11.1. Espacio Euclidiano

En el estudio de cálculo diferencial, se analizo y definió a la función de una variable. Deseando definir a una función de ' p ' variables, es cómodo introducir las ideas de espacio Euclidiano de p-dimensiones.

El espacio Euclidiano de p-dimensiones (p es un número natural), se denomina al conjunto de todas las sucesiones de p-elementos $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p)$, donde los elementos a_i, son números reales. Los elementos a_i de estás sucesiones, para diferenciarlos de los elementos del espacio Euclidiano, se los denomina coordenadas, y de las sucesiones, se los denomina elementos, vectores o puntos del espacio Euclidiano de p-dimensiones.

Los elementos del espacio Euclidiano, se los simboliza con los símbolos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p)$ y a todo el espacio euclidiano de p-dimensiones, con el símbolo $\mathcal{R}^p$. Al espacio euclidiano de dos-dimensiones, se lo interpreta, como un plano y los elementos de este espacio $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, como puntos del plano, a los cuales, a_1, se lo denomina abscisa, y a a_2 la ordenada del punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.. Un espacio euclidiano de tres dimensiones consta de $a_1, a_2, a_3)$, que son coordenada del punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Dos elementos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_p)$, se los considera iguales, lo que se simboliza $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, si todas sus coordenadas correspondientes son iguales; es decir, $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, 3, \cdots, p$.

El símbolo de $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, significa que la condición de igualdad no se cumple, para por lo menos un elemento de ' i '; es decir $a_i \neq b_i$. En el espacio euclidiano $\mathcal{R}^p$, se define la distancia $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ entre dos puntos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_p)$, en la forma:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (a_i - b_i)^2}$$

Se observa que, en el caso de p = 2, se obtiene la distancia entre puntos en un plano, y en el caso de p = 3, es la distancia entre puntos en el espacio de tres dimensiones. Como se observa, además, la distancia entre dos puntos, en el espacio euclidiano, es siempre, un número real positivo. La distancia escrita cumple con las siguientes propiedades:

1. Si $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$
2. Si $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$
3. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq d(\mathbf{a}, \mathbf{c})$

La primera propiedad indica que, si la distancia entre dos puntos, en el espacio euclidiano, es igual a cero, entonces y solamente entonces un punto coincide con el otro punto; es decir, cuando sus coordenadas correspondientes son las mismas. La segunda propiedad indica que, la distancia es una operación simétrica. La tercera propiedad, conocida con el nombre de, ley del triangulo, está propiedad señala que la suma de dos catetos de un triangulo es siempre mayor que el tercer cateto.
Por lo que, la distancia define al espacio euclidiano, y además, cumple con la fórmula de distancia y con las propiedades escritas, al conjunto $\mathcal{R}^p$, se lo denomina espacio métrico.

En el espacio euclidiano, también se utiliza el concepto de norma. Por norma $\parallel a \parallel$ de un elemento **a** , se entiende al número:

$$\parallel a \parallel = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} a_i^2}$$

Norma de un elemento **a**, es la distancia de este elemento (**a**) del elemento cero $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \cdots)$. Norma de un elemento del conjunto $\mathcal{R}^p$ tiene parecidas propiedades que el modulo de un número imaginario.

El espacio euclidiano $\mathcal{R}^p$, es también un espacio lineal donde se cumple las propiedades:

$$(a_1, a_2, a_3 \cdots, a_p) + (b_1, b_2, b_3 \cdots, b_p) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \cdots, a_p + b_p)$$

$$\lambda(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \cdots \lambda a_p)$$

11.2. Conjuntos en el Espacio Euclidiano

Se presenta varios conceptos necesarios, para el desarrollo de este tema. Un conjunto, se llama conjunto abierto, si para todo punto **a** de este conjunto, es punto interno del conjunto, por ejemplo la esfera (abierta) es un conjunto abierto. Al conjunto vació (sin ningún elemento), se lo considera por definición un conjunto abierto.

Una esfera (abierta) de centro **a** y radio r ($r > 0$), se llama al conjunto de todos los elementos x del espacio $\mathcal{R}^p$ para los cuales $d(x, \mathbf{a}) < r$. Esta definición de esfera se simboliza:

$$K(\mathbf{a}, r) = \{x \in \mathcal{R}^p : d(x, \mathbf{a}) < r\}$$

Cercanía $O(\mathbf{a}, r)$ de un punto **a** en el espacio $\mathcal{R}^p$, se denomina a cada esfera de centro **a** y de cualquier valor de r, se simboliza:

$$O(\mathbf{a}, r) = \{x \in \mathcal{R}^p : d(x, \mathbf{a}) < r\}$$

Vecindad $S(\mathbf{a}, r)$ de un punto **a**, se llama al conjunto de elementos cercano a $O(\mathbf{a}, r)$ sin el centro **a**, se simboliza:

$$S(\mathbf{a}, r) = \{x \in \mathcal{R}^p : 0 < d(x, \mathbf{a}) < r\}$$

Se dice que, el punto **a** del conjunto $A \subset \mathcal{R}^p$, es punto interno del conjunto A, si existe una cercanía de el punto **a**, y que se encuentre en el conjunto A.

El conjunto complemento A' de el conjunto A, se llama al conjunto de todos los puntos de el espacio $\mathcal{R}^p$, los cuales no pertenecen al conjunto A, se simboliza:

$$A' = \{\mathbf{b} \in \mathcal{R}^p : b \notin A\}$$

Por el complemento del conjunto vació es todo el espacio $\mathcal{R}^p$. El complemento de un conjunto abierto es un conjunto cerrado y el complemento de un conjunto cerrado es un conjunto abierto.

El punto **a** (que pertenece o no pertenece al conjunto A), se llama punto de concentración del conjunto A, si para cada cercanía del punto **a**, contiene por lo menos un elemento del conjunto A diferente de **a**

Un conjunto, se llama conjunto cerrado, si contiene todos sus puntos de concentración. En general, se considera que, todo el espacio de un conjunto, es un conjunto cerrado. El conjunto vacío, por definición es un conjunto cerrado.

Se recuerda, que la operación unión de conjuntos $A \cup B$ de dos conjuntos, se llama al conjunto (nuevo conjunto) que se forma de todos los elementos que pertenecen al conjunto A, o al conjunto B. La intersección de conjuntos $A \cap B$ de los conjuntos A, B, se llama al conjunto, que se forma de todos esos elementos del espacio $\mathcal{R}^p$ que pertenecen al mismo tiempo, al conjunto A y al otro conjunto B.

El conjunto cerrado $\overline{A}$ del conjunto de A, se llama al conjunto formado por la unión del conjunto A y el conjunto de todos los puntos concentrados de el conjunto A; es decir, el conjunto $\overline{A}$, se forma de elementos de el conjunto A y sus puntos de concentración.

El borde de un conjunto A, se llama a todos los puntos del espacio $\mathcal{R}^p$,(pertenezcan a A o no al conjunto A, conocidos como bordes) en los cuales, cada cercanía, se encuentren los puntos de A y los puntos de su complemento A'.

La unión de conjuntos y su borde son siempre un conjunto cerrado. Dos conjuntos, son conjuntos excluyentes , si no tienen ninguno elemento en común. Un campo, se llama al conjunto abierto, el cual, no se lo puede presentar, como unión de dos conjuntos abiertos, no-vacíos y excluyentes.

Un campo cerrado, se llama a la unión de un campo y su borde. La unión de dos campos, no es en general, un campo, pero siempre es un conjunto abierto. Sin embargo, la unión de dos campos teniendo por lo menos un punto en común, es siempre un campo. Un campo cerrado no tiene propiedades parecidas.

Un conjunto, se llama conjunto limitado, si se encuentre en cierta esfera. En especial, cada cercanía, cada vecindad y cada esfera son conjuntos limitados. La suma de dos conjuntos, A + B, en un espacio euclidiano $\mathcal{R}^p$, se llama al conjunto de todos los elementos de forma a + b, donde **a** pertenece al conjunto A, b pertenece al conjunto B, se simboliza:

$$A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$$

11.3. Convergencia en el Espacio Euclidiano

Se dice, que una sucesión de puntos $a_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \cdots a_p^{(n)},)$ del espacio $\mathcal{R}^p$, es convergente al punto $a_0 = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, \cdots a_p^{(0)})$ también del mismo espacio, si la distancia $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ definida con la fórmula de distancia, tiende a cero, cuando ' n ' tiende al infinito. La convergencia de elementos del espacio $\mathcal{R}^p$, se lo escribe de la misma forma que la convergencia de sucesiones numéricas, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \quad o \quad a_n \longrightarrow a_0, \ \ cuando \ \ n \longrightarrow \infty.$$

Se puede sin dificultad demostrar, que la siguiente condición es suficiente y necesaria para que se cumpla la convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a_i^{(0)} \qquad para \ \ i = 1, 2, 3, \cdots, p$$

Lo que significa, que una sucesión de elementos, en el espacio euclidiano, es convergente si y solamente si, cuando todas las coordenadas que definen este elemento, son sucesiones numéricas convergentes.

La condición de suficiencia y necesaria para la convergencia, se lo puede expresar: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0, que para todo $n \geq n_0$ y para todo $i = 1, 2, 3, \cdots, p$, se cumple la desigualdad $\left|a_i^{(n)} - a_i^{(0)}\right| < \varepsilon$.

11.4. Función, Limites y Continuidad de Función en el Espacio Euclidiano

Se dice que, el conjunto A, conocido como dominio de la función ' f ', que se encuentra en el espacio $\mathcal{R}^p$, queda definido como función, si para cada elemento ' x ' del conjunto A le corresponde exactamente un solo valor de u. El conjunto de todos los números de u, se lo denomina imagen, codominio de la función ' f ' o conjunto de llegada de la ordenada, lo cual, se escribe en la misma forma que en el caso de una función de una variable:

$$u = f(x)$$

En el caso, que $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p)$, es elemento del espacio $\mathcal{R}^p$ también, se lo escribe en la forma:

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p)$$

En el caso, de que p = 3, se utiliza generalmente las letras x, y, z, como coordenadas del argumento de la función ' f ', su escritura u = f(x, y, z), en el caso de que p = 2, su escritura es u = f(x, y).

La función ' f ', definida en el conjunto A, se llama limitada en el conjunto, si existe un número $M > 0$ que para todo elemento **a** del conjunto, se cumple la condición $|f(\mathbf{a})| \leq M$.

Se dice, que la función ' f ', definida en cierta vecindad S($\boldsymbol{a_0}, r$) del punto $\boldsymbol{a_0}$, si tiene en este punto un limite iguala a ' h ', si para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad S($\boldsymbol{a_0}, r_\varepsilon$) del punto $\boldsymbol{a_0}$, que para todo elemento x, que pertenece a está vecindad, cumple la desigualdad:

$$|f(x) - h| < \varepsilon$$

Lo cual, se escribe:

$$\lim_{x_0\to a_0} f(x) = h \quad o \quad f(x) \longrightarrow h, \ \ cuando \ \ x \longrightarrow \boldsymbol{a_0}$$

Lo escrito es la definición de Cauchy, otra definición que significa lo mismo, es la definición de Heine, la cual, esta basada en sucesiones:

Se dice,que la función ' f ' definida en cierta vecindad $\boldsymbol{S(a_0, r)}$ del punto $\boldsymbol{a_0}$, tiene en este punto un limite igual a h, si para toda sucesión a_n, en tal forma que , $\boldsymbol{a_n \neq a_0}$ (para todo valor de n) y $\boldsymbol{a_n \longrightarrow a_0}$, sucede f($\boldsymbol{a_n}$) $\longrightarrow h$.

Se dice, que la función ' f ' definida en cierta cercanía O($\boldsymbol{a_0}, r$) del punto $\boldsymbol{a_0}$, es continua en el punto $\boldsymbol{a_0}$, si tiene en este punto, el limite es igual valor de la función en el punto; es decir:

$$\lim_{x\to a_0} f(x) = f(\boldsymbol{a_0})$$

La función f(x) es continua en el conjunto A, si es continua en cada punto del conjunto A, se dice, que la función f(x), es clase C en el conjunto A.

Cuando se define el limite en cierto punto, se habla de vecindad del punto y no de cercanía. Esto es el resultado, de que, el limite en el punto $\boldsymbol{a_0}$**,** no solamente, no tiene influencia, el valor de la función, en el punto, pero además, si la función, es en este punto definida.

Se puede demostrar, que las condiciones escritas de continuidad de una función en el punto $\boldsymbol{a_0}$, se cumplen si y solamente si:

Para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe una cercanía $\boldsymbol{O(a_0, r)}$ del punto $\boldsymbol{a_0}$, que para todo x de esa cercanía, se cumple la relación:

$$|f(x) - f(\boldsymbol{a_0})| < \varepsilon$$

De la estructura del conjunto, en el cual la función es continua, tiene influencia en las propiedades de la función, en este conjunto. Se cumple los siguientes teoremas:

La función ' f ' definida y continua en una región (campo) cerrada y limitada, que está en el espacio $\mathcal{R}^p$ tiene las siguientes propiedades:

1. Es limitada,
2. Tiene por lo menos una vez, en este conjunto, un valor máximo y un valor mínimo,
3. Tiene por lo menos una vez, en este conjunto, cada uno de los valores, entre los valores de los extremos,
4. Es homogénea continua, esto significa que, para todo valor $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ que si, x y x' pertenecen al conjunto y $d(x, x') < \delta$, entonces, $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$; es decir, los valores de la función, se diferencian con valores muy pequeños, para dos puntos suficientemente cercanos.

Si la función continua ' f ' es positiva (negativa) en cierto punto $\boldsymbol{a_0}$ de la región, entonces, existe una cercanía del punto $\boldsymbol{a_0}$, que en cada punto de esta cercanía, la función, es ella positiva (negativa).

Una función lineal de p variables $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p$, se llama a toda función en la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_px_p,$$

Donde $a_1, a_1, a_1, \cdots, a_1$ son constantes numéricas.

11.5. Dominio de una Función de Dos Variables

Entre los elementos de un espacio Euclidiano $\mathcal{R}^2$ y los puntos de un plano (Oxy), existe un ordenamiento correspondiente mutuo. Al plano, se lo puede tratar como un modelo geométrico de R^2 y al conjunto de puntos en el plano, como imagen de subconjuntos de R^2, es por está razón, al subconjunto de R^2, se lo denomina, como dominio de una función de dos variables o también, es conocido como conjunto plano, ya que se encuentra en el plano Oxy.

Se debe tener en consideración dos ideas:

1. Cercanía del punto (a_0, b_0), toda circunferencia del cual el punto es el centro,
2. Vecindad del punto (a_0, b_0) toda circunferencia, de libre radio, sin el mismo punto (a_0, b_0).

Por lo tanto, cada punto tiene una cantidad infinita de cercanías.

El punto A del conjunto Z, se llama punto interno del conjunto Z, si existe una cercanía del punto A, el cual, se encuentra en el conjunto Z. El punto C, se llama punto externo con relación al conjunto Z, si existe una cercanía del punto C, el cual, no se encuentra en el conjunto Z. Ver figura 9.0. El punto B, se llama punto de frontera del conjunto Z, si existe, en cada cercanía del punto B, se encuentra por lo menos un punto del conjunto Z y por lo menos un punto que no pertenece al conjunto Z. Al interior del conjunto Z, se llama al conjunto de todos los puntos internos del conjunto Z. La frontera o borde del conjunto Z, se llama al conjunto de todos los puntos fronterizos.

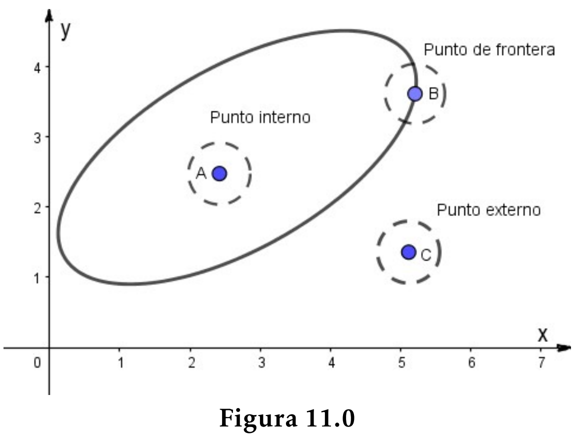


Figura 11.0

El borde del conjunto Z, puede pertenecer o no al conjunto Z. Esto depende de las condiciones que se este analizando. Este es uno de los motivos; por los cuales, el gráfico de una función de dos o mas variables es tedioso y laborioso. Los gráficos de funciones de dos o mas variables, no va ser parte del análisis de funciones de dos o mas variables en este libro.

El conjunto de puntos M(x,y) dado por los desigualdades $a \le x < b, c \le y < d$. está representado en la figura 9.1. El borde del conjunto M(x,y), es el perímetro del rectángulo, de los cuatro catetos: dos lados son abiertos, el derecho y el superior, los otros dos catetos el inferior y el izquierdo están definidos en el conjunto (dominio).

La región normal con relación el eje Ox, se llama al conjunto de todos los puntos M(x,y), los cuales, sus coordenadas cumplen, al mismo tiempo, las desigualdades:

$$a \le x \le b. \qquad h(x) \le y \le k(x)$$

Donde las funciones h(x), y k(x) son continuas en el intervalo [a,b] y cumplen con la desigualdad $h(x) < k(x)$ en el intervalo (a,b), Ver figura 9.2

Toda recta $x = \xi$, donde $a < \xi < b$ tiene con el borde de la región exactamente dos puntos.

La región normal con relación el eje Oy, se llama el conjunto de todos los puntos M(x,y), de los cuales sus coordenadas cumplen al mismo tiempo la desigualdad:

$$l(y) \le x \le p(y) \qquad c \le y \le d.$$

Donde, las funciones l(y) y p(y) son funciones continuas en el intervalo [c,d] y $l(y) < p(y)$. Ver figura 9.3

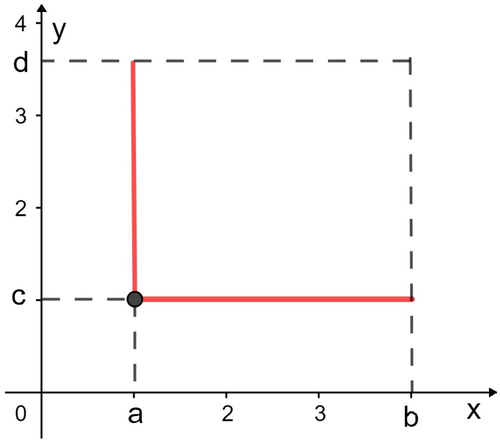


Figura 11.1

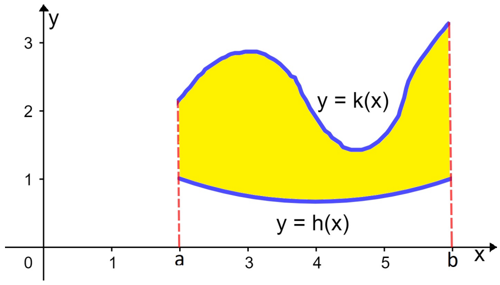


Figura 11.2

De las definiciones arriba escritas, una región normal es cerrada y regular. La suma de dos regiones normales teniendo puntos interiores en común, pueden no ser regiones normales. Una región regular, se llama región limitada, del cual su borde, se lo puede dividir en una cantidad finita de arcos de ecuaciones y = f(x) o x = g(y). La suma de regiones regulare que tienen puntos comunes, puede no ser una región regular.

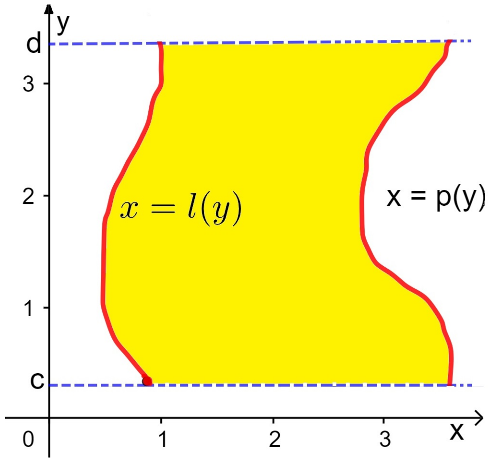


Figura 11.3

11.6. Función de Dos Variables

Una función de dos variables f(x,y), se la define con la ayuda de una o varias fórmulas:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & para \quad y \le x \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\left|x-y\right|} & para \quad y > x \end{cases}$$

O también:

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & cuando \quad x,y \in \mathbb{R} \\ 0, & cuando \quad x,y \in \mathbb{I} \\ -1 & cuando \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Si la función de dos variables f(x,y), se la define con una fórmula: $g(x,y) = y\sqrt{x^2-1}$ sin una información adicional, se entiende que, la función está definida en un conjunto de números (su dominio), en el cual, la función tiene sentido. En la fórmula escrita, la función está definida por dos semis-planos $x \leq -1 \;\; o \;\; x \geq 1$.
El gráfico de la función de dos variables z = f(x,y), se llama al conjunto de todos los puntos (x,y,z) en el espacio de tres-dimensiones $\mathbb{R}^3$, para los cuales z = f(x,y). En general el gráfico de una función de dos variables, es una superficie en el espacio de tres-dimensiones. El graficar una función de dos o mas variables, es por lo general bastante tedioso.

11.7. Limites y Continuidad de una Función de Dos Variables

El limite de una función de dos variables f(x,y) en el punto (a,b), se escribe:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \qquad o \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y)$$

De la definición de Heine resulta que, en el caso de $\mathbb{R}^2$. La función f(x,y), definida en cierta vecindad del punto (a,b), tiene en este punto limite igual a h; si y solamente si, para toda sucesión de puntos (x_n, y_n) de la vecindad del punto (a,b) y de forma que, $x_n \to a, \; y_n \to b$, la sucesión $f(x_n, y_n) \to h$.
De la definición de Cauchy resulta que, en el caso de $\mathbb{R}^2$. La función f(x,y), definida en cierta cercanía del punto (a,b), es en este punto continua, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que para todo punto (x,y), de está cercanía , se cumple la desigualdad $|x-a| < \delta$ y $\left|y-b\right| < \delta$ resulta que, $\left|f(x,y) - f(a,b)\right| < \varepsilon$.
Por supuesto, la condición escrita se cumple; si y solamente si, cuando:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Igual que, para una función de una variable, se cumple los siguientes teoremas:

1. La suma de dos funciones continuas en el punto (a,b), es una función continua en el punto (a,b),
2. El producto de dos funciones continuas en el punto (a,b), es función continua en el punto (a,b),
3. El cociente de dos funciones continuas en el punto (a,b), donde su denominador en este punto, es diferente de cero, es una función continua en el punto (a,b),
4. Una función compuesta $F(g(x,y))$ definida en la cercanía del punto (a,b), donde la función g(x,y) es continua en el punto (a,b), la función $F(u)$, es continua en el punto u = g(a,b), la función compuesta $F(g(x,y))$ es continua en el punto (a,b).

De estos teoremas, se puede concluir que:

1. Un polinomio de dos variables de n orden es continuo en todo el plano Oxy:
$$w(x,y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots + a_{n0}x^n +$$
$$+ a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{on}y^n$$
2. Las funciones del tipo:
$$\sin(x^2+y), \qquad a^{x+y}, \qquad \log(x^2+y^4+1)$$
Son continuas en todo el plano Oxy.

Todos los teoremas y métodos de cálculo de limites, que se aplico para una función de una variable, son aplicables para encontrar el limite de una función de dos o mas variables. Una nueva dificultad aparece, en el calculo de un limite de una función de dos o mas variables, cuando su continuidad no esta clara o no esta definida en, algún punto (a,b). En la mayoría, de dichos casos, su calculo es complicado.

11.7.1. Ejercicios Resueltos de Limites de Funciones de Dos Variables

1. Analice la existencia de limite de la función en el punto (0,0)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & para \quad x \neq 0 \\ 0 & para \quad x = 0 \end{cases}$$

La función está definida para todo el plano Oxy. Por lo tanto, se supone que: $x_n \to 0, \;\; e \;\; y_n \to 0$. Y que, se considera que, $c_n = f(x_n, y_n)$. Si para todo x_n o y_n son igual a cero, por lo tanto, c_n es igual a cero. Pero si x_n e y_n son diferente de cero, se recuerda :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

En función de lo escrito y multiplicando y dividiendo para, y_n:

$$c_n = y_n \frac{\sin(x_n y_n)}{x_n y_n} \to 0 \quad cuando \quad n \to \infty$$

Por lo tanto, si $c_n \to 0$ indica que, con todos los valores de $(x_n, \;\; y_n)$ la función analizada tiende a cero. Con lo cual, se ha demostrado que si existe un limite en el punto (0,0) :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

Existe y es igual a cero.

2. Analice la existencia de limite de la función en el punto (0,0)

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

La función está definida para todo el plano Oxy, con excepción del punto (0,0). Se forma una sucesión de forma:

$$x_n = \frac{1}{n}; \qquad y_n = \frac{a}{n}$$

Como $x_n \to 0, \quad y_n \to 0$; cuando, $n \to \infty$. Se reemplaza en la función las sucesiones formadas:

$$g(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{\frac{1}{n}\frac{a}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} = \frac{a}{1 + a^2}$$

El número por el lado derecho de la igualdad toma diferentes valores, porque ' a ' toma por diferentes valores de 'a', y es el limite de la sucesión $g(x_n, y_n)$. La propiedad de existencia de limite no se cumple, en este caso; por lo tanto :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x,y) \quad No\ existe$$

Por último, se puede indicar que el limite, calculado en su forma :

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} g(x,y)) \quad y \quad \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} g(x,y))$$

Existen y son igual a cero.

Por lo tanto, la existencia del limite calculado en su forma singular (iterovane), no determina la existencia del limite doble.

3. Analice la existencia de limite de la función en el punto (0,0)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x - y} & para \quad x \neq y \\ 0 & para \quad x = y \end{cases}$$

La función está definida para todo el plano Oxy. Para su demostración, se define dos diferentes tipos de sucesiones, auxiliares, y sus resultados darán la respuesta al ejercicio. Al reemplazar en la función, cualquier tipo de sucesión dada y el resultado es el mismo, esto indica que, la función en el punto analizado existe limite definido, y en el caso, de que, para cada sucesión, la función tiene un valor diferente , esto indica que la función analizada en el punto dado, no existe limite. Se toma, como ejemplo, dos sucesiones diferentes con la única condición de que : cada una de ellas tienda a cero, independientemente:

a) La primera sucesión, tiene la forma $\{x_n, y_n\}$:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = -\frac{1}{n}$$

En cada caso, para el valor de $n \in \mathbb{N}$ la sucesión tiende a cero. Esta forma de sucesión, se reemplaza en la función, y como se puede observar, la función f(x,y) toma un valor de $-\dfrac{1}{2n}$, como n tiende al infinito la relación $-\dfrac{1}{2n}$. tiende a cero; y por lo tanto, se tiene el valor de la función f(x,y) para el valor de la sucesión analizada.

$$f(x,y) = \frac{x_n y_n}{x_n^2 - y_n^2} = -\frac{1}{2n}$$

b) La segunda sucesión $\{x_n, y_n\}$ tiene la forma:

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}, \quad y_n = \frac{1}{n}$$

La estructura de está sucesión nos garantiza que, cuando ' n ' tiende al infinito, la sucesión tiende a cero. Se reemplaza en la función:

$$f(x,y) = \frac{x_n y_n}{x_n^2 - y_n^2} = n + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

El valor de la función f(x,y) es infinito. Como para estás sucesiones, el valor obtenido es diferente; por lo tanto, no se cumple la definición de limite, lo que indica que, no existe el limite en ese punto.

4. Analice la existencia de limite de la función en el punto (0,0)

$$g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

La función está definida para todo el plano Oxy, con excepción del punto (0,0). Si $\{x_n, y_n\}$ son sucesiones convergentes a cero, en tal forma que, $\{x_n, y_n\}$, no son al mismo tiempo igual a cero y $x_n^2 + y_n^2 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se define:

$$a_n = max\Big(|x_n|, \big|y_n\big|\Big) > 0$$

Por lo tanto, $\left|x_n^2 y_n\right| \leq a_n^3$ y $x_n^2 + y_n^2 \geq a_n^2$, lo que significa que, $0 \leq \left|g(x_n, y_n)\right| \leq a_n$ Como $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se puede aplicar el teorema de las tres sucesiones, en ese caso, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = 0$ y en función de la definición de limite de una función de dos variables $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existe e igual a cero.

En los ejercicios presentados, se ha utilizado definiciones y propiedades de sucesiones, las cuales las planteo Heine, en su desarrollo de limites de funciones de dos o mas variables.

El otro elemento matemático, que se utiliza para desarrollar ejercicios de limites de funciones de dos o mas variables es : distancia entre dos puntos, desarrollado por Cauchy.

5. Encuentre el limite de: $f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2}$

La sucesión $\{x_n, y_n\}$ es una sucesión cualquiera de puntos, que tienden al punto (0,2). Se considera, la distancia:

$$\rho_n = \sqrt{(x_n - 0)^2 + (y_n - 2)^2} \qquad \rho_n^2 = (x_n - 0)^2 + (y_n - 2)^2$$

Se reemplaza en el ejercicio:

$$f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sqrt{(x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{(x^2 + (y-2)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sqrt{(x_n - 0)^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{(x_n - 0)^2 + (y-2)^2} =$$

En el momento en que, cada punto de la sucesión $\{x_n, y_n\}$ se acerque al punto (0,2), entonces $\rho_n \to 0$, en el mismo momento, en que, $x_n \to 0, y_n \to 2$. En ese momento, se tiene un limite de una variable y se lo resuelve como tal:

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\sqrt{\rho_n^2 + 1} - 1}{\rho_n^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\left[\sqrt{\rho_n^2 + 1} - 1\right]}{\rho_n^2} \frac{\left[\sqrt{\rho_n^2 + 1} + 1\right]}{\left[\sqrt{\rho_n^2 + 1} + 1\right]} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\left[\sqrt{\rho_n^2 + 1} - 1\right]}{\rho_n^2} \frac{\left[\sqrt{\rho_n^2 + 1} + 1\right]}{\left[\sqrt{\rho_n^2 + 1} + 1\right]} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\left[\rho_n^2 + 1 - 1\right]}{\rho_n^2\left[\sqrt{\rho_n^2 + 1} + 1\right]} = \lim_{\rho\to 0} \frac{[1]}{\left[\sqrt{\rho_n^2 + 1} + 1\right]} = \frac{1}{2}$$

11.7.2. Ejercicios Propuestos de Limites de Funciones de Dos Variables

1. Realice un análisis de existencia de limite de los siguientes ejercicios:

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$
3. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$
5. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$
6. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3}{2x^2 + y^4}$
7. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 + y}{2x^2 + y^4}$
8. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\left(\frac{\pi}{x^2 + y^2}\right)$
9. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$
10. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x\sin\left(\frac{\pi}{x^2 + y^2}\right)\right)$

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{y^3}{x^4 + \sin^2(y)}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{\sqrt{9 + x^2 + y^2} - 3}{x^2 + y^2}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\right)$
7. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2(x^2 + y^2)}\right)$
8. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$
9. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1 + x^4y^4)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

11.8. Derivadas Parciales

La derivada parcial de primer orden de la función z = f(x,y), en el punto (x_0, y_0) con relación a la variable x, se llama al limite (si existe):

$$f'_x(x,y) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\triangle x}$$

En la practica, está derivada parcial, se la calcula, como la derivada de la función con respecto a la variable ' x ', a la variable ' y ', se la considera como una constante.
En forma similar, la derivada parcial de primer orden de la función z = f(x,y), en el punto (x_0, y_0) con relación a la variable ' y ', se llama al limite (si existe):

$$f'_y(x,y) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \triangle y) - f(x_0,\ y_0)}{\triangle y}$$

La derivada parcial de la función z= f(x,y), con relación a la variable x, se la simboliza:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x(x,y)$$

Y con respecto la variable y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y(x,y)$$

Para simbolizar la derivada parcial, calculada en el punto (x_0, y_0), se escribe:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_0$$

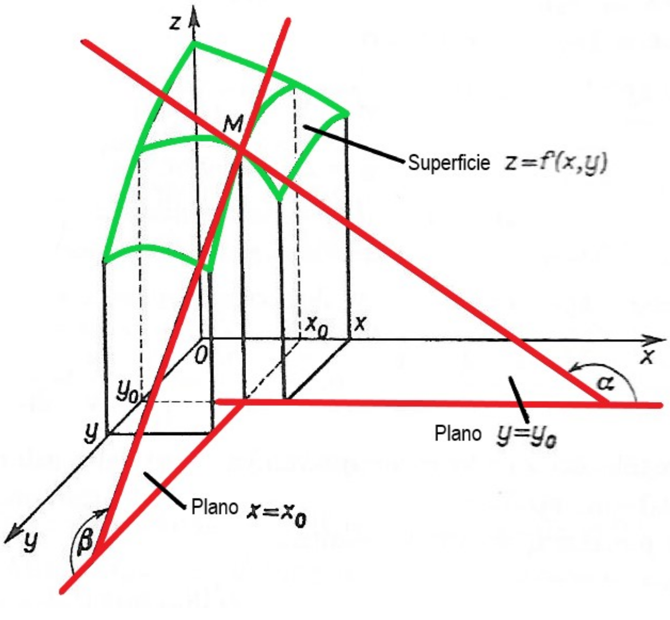


Figura 11.4

En forma similar, se define, se calcula y se simboliza la derivada parcial de funciones tres o mas variables. Las funciones de dos o mas variables que tienen la derivada parcial de primer orden continua, se llaman funciones de clase C.[1]
La interpretación geométrica (Figura 9.4), de la derivada parcial $f'_x(x_0, y_0)$, es igual al coeficiente angular (igual a la $tan(\alpha)$) tangente a la superficie, que resulta del corte a la superficie z = f(x,y) con el plano $y = y_0$ (paralela al plano Oxz), en el punto $x = x_0$. Es similar la interpretación geométrica que tiene la derivada parcial $f'_y(x_0, y_0)$ (Figura 9.4).
Una especial atención demanda, el cálculo de la derivada parcial de una función compuesta. Si las funciones g(x,y) y h(x,y), son definidas en cierto conjunto plano A (Oxy) y el conjunto de pares

ordenados de la función (g(x,y), h(x,y)), se encuentra en el conjunto plano B, en el cual, está definida la función f(u,v).

Si la función g(x,y) y h(x,y) tienen derivada parcial en el punto $(x_0,\ y_0)$ y la función f(u,v) tiene derivada parcial f'_u y f'_v continua en cierta cercanía punto $(u_0,\ v_0)$, donde $u_0 = g(x_0,\ y_0),\ \ v_0 = h(x_0,\ y_0)$, la función compuesta F(x,y)= f(g(x,y), h(x,y)) tiene derivada parcial en el punto $(x_0,\ y_0)$; con lo cual:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}$$

Las fórmulas escritas , se la encuentra en su forma corta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}$$

Si en particular, u y v son funciones derivables de una sola variable t; es decir, u = u(t), v = v(t), además $u(t_0) = u_0,\ \ v(t_0) = v_0$, con las condiciones dadas la derivada de la función F(t) = f(u(t),v(t)), en el punto t_0, se la expresa:

$$F'(t_0) = f'_u(u_0,v_0)u'(t_0) + f'_v(u_0,v_0)v'(t_0)$$

O de la forma:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

De donde , se obtiene la fórmula para el diferencial de la función F(t) = f(u(t),v(t)):

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot dv$$

En forma general, la derivada parcial de una función$z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots x_n)$ con respecto la variable $x_i(i = 1,2,3,\cdots,n$ en el punto $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \cdots, x_n^0)$, se la denomina derivada simple en el punto x_i^0, con la condición de que, las demás variables son constantes. Su simbología de esta derivada pueden ser:

$$f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \cdots, x_n^0), \qquad \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \cdots, x_n^0)}{\partial x_i}, \qquad z'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \cdots, x_n^0).$$

De la definición escrita, se concluye que, el calculo de derivadas parciales de dos o mas variables, se lo realiza con las mismas reglas y propiedades, que en el calculo de la derivada de una variable (derivada simple) , con la consideración de que, las demás variables, permanecen constantes. Si la función z = f (x,y), tiene derivada parcial $f'_x(x,y)\ \ y\ \ f'_y(x,y)$, en cada punto del dominio, las derivadas obtenidas son funciones de dos variables x e y. Se puede volver a derivar con respecto ' x ' o con respecto ' y '. En ese caso, se obtiene derivadas parciales de segundo orden, y si se deriva otra vez, serán derivadas parciales de tercer orden. Las derivadas de segundo orden, por ejemplo, z = f (x,y), se simboliza:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

O con los símbolos:

$$f''_{x^2}(x,y), \qquad f''_{x,y}(x,y) \qquad f''_{y,x}(x,y) \qquad f''_{y^2}(x,y)$$

Las derivadas de segundo orden:

$$f''_{xy}(x,y) \qquad f''_{yx}(x,y)$$

Se diferencian en el orden de derivar y se las conoce como derivadas parciales mixtas. Las derivadas mixtas según el teorema de: Schwar: son iguales en un punto dado, si en este punto son continuas. Este teorema indica que: " En el caso de continuidad de las derivadas parciales mixtas, el resultado no depende del orden en que se derivo ". Este teorema es verdadero para derivada parciales de mayor orden.

11.8.1. Ejercicios Resueltos de Derivadas Parciales

1. Obtenga la derivada parcial de la función $z = x^2y^3 - x\sin(y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - \sin(y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - x\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x \partial x} = 2y^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y \partial y} = 6x^2y + x\sin(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 6xy^2 - \cos(y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y \partial x} = 6xy^2 - \cos(y)$$

2. Obtenga la derivada parcial de $u = x^5y^{10} - x^3\sin(z) + y^2e^z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4y^{10} - 3x^2\sin(z), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 10x^5y^9 + 2ye^z \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -x^3\cos(y) + y^2e^z$$

3. Obtenga la derivada parcial de la función $u = (3x^2y + z^4)^{10}$
Se realiza un cambio de variable $v = 3x^2y + z^4$ y en ese caso, se tendría $u = v^{10}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 10v^9 6xy = 60xy(3x^2y + z^4)^9$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 10v^9 3x^2 = 30x^2(3x^2y + z^4)^9$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = 10v^9 4z^3 = 40z^3(3x^2y + z^4)^9$$

4. Obtenga la derivada parcial de la función $u = x^y, \quad x > 0$.
Su cálculo, se basa en fórmulas de cálculo diferencial:

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = a^x\ln(a), \quad a > 0$$

En tal caso, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln(x),$$

5. Obtenga la derivada parcial de la función $u = (\ln(x))^{\sin(y)}$, donde $x > 1$.
Para derivar la función, se debe tener en mente, la fórmula de derivada compuestá y las fórmulas anteriores:
Si $v = z^a$, donde z = f(x), entonces $\dfrac{dv}{dx} = az^{a-1}\dfrac{dz}{dx}$
Si $v = a^z$, donde z = f(x), entonces $\dfrac{dv}{dx} = a^z\ln(a)\dfrac{dz}{dx}$.
Por lo tanto:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(y)(\ln x)^{\sin(y)-1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(y)}{x}\ln(x)^{\sin(y)-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\ln(x))^{\sin(y)} \cdot (\ln(\ln(x))) \cdot \cos(y) = \cos(y) \cdot \ln(\ln(x)) \cdot (\ln(x))^{\sin(y)}$$

6. Obtenga la derivada parcial de la función $u = (x\tan(z))^{\ln(y)}$, donde $x > 0, \ y > 0, \ \tan(z) > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln(y)(x\tan(z))^{\ln(y)-1} \cdot \tan(z) = x^{\ln(y)-1}(\tan(z))^{\ln(y)} \cdot \ln(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x\tan(z))^{\ln(y)} \cdot \ln(x\tan(z)) \cdot \frac{1}{y} = \frac{(x\tan(z))^{\ln(y)}}{y}\ln(x\tan(y))$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \ln(y)(x\tan(z))^{\ln(y)-1} \cdot \frac{x}{\cos^2(z)} = \frac{x\ln(y)}{\cos^2(z)} \cdot (x\tan(z))^{\ln(y)-1}$$

7. Obtenga la derivada parcial de la función $u = (2x+3z)^{yz}$, donde $2x+3z > 0$
Las derivadas con respecto x e y, se puede calcular como en casos anteriores.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz(2x+3z)^{yz-1} \cdot 2 = 2yz(2x+3z)^{yz-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2x+3z)^{yz} \cdot \ln(2x+3z) \cdot z = z(2x+3z)^{yz} \cdot \ln(2x+3z)$$

Si se desea calcular $\frac{\partial u}{\partial z}$, se tiene que la base y su exponente son variables con respecto z; por lo tanto, se debe aplicar la derivada de su base y exponente.

Si v = f(x) y w = g(x), la derivada de y = v^w:

$$y = v^w \longrightarrow \ln y = \ln v^w \longrightarrow \ln y = w \ln v$$

Se deriva:

$$[\ln y]' = [w \ln v]' \longrightarrow \frac{y'}{y} = w' \ln v + w\frac{v'}{v}$$

Se obtiene:

$$\frac{y'}{y} = w' \ln v + w\frac{v'}{v} \longrightarrow y' = y\left[w' \ln v + w\frac{v'}{v}\right]'$$

En el caso del ejercicio, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (2x+3z)^{yz} \cdot \left[y\ln(2x+3z) + \frac{yz \cdot 3}{2x+3z}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y(2x+3z)^{yz} \cdot \left[\ln(2x+3z) + \frac{3 \cdot yz}{2x+3z}\right]$$

8. Obtenga la derivada parcial de la función $u = y^2(5y-2z)^{xz}$, donde $5y-2z > 0$
La función u es con respecto x del tipo $u = ab^v$, donde v = f(x), su derivada seria $u' = av'b^v \cdot \ln(b)$; en ese caso:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z(5y-2z)^{xz} \cdot \ln(5y-2z)$$

La función u es con respecto y del tipo $u = vw^a$, donde v = f(y), w = g(y); su derivada $u' = w^{a-1}(v'w + avw')$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (5y-2z)^{xz-1}\left[2y(5y-2z) + 5xy^2 z\right]$$

La función u es con respecto z del tipo $u = av^w$, donde v = f(z), w = g(z); su derivada es según la fórmula obtenida en el ejercicio anterior:

$$y' = y\left[w' \ln v + w\frac{v'}{v}\right]'$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy^2(5y-2z)^{xz}\left[\ln(5y-2z) - \frac{2z}{5y-2z}\right]$$

9. Obtenga la derivada parcial de la función $u = (\sin(x))^{\tan(z)}(\cot(z))^{\cos(y)}$, donde $\sin(x) > 0, \cot(z) > 0$
La función u es con respecto x del tipo $u = v^a b$, donde v = f(x), su derivada seria $u' = av^{a-1}v'b \cdot \ln(b)$; en ese caso:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan(z)(\sin(x))^{\tan(x)-1} \cdot \cos(x)(\cot(z))^{\cos(y)}$$

se simplifica y se recuerda que; $\tan(z) = \dfrac{1}{\cot(z)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x)(\sin(x))^{\tan(x)-1} \cdot (\cot(z))^{\cos(y)-1}$$

La función u es con respecto y del tipo $u = ab^v$, donde v = f(x), su derivada seria $u' = ab^v v' \cdot \ln(b)$; en ese caso:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\sin(x))^{\tan(x)}(\cot(z))^{\cos(y)}(-\sin(y))\ln(\cot(z))$$

La función u es con respecto z del tipo $u = a^v w^b$, donde v = f(x), su derivada seria $u' = a^v w^{b-1}(v' w \ln(a)+ bw')$; en ese caso:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (\sin(x))^{\tan(x)}(\cot(z))^{\cos(y)-1}\left[\frac{1}{\cos^2 z}\cot(z)\ln(\sin(x)) + \cos(y)\frac{-1}{\sin^2 z}\right]$$

Se simplifica:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (\sin(x))^{\tan(x)}(\cot(z))^{\cos(y)-1}\left[\frac{\ln(\sin(x)}{\cos(z)\sin(z)}) - \frac{\cos(y)}{\sin^2 z}\right]$$

10. Obtenga la derivada parcial de la función $u = x^{y^z}$, donde $x > 0, y > 0$
La función u es con respecto x del tipo $u = x^a$, donde $a = y^z$, su derivada seria $u' = ax^{a-1}$; en ese caso:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}$$

La función u es con respecto y del tipo $u = y^b$, su derivada seria $u' = a^v v' \ln(a)$; donde, $v' = by^{a-1}$ en ese caso:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z} zy^{z-1}\ln(x)$$

La función u es con respecto z del tipo $u = a^v$, donde $v = b^z$ su derivada seria $u' = a^v v' \ln(a)$; donde, $v' = b^z \ln(b)$ en ese caso:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z}\ln(x)\ln(y)$$

11. Obtenga la derivada parcial de la función $u = xy - x(3x-y)^{3z} + \cos(y-z)$, donde $3x - y > 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y-3)3xz(3x-y)^{3z-1} - (3x-y)^{3z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 3xz(3x-y)^{3z-1} - \sin(y-z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -3x\ln(3x-y)(3x-y)^{3z} + \sin(y-z)$$

12. El campo potencial en el punto (x,y,z) está definido por la fórmula $v = 3\sin(xy - z) + (2x - z)^3 y^2$
Determinar los cambios de las componentes del campo en cada eje:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y\cos(xy-z) + 6(2x-z)^2 y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x\cos(xy-z) + 2y(2x-z)^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -3\cos(xy-z) - 3(2x-z)^2 y^2$$

11.8.2. Ejercicios Propuestos de Derivadas Parciales

1. Calcular la derivada parcial con respecto a las variables que aparecen en la función:

1. $u = xy^2z^3 - y\sin(z)$
2. $u = x\sqrt{y} - e^z\ln(y)$
3. $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$
4. $z = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos(\alpha)}$
5. $l = \rho e^{\pi\cos(\varphi)}$
6. $z = (1+xy)^y$
7. $z = \ln(x+\ln(y))$
8. $\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$
9. $u = (\sin(x))^{\ln(y)}$
10. $u = x^{y\arctan(z)}$

1. $u = \sin(x^2)\sqrt{\tan(y)} - e^{\sin(z)}\cos^2(y)$
2. $u = \sqrt{x^4+\cos^2(y)} + e^{\sqrt{z}}\sin(y)$
3. $u = z^4(5xy^2-3yz^2)^{20}$
4. $u = x^{\sqrt{y}}$
5. $u = (xy)^z$
6. $u = x^{yz}$
7. $u = \ln(\sin(x-2t))$
8. $u = x^{\frac{1}{y}}z$
9. $u = (y\sin^2 x+5)^{\sqrt{y}}$
10. $u = \sqrt{xy}(3x+2z)^{\sqrt{yz}}$

2. Demostrar que la función $u = \ln(e^x+e^y)$ cumple con la identidad: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$

3. Demostrar que la función $u = x^y y^x$ cumple con la identidad:
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u(x+y+\ln(u))$$

4. Demostrar que la función $u = e^{\frac{x}{y^2}}$ cumple con la identidad:
$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

5. Demostrar que la función $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$ cumple con la identidad:
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

6. Demostrar que, en la ecuación de Claperon $p\cdot v = R\cdot T$, el producto de la derivadas parciales $\dfrac{\partial p}{\partial v}, \dfrac{\partial v}{\partial T}$ y $\dfrac{\partial T}{\partial p}$ son igual a -1.

7. Demostrar que la función $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ cumple con la identidad:
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$$

8. Por el punto M(1,2,6) de la superficie $z = 2x^2+y^2$, se trazo un plano paralelo al plano cartesiano Oxz y Oyz. Determine el angulo que forman con los ejes del plano y tangencia al punto M.

11.9. Derivada de una Función en una Dirección Dada

Se considera la función del tipo:
$$z = f(x,y)$$
Que tiene derivadas parciales continuas en la cercanía del punto $P_0(x_0,y_0)$ y que ademas, parte de este punto a lo largo del eje p, el cual, se encuentra en el plano Oxy. Se define a los ángulos que forma el eje p con los ejes x e y, como α y β. Las coordenadas de cualquier punto P(x,y) del eje p son:

$$x = x_0 + \rho\cos(\alpha)$$
$$y = y_0 + \rho\cos(\beta) = y_0 + \rho\sin(\alpha)$$

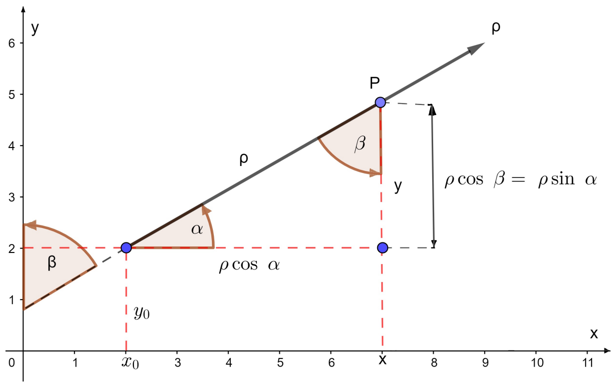


Figura 11.5

Y:

$$f(P) = f(x,y) = f(x_0 + \rho\cos(\alpha), y_0 + \rho\sin(\alpha)) = \varphi(\rho)$$

La función $z = \varphi(\rho)$ descrita en la fórmula anterior, está definida en la cercanía del punto $\rho = 0$ y tiene su derivada, la cual, se obtiene en función de una función compuesta:

$$\varphi'(\rho = 0) = f_x'(x,y)\cos(\alpha) + f_y'(x,y)\sin(\alpha)$$

Donde:

$$x = x_0 + \rho\cos(\alpha), \qquad y = y_0 + \rho\sin(\alpha)$$

La derivada de la función $\varphi(\rho)$, en el punto $\rho = 0$, se llama derivada de la función z = f(x, y) en dirección del eje p y su simbología es:

$$\frac{\partial f}{\partial p}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \varphi'(0) = f_x'(x_0,y_0)\cos(\alpha) + f_y'(x_0,y_0)\sin(\alpha)$$

Si $\alpha = 0$, o $\alpha = \frac{\pi}{2}$,, que son casos especiales, se tiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{\alpha=0} = f_x' = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{\alpha=\frac{1}{2}} = f_y' = \frac{\partial f}{\partial y}$$

La derivada de la función f(x, y) en la dirección del eje p, nos indica la velocidad de aumento de esta función en la dirección p.
En forma similar, se define la derivada de una función de tres variables u = f (x, y, z) en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del eje p de ecuaciones :

$$p = \begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases} \qquad Donde: \ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ \ y \ \ t \geq 0$$

Si la función f (x, y, z) tiene en la cercanía del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la continuidad de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ la derivada $\frac{\partial f}{\partial p}$ se la expresa con la ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f_x'(x_0,y_0,z_0)\cos(\alpha) + f_y'(x_0,y_0,z_0)\cos(\beta) + f_z'(x_0,y_0,z_0)\cos(\gamma)$$

11.9.1. Ejercicios Resueltos de la Derivada de Funciones de Dos o mas Variables en una Dirección

a) Encontrar la dirección del eje p que pasa por el punto P(3,4), para la cual, la derivada $\frac{\partial f}{\partial p}$ tiene su valor máximo y mínimo, si $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Sean los ángulos $\alpha \;\; y \;\; \beta$ determinan los ángulos, por los cuales la recta p saliente del punto P(3,4) se forman respectivamente con los ejes Ox, Oy. Según las fórmulas definidas se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f_x'(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0, y_0)\cos\beta$$

En la ultima fórmula, se puede reemplazar el $\cos\beta$ por el $\sin\alpha$, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f_x'(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0, y_0)\sin\alpha$$

En este caso, se tiene $f(x,y) = x^2 + y^2$, se obtiene los siguientes datos:

$$f_x'(x,y) = 2x \qquad f_y'(x,y) = 2y$$

$$f_x'(3,4) = 6 \qquad f_y'(3,4) = 8$$

Se reemplaza y se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f_x'(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0, y_0)\sin\alpha = 6\cos\alpha + 8\sin\alpha$$

Como se debe obtener valores óptimos su derivada tiene que ser igual a cero : $\dfrac{\partial f}{\partial p} = 0$; por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 6\cos\alpha + 8\sin\alpha = 0$$

Se divide la ecuación para 8 y se utiliza el método del angulo ayuda, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 6\cos\alpha + 8\sin\alpha = 0 \longrightarrow \frac{6}{8}\cos\alpha + \sin\alpha = 0$$

El angulo ayuda es : $\tan\theta = \dfrac{6}{8}$, se reemplaza:

$$\frac{6}{8}\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \longrightarrow \tan\theta\cos\alpha + \sin\alpha = 0$$

Se recuerda que: $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\tan\theta\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \longrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\alpha + \sin\alpha = 0$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \longrightarrow \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha = 0$$

Como se puede observar se requiere de los datos del $\sin\theta$ y del $\cos\theta$, para lo cual, se recurre a la definición de la función tangente. El cateto opuesto de un triangulo recto tendrá un valor de 6, el cateto adyacente tendrá un valor de 8; por lo tanto, la hipotenusa tendrá un valor de 10, aplicando Pítagoras. Con estos datos , se puede escribir que:

$$\sin\theta = \frac{6}{10}, \qquad \cos\theta = \frac{8}{10} \qquad \theta = \arcsin\left[\frac{6}{10}\right] = 36{,}87°$$

Con lo obtenido, se puede escribir:

$$\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha = sin(\alpha + \theta) = 0$$

Se ha obtenido, que $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ está en función de la variable α, para obtener sus valores óptimos, se tiene que derivar Con lo cual, se obtiene:

$$(sin(\alpha + \theta))' = 0 \longrightarrow \cos(\alpha + \theta) = 0$$

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - 37°$$

No es difícil confirmar, que al calcular la segunda derivada, se obtiene:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - 37° \ \ \textit{la expresión} \ \frac{\partial f}{\partial p} \ \textit{alcanza un máximo.}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} - 37° \ \ \textit{la expresión} \ \frac{\partial f}{\partial p} \ \textit{alcanza un mínimo.}$$

b) Calcular la derivada de la función $z = x^3 - y$ en el punto $P_0(1,2)$ en dirección del eje p de ecuaciones:

$$p = \begin{cases} x = 1 + t\cos\dfrac{\pi}{4} \\ y = 2 + t\cos\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

La información que nos proporciona el ejercicio es:
$f(x,y) = x^3 - y, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad \alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$
Se aplica la formula:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f'_x(x_0,y_0)\cos(\alpha) + f'_y(x_0,y_0)\cos(\beta)$$

Se calcula las derivadas: $f'_x(x,y) = 3x^2, \quad f'_y(x,y) = -1$

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_x(1,2) = 3, \quad f'_y(x_0,y_0) = f'_y(1,2) = -1$$

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\beta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Se reemplaza en la formula y se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

c) Encontrar la derivada de la función$f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto P (1, 1) en dirección del eje p, el cual forma un ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ con el eje positivo del eje ' x '.
Se aplica la formula:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f'_x(x_0,y_0)\cos(\alpha) + f'_y(x_0,y_0)\cos(\beta)$$

Como se conoce que $\cos\beta = \sin\alpha$, se reemplaza en la formula:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f'_x(x_0,y_0)\cos(\alpha) + f'_y(x_0,y_0)\sin(\alpha)$$

Se calcula las derivadas: $f'_x(x,y) = 2x, \quad f'_y(x,y) = -2y$

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_x(1,1) = 2, \quad f'_y(x_0,y_0) = f'_y(1,) = -2$$

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Se reemplaza en la formula y se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-2)\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

d) Encontrar la derivada de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ en el punto P (1, 1, 1) en dirección del eje ' Os ' determinado con los ángulos $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 90°$.

Se aplica la formula :

$$\frac{\partial f}{\partial s} = f'_x(x_0,y_0,z_0)\cos(\alpha) + f'_y(x_0,y_0,z_0)\cos(\beta) + f'_z(x_0,y_0,z_0)\cos(\gamma)$$

Se reemplaza los datos dados:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (2x\cos(45°) + 2y\cos(45°) - 2z\cos(90°))_{1,1,1} = 2\sqrt{2}$$

e) Encontrar la derivada de la función $f(x,y) = x^2 - 2xy$ en el punto P (2, 1) en dirección del punto P al punto Q (5, 5).

Se encuentra la distancia del segmento $\mid PQ \mid = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = 5$ y los valores de los cosenos del vector $\overrightarrow{PQ}$ que se forma con los ejes del plano cartesiano:

$$\cos\alpha = \frac{5-2}{\mid PQ \mid} = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{5-1}{\mid PQ \mid} = \frac{4}{5}$$

Se aplica la formula:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = f'_x(x_0,y_0)\cos(\alpha) + f'_y(x_0,y_0)\cos(\beta)$$

Se reemplaza los datos:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \left((2x-2y)\cdot\frac{3}{5} - 2x\cdot\frac{4}{5}\right)_{(2,1)} = \frac{6}{5} - \frac{16}{5} = -2$$

11.9.2. Ejercicios Propuestos de la Derivada de Funciones de Dos o mas Variables en una Dirección

1) Encontrar la dirección del eje ρ que pasa por el punto P(2, 1), para los cuales tiene su derivada $\frac{\partial f}{\partial p}$ un valor *máximo, mínimo o cero si* :

1) $f(x,y) = \frac{3}{4}x^3 + xy + y^2$

2) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

2) Encontrar la derivada de la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en el punto P(1, 1) en la dirección del eje ρ, que forma un ángulo α en la dirección positiva del eje Ox. Calcular la dirección de este eje para el cual la derivada $\frac{\partial f}{\partial p}$ tiene valor : *máximo, mínimo o cero.*

3) Encontrar la derivada de la función $f(x,y) = 1 - \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right]$ en el punto $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ en la dirección a la normal de la elipse $\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right]$. La normal esta dirigida a la parte interna de la elipse.

4) Encontrar la derivada de la función $f(x,y,z) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ en el punto P(1, 1, 1) en la dirección del vector $W = 8i - 4j + 8k$.

5) Encontrar la derivada de la función $f(x,y,z) = xyz$ en el punto P(5, 1, -8) en la dirección del vector $\overline{P_0, P_1}$, si $P_1(9,4,4)$.

6) Encontrar la derivada de la función $f(x,y,z) = xy^2 + z - xyz$ en el punto P(1, 1, 2) en la dirección del eje ρ, que forma con los ejes Ox, Oy, Oz los ángulos $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

11.10. Extremo Local de una Función de varias Variables

La definición de extremos, en el caso de una función de dos variables:

$$z = f(x, y)$$

está definida, por la cercanía de un punto $P(x_0, y_0)$ y la función que toma en este punto el valor $f(x_0, y_0)$, no menor al valor que toma la función en otros puntos de esta cercanía, en ese caso, la función toma en el punto P_0 un valor máximo.

Similar, cuando la función, en el punto $P_0(x_0, y_0)$, toma un valor no mayor de los valores de la función en otros puntos de cierta cercanía al punto P_0, lo que indica que la función tiene un punto mínimo en el punto P_0.
Por lo tanto, la función toma en el punto $P_0(x_0, y_0)$ un máximo, si para valores cercanos a cero de los cambios h y k, se cumple la desigualdad:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \leq f(x_0, y_0)$$

Es decir:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leq 0$$

Un máximo condicionado está definido por:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0$$

Si, se tiene:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \geq f(x_0, y_0)$$

Es decir:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geq 0$$

Y en el caso de un extremo condicionado:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0$$

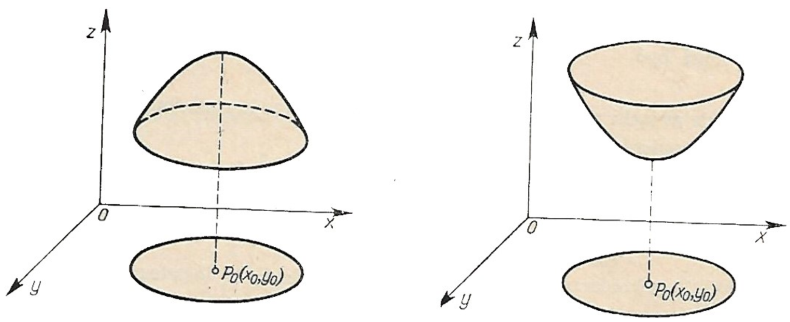


Figura11.6

Los extremos máximo y mínimo, se denomina extremos de la función. En los puntos extremos condicionados, la variación de la función:

$$\triangle z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Tiene un signo constante positivo para el mínimo y negativo para el máximo.

Si la función de dos variables:

$$z = f(x, y)$$

Es continua y sus derivadas parciales de primer orden tiene en el punto $P_0(x_0, y_0)$ un máximo, la función de una variable $f(x, y_0)$ también tiene máximo para $x = x_0$; por lo tanto, su derivada con respecto ' x ' tiene que ser igual a cero para $x = x_0$

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

En forma similar, se tiene que:

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Las relaciones escritas, también son correctas para el caso de mínimo. Se obtiene en este caso un teorema:
Los extremos de una función de dos variables que tiene derivadas parciales continuas puede existir solo en estos puntos, en los cuales la derivada son igual a cero:

$$f_x'(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad f_y'(x_0, y_0) = 0$$

Estas condiciones son necesarias, pero no suficientes para la existencia de extremos. Si la función de dos variables definida por:

$$z = xy$$

Tiene las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \;\; e \;\; \dfrac{\partial z}{\partial y} = x$ las cuales son iguales a cero cuando x = 0 e y = 0; es decir, en el punto P(0,0). El valor de la función en este punto:

$$z = 0 \cdot 0 = 0$$

La función toma valores positivos en el primer y tercer cuadrante y valores negativos en el segundo y cuarto cuadrante; por lo tanto, la función no tiene máximo ni mínimo en el punto P(0,0).
Del teorema se concluye que, para encontrar los extremos de una función z = f(x,y), se debe:

1. Encontrar las derivadas parciales $f_x'(x,y) \;\; y \;\; f_y'(x,y)$,
2. Igualar a cero y resolver el sistema de ecuaciones. Si $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2 \cdots$ son las soluciones al sistema. En estos puntos puede existir pero no debe existir extremo,
3. En cada uno de los puntos obtenidos $P_i(x_i, y_i)$ se analiza el signo del cambio de función:

$$\triangle z = f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i)$$

Si este cambio es constante negativo para todos los valores cercanos a cero, para los valores h y k, se tiene un máximo. Si este cambio, es constante positivo para todos los valores cercanos a cero para los valores h y k, se tiene un mínimo. Si este cambio no es constante negativo o positivo la función no tiene ni máximo ni mínimo.

La forma de encontrar y definir los extremos de funciones de mas de dos variables, es exactamente el mismo.
Si la función es de tres variables:

$$u = f(x,y,z)$$

Se debe resolver el sistema de tres incógnitas:

$$f_x'(x,y,z) = 0; \;\; f_y'(x,y,z) = 0; \;\; f_z'(x,y,z) = 0;$$

Si el terciario ordenado (x_0, y_0, z_0) es una solución al sistema de ecuaciones, y para definir si el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ existe extremo, es suficiente analizar el signo del cambio:

$$\triangle z = f(x_i + h, y_i + k, z_i + l) - f(x_0, y_0, z_0)$$

Para cualquier valor h,k,l cercano a cero.

11.10.1. Condición de suficiencia para la existencia de Extremo de una Función de dos Variables

Como se conoce, en el punto $P_0(x_0, y_0)$ las derivadas parciales de la función z = f(x,y), son igual a cero, la función puede tener o no extremos. De esto decide el signo del cambio de función:

$$\triangle z = f(x_i + h, y_i + k) - f(x_0, y_0)$$

Para un análisis del signo $\triangle z$ se aplica la fórmula de Taylor:

$$\triangle z = f(x_0, y_0) + hf_x'(x_0, y_0) + kf_y'(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left[h^2 f_{xx}'(x,y) + 2hkf_{xy}'(x,y) + k^2 f_{yy}'(x,y)\right] - f(x_0, y_0)$$

Se reemplaza los valores conocidos:

$$\triangle z = \frac{1}{2!}\left[h^2 f'_{xx}(x,y) + 2hkf'_{xy}(x,y) + k^2 f'_{yy}(x,y)\right]$$

Para comodidad:

$$f'_{xx}(x,y) = r; \quad f'_{xy}(x,y) = s; \quad f'_{yy}(x,y) = t$$

Se obtiene:

$$\triangle z = \frac{1}{2!}\left[h^2 r + 2hks + k^2 t\right]$$

Se multiplica y divide para r:

$$\triangle z = \frac{1}{2r}\left[h^2 r^2 + 2hksr + k^2 rt\right]$$

Se suma y se resta s^2k^2:

$$\triangle z = \frac{1}{2r}\left[h^2 r^2 + 2hksr + s^2k^2 - s^2k^2 + k^2 rt\right]$$

Se ha formado un trinomio cuadrado perfecto:

$$\triangle z = \frac{1}{2r}\left[(rh + sk)^2 - (s^2 - rt)k^2\right]$$

Al elemento $\triangle = (s^2 - rt)$, se lo conoce como el discriminante de la función. Se analiza tres casos:

1. Si $s^2 - rt < 0$ entonces $rt > s^2$, lo que significa que $\triangle z > 0$ y por lo tanto, $\triangle z$ y r tienen el mismo signo. Si la función $f(x,y)$ tiene la primera y segunda derivada parcial:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0; \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

   La función tiene en el punto $P_0(x_0, y_0)$ un mínimo cuando $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ y un máximo cuando $f'_{xx}(x_0, y_0) < 0$

2. En el caso de $s^2 - rt > 0$, la variación de la función $\triangle z$ cambia de signo en cada cercanía del punto $P_0(x_0, y_0)$; por lo tanto, la función no tiene ni máximo ni mínimo.

3. En el caso de $s^2 - rt = 0$, no se está en condiciones de definir si la función tiene máximo o mínimo, se debe realizar más análisis de la función.

11.10.2. Ejercicios Resueltos de Extremos de Funciones de dos o mas Variables.

1. Encontrar los extremos de la función:

$$z = x^2 + y^2 - 2x$$

   Se obtiene en primer lugar las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2 = 2(x-1); \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y;$$

   Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 1 & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{cases}$$

   En este caso: x = 1; y = 0. El punto a analizar P(1,0)
   Se calcula el aumento de la función en el punto P(1,0):

$$\triangle z = f(x+h, y+k) - f(1,0) = \left[(1+h)^2 + (0+k)^2 - 2(1+h)\right] - [1 - 2] =$$

$$= 1 + 2h + h^2 + k^2 - 2 - 2h + 1 = h^2 + k^2 > 0$$

   Para todo valor de h,k $\triangle z > 0$; por lo tanto, en el punto P(1,0) la función tiene mínimo.

$$z_{min} = f(x,y) = f(1,0) = x^2 + y^2 - 2x = -1$$

2. Encontrar los extremos de la función:

$$z = 3x^2y - 6xy + y^3$$

Se obtiene en primer lugar las derivadas parciales:

$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 6y = 6y(x-1); \qquad f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 6x + 3y^2;$$

Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6y(x-1) & = & 0 \\ 3(x^2 + y^2 - 2x) & = & 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, se obtiene: y = 0; x = 1. Se reemplaza y = 0 en la segunda ecuación: x = 0; x = 2. Se obtiene los siguientes pares ordenados: $P_1(0,0)$; $P_2(2,0)$
Se reemplaza x = 1, en la segunda ecuación:

$$1 + y^2 - 2 = 0; \quad y = 1, \quad y = -1$$

Se obtiene los siguientes pares ordenados: $P_3(1,1)$; $P_4(1,-1)$.
Se obtiene las segundas derivadas parciales y el discriminante de la función:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y; \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6(x-1); \qquad f''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = 6y$$

$$\triangle = s^2 - rt = (f''_{xy})^2 - f''_{xx}f''_{yy} = 36(x-1)^2 - 36y^2 = 36\left[(x-1)^2 - y^2\right]$$

En el punto $P_1(0,0)$:

$$\triangle(0,0) = 36\left[(0-1)^2 - 0^2\right] = 36 > 0$$

El discriminante de la función es mayor a cero; por lo tanto, la función no tiene extremo en este punto.
En el punto $P_2(2,0)$:

$$\triangle(1,1) = 36\left[(0-1)^2 - 1^2\right] = 36 > 0$$

El discriminante de la función es mayor a cero; por lo tanto, la función tiene extremo en este punto.
En el punto $P_3(1,1)$:

$$\triangle(1,1) = 36\left[(1-1)^2 - 1^2\right] = -36 < 0$$

$$f''_{xx}(1,1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$

El discriminante de la función es menor a cero y la derivada f'_{xx} es positiva; por lo tanto, la función tiene mínimo en este punto.

$$z_{min} = 3 \cdot 1^2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 = -2$$

En el punto $P_4(1,-1)$:

$$\triangle(1,-1) = 36\left[(1-1)^2 - (-1)^3\right] = -36 < 0$$

$$f''_{xx}(1,-1) = 6 \cdot -1 = -6 < 0$$

El discriminante de la función es menor a cero y la derivada f'_{xx} es negativa; por lo tanto, la función tiene máximo en este punto.

$$z_{max} = 3 \cdot 1^2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 \cdot (-1) + 1^3 = 2$$

3. Encontrar el máximo valor de la función:

$$z = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$$

En el interior del triangulo definido por las rectas x = 0; y = 0; x + y = 6. Se obtiene en primer lugar las derivadas parciales:

$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(8 - 3x - 2y);$$

$$f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(4 - x - 2y);$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8y - 6xy - 2y^2 = 2y(4 - 3x - y);$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8x - 3x^2 - 4xy = x(8 - 3x - 4y);$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x^2;$$

Se obtiene el discriminante:

$$\triangle = x^2(8 - 3x - 4y)^2 + 4x^2y(4 - 3x - y)$$

Los extremos solo aparecen en los puntos solución del sistema. Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) & = & 0 \\ x^2(4 - x - 2y) & = & 0 \end{cases}$$

Fácilmente , se encuentra el par ordenado solución del sistema P(2,1). El discriminante es igual:

$$\triangle(2,1) = 2^2(8 - 3(2) - 4(1))^2 + 4(2)^2(1)(4 - 3(2) - (1) = -32 < 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=2 \\ y=1}} = 2y(4 - 3x - y) = 2(4 - 6 - 1) = -6 < 0$$

La función toma valor máximo:

$$z = 4x^2y - x^3y + x^2y^2 = x^2y(4 - x - y) = 2^2 \cdot 1 \cdot (4 - 6 - 1) = 4$$

Este valor se encuentra en el interior del triangulo, se debe realizar un análisis en el borde del triangulo; es decir, sobre las rectas dadas, la función es igual a cero, si x = 0 o y = 0.
Para la recta x + y = 6, se despeja y, se reemplaza en la función:

$$z = 4x^2y - x^3y + x^2y^2 = x^2y(4 - x - y)$$

$$z = x^2y(4 - x - y) = x^2(6 - x)(4 - x - (6 - x))$$
$$z = 2x^3 - 12x^2 = 2x^2(x - 6)$$

En la recta x + y = 6, la variable z está en función de una variable 'x' y toma valores del intervalo [0,6]. En los extremos del intervalo para x = 0 y x = 6 la función es igual a cero.
Se obtiene las derivadas:

$$z' = 6x^2 - 24x = 6x(x - 4); \qquad z'' = 12x - 24 = 12(x - 2)$$

$$z' = 0, \ \ para \ \ x = 0 \ \ y \ \ x = 4$$
$$z''(4) = 24 > 0,$$

Por lo tanto, existe un mínimo:

$$z_{min}(4) = 2x^2(x - 6) = 2 \cdot, 4^2(4 - 6) = -64,$$

Se observa, que en el triangulo ABC la función 'z' tiene un valor mínimo z = -64 en el punto P(4,2), que está sobre la recta x + y = 6, y un valor máximo z = 4, en el punto P(2,1), en el interior del triangulo.

4. Encontrar los extremos de la función:

$$z = f(x,y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$$

Se obtiene en primer lugar las derivadas parciales:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2 + 6xy - 15; \qquad f'_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2;$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 18x + 6y; \qquad f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y; \qquad f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x$$

Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 5 &= 0 \\ x^2 - y^2 &= 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación resulta que: y = x o y = -x.

Reemplazando y = x en la primera ecuación, se obtiene $5x^2 - 5 = 0$, $x = \pm 1$; por lo tanto, se obtiene dos pares ordenados A(1,1), B(-1,-1), en los cuales puede existir extremo.
Reemplazando y = -x en la primera ecuación, se obtiene $x^2 - 5 = 0$, $x = \pm\sqrt{5}$; por lo tanto, se obtiene dos pares ordenados $C(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $D(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, en los cuales puede existir extremo. Se analiza cada uno de los puntos obtenidos en la resolución del sistema:

$$\triangle = s^2 - rt = f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy} = 36x^2 - (18x + 6y)(-6y) =$$

En el punto $P_1(1,1)$:

$$\triangle(1,1) = 36(1)^2 - (18(1) + 6(1))(-6) = 36 + (24)(6) = 6(30) = 180 > 0$$

El discriminante de la función es mayor a cero; por lo tanto, la función no tiene extremo en este punto.
En el punto $P_2(-1,-1)$:

$$\triangle(-1,-1) = 36(-1)^2 - (18(-1) + 6(-1))(-6(-1)) = 36 + (24)(6) = 6(30) = 180 > 0$$

El discriminante de la función es mayor a cero; por lo tanto, la función no tiene extremo en este punto.
En el punto $P_3(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$:

$$\triangle(\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = 36(\sqrt{5})^2 - (18(\sqrt{5}) + 6(-\sqrt{5}))(-6(-\sqrt{5})) < 0$$

El discriminante de la función es menor a cero; por lo tanto, la función tiene extremo en este punto. $f''_{xx} = 18(\sqrt{5}) + 6(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}12 > 0$. La función tiene un mínimo.
En el punto $P_4(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$:

$$\triangle(-\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 36(-\sqrt{5})^2 - (18(-\sqrt{5}) + 6(\sqrt{5}))(-6(\sqrt{5})) < 0$$

El discriminante de la función es menor a cero; por lo tanto, la función tiene extremo en este punto. $f''_{xx} = 18(-\sqrt{5}) + 6(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}12 < 0$. La función tiene un máximo.
Los valores de la función en los extremos:

$$f_{min}(x,y) = -10\sqrt{5}; \qquad f_{max}(x,y) = 10\sqrt{5};$$

11.10.3. Ejercicios Propuestos de Extremos de una Función de dos o mas Variables

1. Analice los extremos de la función:

a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$

b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - x + 4y - 5$

c) $f(x,y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$

d) $f(x,y) = 4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

e) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5$

f) $f(x,y) = (x+y)^2 - (x + 5y + xy)$

g) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$

h) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(a - x - y)$

i) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$

j) $f(x,y) = (x+1)^2 - 2x^2$

k) $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$

l) $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - y^2$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 2y + 1$

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - -3axy$

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$

e) $f(x,y) = (6 - x - y)x^2y^3$

f) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

g) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 2x + 48x$

h) $f(x,y) = xy^2(a - x - y)^3$

i) $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y) + \cos(x - y)$

j) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$

k) $f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$

l) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y$

m) $f(x,y) = \dfrac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

1. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 4xy - 6xy - 3y^2 - 15x - 15y$
2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln(x) - 10\ln(y)$
3. $f(x,y) = x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$
4. En una circunferencia inscribir u triangulo de máxima área.
5. Un número $a > 0$ dividirlo en tres partes, en tal forma que, su producto sea máximo.
6. La suma de tres catetos es igual a 2s. Que tipo de triangulo, se debe escoger, para que su área sea máxima.
7. Encontrar las coordenadas de un punto que este sobre la circunferencia $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 25$ para que su distancia al punto $A(0,-7)$ sea mínima.
8. Encontrar las coordenadas de un punto que este sobre la parábola para que su distancia al punto $A(4,1)$ sea mínima.
9. En el plano Oxy encontrar un punto, M(x,y) para que la suma al cuadrado de sus distancias a las rectas x= 0, y = 0, x - y + 1 = 0, sea mínima.
10. Encontrar las dimensiones de una tina rectangular, la cual, tiene un volumen 'v' tenga mínima de superficie.
11. Presentar un número $a > 0$ en forma de producto de cuatro elementos positivos, en tal forma que, su suma sea mínima.
12. Encontrar el valor mayor y el menor valor de la función $z = 2xy$ en el dominio cerrado $D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.
13. Encontrar el valor mayor y el menor valor de la función $z = 2x^2 - 2y^2$ en el dominio cerrado $D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.
14. Encontrar el valor mayor y el menor valor de la función $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ en el dominio cerrado $D = \{(x,y); -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$.
15. Encontrar el valor mayor y el menor valor de la función $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ en el dominio cerrado $D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

11.11. Diferencial Completo o Total

11.11.1. Cambio de una Función de dos o mas Variables

Para definir el diferencial de una función de dos o mas variables, es necesario entender el cambio (variación) de una función de dos o mas variables. Para lo cual, se considera la función:

$$z = f(x,\ y)$$

Esta función es continua, lo que significa que, la función tiene las derivadas parciales de la función f(x, y) y es por lo tanto una función C^2, es decir: $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ existen. Si a las variables ' x ', ' y ' se les promueve un cambio $\triangle x,\ \triangle y$; por lo tanto, la variación de 'z' se lo puede definir:

$$\triangle z = f(x+\triangle x,\ y+\ \triangle y) - f(x,\ y)$$

Esta fórmula, no es muy amigable para realizar el análisis del cambio o variación de la f(x, y), ya que el cambio es causado por las dos variables al mismo tiempo, es justamente por este cambio que, se realiza una transformación en la fórmula de $\triangle z$; para lo cual, se aumenta y se disminuye $f(x,\ y+\triangle y)$

$$\triangle z = f(x+\triangle x,\ y+\triangle y) - f(x,\ y) + f(x,\ y+\triangle y) - f(x,\ y+\triangle y)$$

Se asocia:

$$\triangle z = [f(x+\ \triangle x,\ y+\triangle y) - f(x,\ y+\triangle y)] + [f(x,\ y+\triangle y) - f(x,\ y)]$$

Como se puede apreciar, en el primer paréntesis el aumento de la función ' z ', se lo realiza con $y+\triangle y$ se considera como constante y ' x ' es la variable independiente. Tanto en el primer paréntesis, como en el segundo, se aplica el teorema Lagrange, la diferencia es que, en primer paréntesis, es en función de ' x ' y en el segundo paréntesis es con respecto a ' y '.
El teorema de Lagrange dice: Si la función y = f (x) es continua en el intervalo [a, b] y tiene su derivada en el interior del intervalo, existe un punto en el interior del intervalo, un punto que:

$$f(x+\triangle x) - f(x) = f'(x)\cdot\triangle x$$

Se puede escribir:

$$[f(x+\triangle x,\ y+\triangle y) - f(x,\ y+\triangle y)] = f'_x(x+\theta_1\triangle x,\ y+\triangle y)\cdot\triangle x$$

$$f(x,\ y+\triangle y) - f(x,\ y) = f'_y(x,\ y+\theta_2\triangle y)\triangle y$$

Los elementos θ_1,θ_2 aparecen por la operación de limites y sus valores están considerados entre [0,1]. De las condiciones iniciales, f (x, y) es una función continua; por lo tanto, $f'_x,\ f'_y$ son continuas, en ese caso $\triangle x\to 0,\ \triangle y\to 0$; por lo que:

$$f'_x(x+\theta_1\triangle x,\ y+\triangle y)\cdot\triangle x = f'_x(x,\ y)dx$$

$$f'_y(x,\ y+\theta_2\triangle y)\triangle y = f'_y(x,\ y)dy$$

Estos elementos obtenidos, se reemplaza en la fórmula de cambio:

$$\triangle z = f'_x(x,\ y)\triangle x + f'_y(x,\ y)\triangle y$$

11.11.2. Diferencial Total de una Función de dos o mas Variables.

La fórmula para el cálculo del aumento de una función de dos o mas variables:

$$\triangle z = f'_x(x,\ y)\triangle x + f'_y(x,\ y)\triangle y$$

De ella fácilmente, se puede calcular el diferencial completo o total de una función de dos o mas variables, ya que, si $\triangle x\longrightarrow 0$ y $\triangle y\longrightarrow 0$, en ese caso, $\triangle z\longrightarrow 0$, cuando esto pasa, se llega en un momento, en el cual $\triangle z\longrightarrow dz$, por lo tanto, $\triangle x\longrightarrow dx$ y $\triangle y\longrightarrow dy$

$$dz = f'_x(x,\ y)dx + f'_y(x,\ y)dy$$

De lo escrito, se puede concluir que, para pequeños aumentos de las variables independientes, el diferencial total permite calcular el aumento de la función; es decir:

$$dz = \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}dy$$

En forma análoga, si u = f(x,y,z,$\cdots$,t), su diferencial total es:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

En forma mas simple:

$$du = f_x'(x,y,z,\cdots,t)dx + f_y'(x,y,z,\cdots,t)dy + f_z'(x,y,z,\cdots,t)dz + \cdots + f_t'(x,y,z,\cdots,t)dt$$

El conocimiento del diferencial de una función de dos o mas variables, permite calcular:

1. Los errores de cálculo de la variable dependiente,
2. Se puede calcular un valor aproximado de cambio de la función:

$$\triangle z \approx dz$$

$$\triangle z = f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x.y) \approx dz$$
$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x.y) + dz$$
$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x.y) + f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy$$

3. Permite el cálculo de la velocidad de cambio de la función con respecto a la velocidad de cambio de las variables independientes; es decir:

$$du = f_x'(x,y,z,\cdots,t)dx + f_y'(x,y,z,\cdots,t)dy + f_z'(x,y,z,\cdots,t)dz + \cdots + f_t'(x,y,z,\cdots,t)dt$$

Se divide a ambos lados por el cambio de tiempo, en el caso de que u = f(x,y,z):

$$\frac{du}{dt} = f_x'(x,y,z)\frac{dx}{dt} + f_y'(x,y,z)\frac{dy}{dt} + f_z'(x,y,z)\frac{dz}{dt}$$

O escrita de la forma general, si u = f(x,y,z,$\cdots$,t):

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

11.11.3. Ejercicios Resueltos de Diferencial de Funciones de dos o mas Variables.

1. Encuentre el diferencial total de la función $z = \dfrac{x}{y}$

Se encuentra los elementos requeridos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

Por lo tanto:

$$dz = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

2. Encuentre el diferencial total de la función $z = \sqrt{x^2+y^2}$

Se encuentra los elementos requeridos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Por lo tanto:

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

3. Si ’ E ’ es el voltaje en los extremos de un cable de resistencia ’ R ’ y con una corriente eléctrica ’ I ’.Calcule el error al calcular ’ R ’ de la relación:

$$R = \frac{E}{I}$$

Si los errores de medición de ’ E ’ y ’ I ’ son dE, dI.
El error están definido por:

$$\% = \frac{\triangle R}{R}100$$

La función del ejercicio, se lo define R = f(E,I):

$$\triangle R \approx dR = \frac{\partial R}{\partial E}dE + \frac{\partial R}{\partial I}dI$$

Se obtiene las derivadas parciales:

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{E}{I^2}; \qquad \frac{\partial R}{\partial E} = \frac{1}{I}$$

Se reemplaza:

$$\triangle R \approx dR = \frac{1}{I}dE - \frac{E}{I^2}dI$$

En la practica, se considera que los errores, son solo positivos y se suman, y por lo tanto, están definidos como valor absoluto:

$$\triangle R \approx \left|\frac{1}{I}dE - \frac{E}{I^2}dI\right| \le \frac{1}{I}dE + \frac{E}{I^2}dI$$

Si se considera que, $E = (220 \pm 2)$ voltios, $I = (30 \pm 0{,}5)$ amperios

$$\triangle R \le \frac{2}{30} + \frac{220 \cdot 0{,}5}{30^2 \le} \approx 0{,}19$$

Por lo tanto:

$$R = \frac{220}{30} \pm 0{,}19 \approx 7{,}33 \pm 0{,}19 \quad ohmios$$

Se obtiene el error de cálculo:

$$\frac{\triangle R}{R} \le \frac{1}{I}\frac{dE}{R} + \frac{E}{I^2}\frac{dI}{R} \le \frac{dE}{E} + \frac{dI}{I}$$

$$\frac{|\triangle R|}{R} \cdot 100 \le \left[\frac{|dE|}{E} + \frac{|dI|}{I}\right] \cdot 100 = \left[\frac{2}{220} + \frac{0{,}5}{30}\right] \cdot 100 \approx 0{,}026 \cdot 100 = 2{,}6\%$$

El error de cálculo no sobrepasa el 2,6%

4. El periodo T de oscilación de un péndulo bajo la premisa de que ángulo sea pequeño (menor a 20°) es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Donde, l- longitud del péndulo; g aceleración de la gravedad. Defina el error de cálculo de $\triangle T$ si l,g están calculadas con un error dl, dg. Se conoce, que:

$$\triangle T \approx dT = \frac{\partial T}{\partial l}dl + \frac{\partial T}{\partial g}dg$$

Se obtiene las derivadas parciales:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \frac{1}{g} = \pi\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{1}{g}$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \left(-\frac{l}{g^2}\right) = -\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{l}{g^2}$$

Se reemplaza:

$$dT = \pi\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \left(\frac{dl}{g} - \frac{ldg}{g^2}\right)$$

Se divide 'T' para calcular el error relativo:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \left(\frac{dl}{g} - \frac{ldg}{g^2}\right)}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1}{2}\frac{g}{l}\left(\frac{dl}{g} - \frac{ldg}{g^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g}\right)$$

$$\left|\frac{dT}{T}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|\frac{dl}{l}\right| + \left|\frac{dg}{g}\right|\right)$$

El valor del error relativo en el cálculo del tiempo de oscilación de un péndulo, no sobrepasa la mitad de la suma de los valores relativos de los errores que se comete la medir l y g.

5. Se mide los catetos a,b de un triangulo rectángulo. Cual es la influencia que tiene el error de medida en el cálculo de la hipotenusa c aplicando el teorema de Pitágoras?

   Se debe encontrar el aumento $\triangle c$ de la función:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

   además, se conoce que, $\triangle c \approx dc$; por lo tanto:

$$dc = \frac{ada}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{bdb}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$dc = \frac{ada}{c} + \frac{bdb}{c}$$

6. En un triangulo rectángulo son conocidos la hipotenusa c = 6.005 [m]; el angulo $\beta = 61°$, encontrar el valor del cateto a, adjunto al angulo β.

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \longrightarrow a = c\cos\beta = 6\cos(60°) = 3$$

$$da = dc\cos\beta - c\sin\beta d\beta = 0{,}005\cos\beta - 6\sin(60°)\frac{\pi}{180}$$

   Se puede calcular un valor aproximado de cambio de la función, en este caso z = $f(c,\beta)$:

$$\triangle a \approx da$$

$$\triangle a = f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x.y) \approx da$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x.y) + da$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x.y) + f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy$$

$$f(6+0{,}005, 60° + 1°) \approx f(6,60°) + dc\cos\beta - c\sin\beta d\beta$$

$$f(6+0{,}005, 60° + 1°) \approx 3 + 0{,}005\cos(60°) - 6\sin(60°)\frac{\pi}{180}$$

$$f(6+0{,}005, 60° + 1°) \approx 3 + 0{,}0025 - 6\frac{\sqrt{3}}{2}0{,}0174 \approx\approx 2{,}912[m].$$

7. Calcular, que error absoluto y relativo, se comete en el cálculo del volumen de un paralelepípedo perpendicular de lados con medidas: $x = 4{,}1\pm0{,}1$, $y = 3{,}2\pm0{,}1$, $z = 8{,}4\pm0{,}2$. Se calcula, en función:

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z) \approx f(x,y,z) + \triangle v$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z) \approx f(x,y,z) + f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z) \approx (4{,}1)(3{,}2)(8{,}4) + (3{,}2)(8{,}4)(0{,}1) + (4{,}1)(8{,}4)(0{,}1) + (4{,}2)(3{,}2)(0{,}2)$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z) = 110{,}2 + 8{,}765 = 118{,}965$$

En base a lo calculado , se tiene:

$$|\triangle v| = 8{,}765 < 8{,}8$$

$$\frac{|\triangle v|}{110{,}2} = \frac{8{,}8}{110{,}2} = 0{,}08 \cdot 100 = 8\,\%$$

8. Encuentre el valor aproximado de $(1{,}02)^{3{,}01}$
Se analiza la función tipo $f(x,y) = x^y$. Como cumple las condiciones de una función en el punto (1,3), se puede escribir:

$$\triangle f \approx df$$

$$\triangle f = f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x.y) \approx df$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x.y) + df$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x.y) + f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

Se encuentra el diferencial:

$$df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln(x)dy$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(1,3) + yx^{y-1}dx + x^y \ln(x)dy$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln(1)0{,}01 = 1 + 0{,}06 + 0 = 1{,}06$$

9. Encuentre el valor aproximado de $\sqrt{(6{,}2)^2 + (8{,}1)^2}$
Se analiza la función tipo $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Como cumple las condiciones de una función en el punto (6,8), se puede escribir:

$$\triangle f \approx df$$

$$\triangle f = f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x.y) \approx df$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x.y) + df$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x.y) + f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

Se encuentra el diferencial:

$$df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(6,8) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$\sqrt{(6,2)^2 + (8,1)^2} \approx \sqrt{6^2+8^2} + \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(xdx + ydy)$$

$$\sqrt{(6,2)^2 + (8,1)^2} \approx \sqrt{6^2+8^2} + \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\cdot 0{,}2 + 8\cdot 0{,}1) = 10 + 0{,}2 = 10{,}2$$

10. La altura de un cilindro, en cierto momento t_0 es de 50 [cm] y crece a una velocidad de 10 [cm/seg], el radio de la base, en el t_0 es igual 8[cm] y disminuye con una velocidad 0,5[cm/seg]. Con que velocidad cambia el volumen del cilindro? El volumen del cilindro, se lo define:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Se encuentra las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi xy; \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = f_r'(r,h)\frac{dr}{dt} + f_h'(r,h)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \cdot 8 \cdot 50(-0{,}5) + \pi 8^2 \cdot 10 = 240 \cdot \pi[cm^3/seg].$$

11. Calcular el error de calculo de un cono cilíndrico, si r = 10,2 [cm] y su directriz l = 44.6. Considere di = dr = 0,1 [cm]. El error a calcular está basado en la fórmula:

$$V = \frac{\pi r^2\sqrt{l^2 - r^2}}{3}$$

Los aumentos de dl corresponde un aumento de ΔV su valor es el valor del error pedido en el calculo del volumen; por lo tanto:

$$\Delta V \approx dV$$

Se obtienen loe elementos necesarios para reemplazar en la fórmula:

$$\triangle V \approx dV = f_r'(r,l)dr + f_l'(r,l)dl$$

$$dV = \frac{\pi}{3}\left[\left(2r\sqrt{l^2 - r^2} + \frac{r^2(-2r)}{2\sqrt{l^2 - x^2}}\right)dr + \frac{r^2 l}{\sqrt{l^2 - r^2}}dl\right]$$

$$dV = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{2r(l^2 - r^2) - r^3}{\sqrt{l^2 - r^2}}\right)dr + \frac{r^2 l}{\sqrt{l^2 - r^2}}dl\right] = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{2rl^2 - 3r^3}{\sqrt{l^2 - r^2}}\right)dr + \frac{r^2 l}{\sqrt{l^2 - r^2}}dl\right]$$

$$dV = \frac{\pi}{3}\left[\frac{(2rl^2 - 3r^3)dr + r^2 l dl}{\sqrt{l^2 - r^2}}\right]$$

Los errores se suman; por lo tanto:

$$|dV| = \frac{r\pi|dl|}{3\sqrt{l^2 - r^2}}\left(2l^2 + 3r^2 + rl\right)$$

Se reemplaza los valores dados y se obtiene $|dV| \leq 116,8$ [cm] y en $\Delta V = 116,8$ [cm]

12. Encuentre el diferencial completo de la función dz :

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

En el punto $P_0(1,0)$ para cualquier aumento de dx y dy. Para el calculo del diferencial, se aplica:

$$dz = f_x'(x_0, y_{0)})dx + f_y'(x_0, y_{0)})dy$$

En este caso, se tiene:

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2), \qquad x_0 = 1, \quad y_0 0$$

Se obtiene las derivadas parciales:

$$f_x'(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad f_x'(1,0) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 0^2} = 2$$

$$f_y'(x,y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \qquad f_y'(1,0) = \frac{2 \cdot 0}{1^2 + 0^2} = 0$$

Se reemplaza:

$$dz = f_x'(x_0, y_{0)})dx + f_y'(x_0, y_{0)})dy = 2 \cdot dx + 0 \cdot dy = 2dx$$

11.11.4. Ejercicios Propuestos de Diferencial de Funciones de dos o mas Variables.

1. Encuentre el diferencial de:
   1. $z = xy$
   2. $z = 3x^2 - 2xy + 5y^2 + y - 2$
   3. $z = y^x$
   4. $p = \dfrac{RT}{v}$ R = constante.
   5. $u = xyz$

   1. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
   2. $\Theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$
   3. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   4. $z = x\sin(y)$
   5. $z = \sin(x)\sin(y)$
2. Encuentre el diferencial total de la función:
$$z = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
3. encuentre el aumento $\triangle Z$ y el diferencial total dz de la función:
$$z = \frac{x+y}{x-y}$$
   Y calcular para los valores: x = 1, y = 3, $\triangle x = 0{,}01$, $\triangle y = 0{,}02$
4. La medida del radio de la base de un cono circular es $r = 10{,}2 \pm 0{,}1$[cm], de su directriz $l = 44{,}6 \pm 0{,}1$[cm].Encuentre su volumen y defina el error absoluto y relativo de los cálculos.
5. La aceleración de la gravedad, se calcula con la fórmula :
$$s = \frac{1}{2}g \cdot t^2$$
   Encuentre el valor del error relativo de los cálculos realizados.
6. En un triangulo, se mide los catetos b,c y el angulo α entre los catetos, con un error $\triangle b, \triangle c, \triangle \alpha$. Encontrar el error de cálculo del tercer cateto al utilizar la fórmula:
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)}$$
7. Calcular los valores de sin utilizar calculadora o algún programa matemático:
   1. $z = \tan(47°) + \cot(46°)$
   2. $z = \dfrac{2{,}01 \cdot 1{,}03}{(2{,}01)^2 - (1{,}03)^2}$
   3. $z = (1,02)^3(0,99)^4$
   4. $z = (1,002)(2,003)^2(3,004)^3$
   5. $z = \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$
   6. $z = \sqrt{(1,03)^3 + (1,97)^3}$
   7. $z = \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$
   8. $z = \sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$
   9. $z = (0,97)^2 \cdot (2,02)^{2,02}$

   1. $z = \ln(\sqrt{1{,}02} - \sqrt[3]{0{,}97} + 1)$
   2. $z = \dfrac{8{,}04}{2{,}02}$
   3. $z = \dfrac{1}{\sqrt{(4{,}02)^2 + (9{,}02)^2}}$
   4. $z = (0,97)^{1,05}$
   5. $z = \ln(\sqrt{1,02} - \sqrt[3]{2,02} + 1)$
   6. $z = (0,97)^2(2,02)^4$
   7. $z = \ln(\sqrt{1,02} - \sqrt[3]{0,97}$
   8. $z = (1,002) \cdot (2,003)^2 \cdot (3,004)^3$
8. Encuentre el error absoluto y relativo en el cálculo del volumen de una esfera de diámetro $d = 3{,}7 \pm 0{,}05$ y $\pi = 3{,}14$
9. Encuentre la velocidad de cambio de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, si x = $\cos(t)$, $y = \sin(t)$
10. La altura de un cono h = 10 [cm], el radio de la base R = 5 [cm. Como cambia su volumen, si la altura aumenta en 2 [mm], y el radio la de base cambia en dos milímetros.

11.12. Función Implícita de dos o mas Variables

La función implícita, es aquella que tiene la forma:

$$F(x,\ y) = 0$$

Además, la función es continua y tiene las derivadas parciales; por lo tanto, es una función C^2:

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}$$

Con la condición adicional de que:

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y} \neq 0$$

Se considera también, que $y = f(x)$, lo que permite, escribir:

$$F(x,\ f(x)) \equiv 0$$

El lado izquierdo de está identidad, es una función compuesta con respecto a ' x '; por lo tanto, depende en forma directa de ' x ' e de y = f(x).
Una forma rápida de definir, si una función es explicita o implícita, es cuando, de la función F(x, y) se puede fácilmente despejar una variable, cualquiera de ellas; en ese caso, la función es explicita, si no se puede, se denomina función implícita.
Se considera que, para la existencia de la función implícita dada en la forma:

$$F(x,\ y) = 0$$

Debe cumplir las condiciones:

1. $F(x_0,\ y_0) = 0$
2. Es una función continua en la cercanía del punto $(x_0,\ y_0)$
3. En la cercanía del punto $(x_0,\ y_0)$ tiene derivada continua F'_y y es diferente de cero en el punto $(x_0,\ y_0)$, además, en la cercanía de $x = x_0$ existe exactamente una función y = f (x) continua,que cumple la condición $y_0 = f(x_0)$ y $F(x,\ f(x)) = 0$. para todo valor de x de esa cercanía.

Para encontrar la primera derivada, se aplica la fórmula del diferencial; es decir, en su forma general, es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial z}{\partial t}dt$$

En este caso, z = F(x, y) y como la función es implícita, lo que significa que, z = 0, se obtiene:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Se deriva ambos lados con respecto a ' x ':

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Como, F(x, f(x)) = 0 y $\dfrac{dy}{dx} = y'$, se obtiene:

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}y' = 0 \longrightarrow y' = -\frac{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Para obtener la segunda derivada, se vuelve a derivar a ambos lados:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}y'\right]' = [0]'$$

Se aplica propiedad de la derivada de una suma:

$$\left[\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial x}\right]' + \left[\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial y}y'\right]' = 0$$

La derivada de $\dfrac{\partial F(x,\,y)}{\partial x}$ es:

$$\left[\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial x}\right]' = \left[\frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial x\partial x} + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y\partial x}y'\right] = \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y\partial x}y'$$

La derivada de $\dfrac{\partial F(x,\,y)}{\partial y}$ es:

$$\left[\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial y}\right]' = \left[\frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y^2}y'\right]$$

Se reemplaza:

$$\frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y\partial x}y' + \left[\frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y^2}y'\right]y' + \left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right]y'' = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y\partial x}y' + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial x\partial y}y' + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y^2}y'^2 + \left[\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial y}\right]y'' = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y\partial x}y' + \frac{\partial^2 F(x,\,y)}{\partial y^2}y'^2 + \left[\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial y}\right]y'' = 0$$

Esta propiedad, se lo escribe de otra forma, que es mas fácil de recordar:

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 + F'_y y'' \equiv 0$$

Se despeja y”:

$$y'' = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2}{F'_y}$$

Se reemplaza y’:

$$y'' = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xy}\left(-\dfrac{F'_x}{F'_y}\right) + F''_{yy}\left(-\dfrac{F'_x}{F'_y}\right)^2}{F'_y} = -\frac{F''_{xx} - \left(\dfrac{2F''_{xy}F'_x}{F'_y}\right) + \left(\dfrac{F''_{yy}F'^2_x}{F'^2_y}\right)}{F'_y}$$

Finalmente:

$$y'' = -\frac{F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_yF'_x + F''_{yy}F'^2_x}{F'^3_y}$$

En el caso de que :

$$F(x,\,y,\,z) = 0$$

Donde, $z = f(x,\,y)$, con lo cual, se puede escribir:

$$F(x,\,y,\,(x,y)) = 0$$

La fórmula de la función dada, represente una ecuación implícita, y eso esta simbolizado con la variable ’ z ’ , ya que esta estructura con las variables $'x,\,y'$. Para encontrar la derivada de está función implícita, se la puede derivar con respecto ’ x ’ o ’ y ’.

$$\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,\,y)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

En forma similar:

$$\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial y} + \frac{\partial F(x,\,y)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Con la condición de que:

$$\frac{\partial F(x,\,y)}{\partial z} = F'_z \neq 0$$

Con lo cual, se obtiene las fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Hay que recordar, que todas estás fórmulas, se obtuvieron del teorema de una función compuesta. La función es continua y existen sus derivadas parciales de las variables que aparecen en la estructura de la función.
Al generalizar la derivada de una función implícita de mas variables, no debe presentar dificultad al estudiante.
Si dada es la función:

$$F(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p,\, u)$$

Lo cual indica que, es una función de (p + 1) variables y debe estar definida en un dominio W, en un espacio Euclidiano de (p + 1) dimensiones de $\mathcal{R}^{p+1}$. La función $F(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p,\, u)$ cumple las condiciones:

1. $F(x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\, x_3^{(0)},\cdots,\, x_p^{(0)},\, u^{(0)}) = 0$
2. Es continua en cierta cercanía del punto $P_0(x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\, x_3^{(0)},\cdots,\, x_p^{(0)},\, u^{(0)})$
3. Tiene derivada continua F'_u en la cercanía del punto P_0 y además, es diferente de cero.

En el espacio $\mathcal{R}^p$ existe una cercanía del punto $Q_0(x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\, x_3^{(0)},\cdots,\, x_p^{(0)})$, en el cual , está definida exactamente una función de variables $u = f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p)$ continua y que cumple la condición:

$$F(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p, f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p)) = 0, \qquad f(x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\, x_3^{=},\cdots,\, x_p^{(0)}) = u^0$$

Si además, existe en la cercanía del punto P_0 las derivadas parciales continuas $F'_{x_1},\, F'_{x_2},\, F'_{x_3},\cdots,\, F'_{x_p}, F'_u$; y en la cercanía del punto Q_0, la función $f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p)$ tiene todas las derivadas parciales de primer orden, son continuas, en ese caso, la derivada, se expresan:

$$f'_{x_1}(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p) = -\frac{F'_{x_1}(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p, f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p))}{F'_u(x_1,\, x_2,\cdots,\, x_p, f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p))}$$

$$f'_{x_2}(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p) = -\frac{F'_{x_2}(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p, f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p))}{F'_u(x_1,\, x_2,\cdots,\, x_p, f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p))}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f'_{x_p}(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p) = -\frac{F'_{x_p}(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p, f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p))}{F'_u(x_1,\, x_2,\cdots,\, x_p, f(x_1,\, x_2,\, x_3,\cdots,\, x_p))}$$

Como en el caso de una función implícita de dos variables, muy a menudo en el cálculo de derivadas parciales

11.13. Extremos de una Función Implícita

Dada es la función implícita y = f(x) de una variable, definida con la ecuación:

$$F(x,\, y) = 0$$

Donde la función F es clase C^2; es decir, es continua y tiene la derivada de primer y segundo orden, en cierto dominio D. Derivando ambos lados de la identidad:

$$F(x,\, f(x)) = 0$$

Se obtiene:

$$F'_x + F'_y\frac{dy}{dx} = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \qquad F'_y \neq 0$$

La condición necesaria para la existencia de extremos de una función f(x), es que, $f'(x) = 0$, en este caso, $F'_x(x,\ y) = 0$; por lo tanto, los puntos posibles de extremos $(x_e,\ y_e)$, se obtienen del sistema:

$$F(x,\ y) = 0, \qquad F'_x(x,\ y) = 0$$

La solución al sistema de ecuaciones mencionados, se obtiene los puntos $(x_e,\ y_e)$. Para definir si en los puntos encontrados, se tiene un extremo, se obtiene la segunda derivada, que tiene la forma:

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 + F'_y y'' = 0$$

Pero como, $y' = \dfrac{dy}{dx} = 0$:

$$F''_{xx} + F'_y y'' = 0 \longrightarrow y'' = -\frac{F''_{xx}}{F'_y} \qquad F'_y \neq 0$$

Lo cual, permite:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_e,y_e} > 0$$

La función F(x,y) tiene un mínimo y si:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_e,y_e} < 0$$

La función F(x,y) tiene un máximo.

11.13.1. Ejercicios Resueltos de una Función Implícita

1. Encuentre la primera y segunda derivada de la función:

$$y = x + \ln(y)$$

La ecuación se la puede escribir en la forma:

$$y - x - \ln(y) = 0$$

Por lo tanto:

$$F(x,y) = y - x - \ln(y), \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y}$$

En consecuencia:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-1}{\frac{y-1}{y}} = \frac{y}{y-1}$$

La segunda derivada:

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{y-1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{y-1}\right)\cdot y' = 0 + \frac{(y-1)\cdot 1 - y\cdot 1}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3}$$

2. Obtenga la primera derivada de $y^3 - 4xy + x^2 = 0$. La ecuación, se la puede escribir en la forma:

$$F(x,y) = y^3 - 4xy + x^2$$

Se calcula:

$$F'_x(x,y) = -4y + 2x, \qquad F'_y(x,y) = 3y^2 - 4x$$

Se obtiene y':

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{4y - 2x}{3y^2 - 4x}, \qquad 3y^2 - 4x \neq 0$$

Se aplica un segundo método para obtener la primera derivada. En función de las definiciones dadas, en toda función implícita, se tiene que: y = f(x), en este caso; por lo tanto, se puede, escribir:

$$F(x,y) = y^3 - 4xy + x^2$$

$$F(x,f(x)) = (f(x))^3 - 4xf(x) + x^2 = 0$$

Se deriva la identidad con respecto 'x', pero hay que recordar que : y = f(x).

$$3(f(x))^2 \cdot f'(x) - 4f(x) - 4x \cdot f'(x)) + 2x = 0$$

Se tiene, un elemento en común $f(f'(x))$; por lo tanto, se aplica distributiva:

$$f'(x)(3(f(x))^2 - 4x) = 4f(x) - 2x$$

Se regresa en función de y:

$$y'(3(f(x))^2 - 4x) = 4y - 2x,, \qquad y' = \frac{4y-2x}{3y^2-4x}$$

3. Encuentre $\dfrac{ds}{dt}, \dfrac{d^2s}{dt^2}$ para el valor t = 1,s = 3, de la estructura:

$$(s-t)st - 3(t+1) = 0$$

Se escribe el ejercicio en la forma:

$$F(t,s) = s^2t - st^2 - 3t - 3$$

Se encuentra la derivada parcial:

$$F'_s = 2st - t^2 = (2s-t)t, \qquad F'_s(1,3) = 5 \neq 0$$

Se debe considerar, que la solución del ejercicio, en la cercanía del punto $(1,3)$, $t \neq 0 \quad y \quad 2s \neq t$.
Se deriva la ecuación $F(t,s) = 0$ con respecto a t (se recuerda que ' s ' es función de t):

$$F(t,s) = s^2t - st^2 - 3t - 3$$

$$\left(2st - t^2\right)\frac{ds}{dt} + (s^2 - 2st - 3) = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-s^2 + 2st + 3}{(2s-t)t}$$

Se obtiene la segunda derivada, para lo cual se utiliza la ecuación:

$$\left(2st - t^2\right)\frac{ds}{dt} + s^2 - 2st - 3 = 0$$

$$\left(2st - t^2\right)\frac{d^2s}{dt^2} + (2s-2)\frac{ds}{dt} + 2t\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2s\frac{ds}{dt} - 2t\frac{ds}{dt} - 2s = 0$$

$$\left(2st - t^2\right)\frac{d^2s}{dt^2} + 2t\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 4(s-t)\frac{ds}{dt} - 2s = 0$$

Se aplica finalmente asociativa , distributiva y se obtiene:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -2 \cdot \frac{t\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2(s-t)\frac{ds}{dt} - s}{(2s-t)t}$$

Al reemplazar los valores t = 1, s = 3, fácilmente se obtiene:

$$\frac{ds}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{6}{5}$$

4. Encuentre la derivada de primer orden de la función z = f (x,y):

$$e^z = 3x - 2y + z$$

Es una función implícita con relación a ' z ', Se escribe:

$$F(x,y,z) = e^z - 3x + 2y - z, \quad F'_x = -3, \quad F'_Y = 2, \quad F'_z = e^z - 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3}{e^z - 1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{e^z - 1}$$

5. Encuentre las derivadas de la función z = f(x,y):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

No es una función implícita pero por facilidad, se la puede considerar, como tal. Se escribe:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

Se deriva nuevamente y se recuerda que 'z' es función de 'x,y', se obtiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z \cdot 1 - x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{z \cdot 1 - x\left(-\dfrac{x}{z}\right)}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z \cdot 1 - y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = -\frac{z \cdot 1 - y\left(-\dfrac{y}{z}\right)}{z^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{z \cdot 0 - x\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = -\frac{z \cdot 0 - x\left(-\dfrac{y}{z}\right)}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}$$

6. Encuentre las derivadas parciales de la función:

$$\ln(xyz) + xz = 0 \qquad x > 0, \;\; y > 0, \;\; z > 0$$

Escribe la ecuación en la forma:

$$z = f(x,y) = F(x,y,z) = \ln(xyz) + xz$$

Además, se obtiene F'_z, para definir su dominio:

$$F(x,y,z) = \ln(xyz) + xz \longrightarrow F'_z = \frac{1}{z} + x \neq 0, \quad xz \neq -1$$

Se deriva la ecuación teniendo en cuenta el dominio y que además, $\ln(xyz) = \ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$; por lo tanto, se obtiene:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z}z'_x + z + xz'_x = 0$$

De donde , se despeja la derivada:

$$z'_x = -\frac{z}{x}$$

Ahora se derivada la ecuación con respecto y:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z}z'_y + xz'_y = 0$$

Se obtiene:

$$z'_y = -\frac{z}{y(1 + xz)}$$

Deseando obtener z''_{xx}, de la expresión:

$$z'_x = -\frac{z}{x} \longrightarrow xz'_x + z = 0$$

Al derivar con respecto a 'x', se obtiene:

$$xz'_x + z = 0 \longrightarrow z'_x + xz''_{xx} + z'_x = 0$$

Se despeja:

$$z''_{xx} = \frac{2z}{x^2}$$

Deseando obtener z''_{xy}, de la expresión:

$$z'_x = -\frac{z}{x} \longrightarrow xz'_x + z = 0$$

Al derivar con respecto a 'y', se obtiene:

$$xz''_{xy} + z'_y = 0 \longrightarrow xz''_{xx} = -z'_y$$

Se reemplaza:

$$z''_{xy} = -\frac{z_{y'}}{x} = -\frac{zx}{yx(1+xz)} = -\frac{z}{y(1+xz)} = z''_{yx}$$

Finalmente, para obtener z''_{yy}, se deriva la expresión:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z}z'_y + xz'_y = 0$$

Con respecto y:

$$-\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}(z'_y)^2 + \frac{1}{z}z''_{yy} + xz''_{yy} = 0$$

Y teniendo en mente la relación de z'_y, se obtiene:

$$z''_{yy} = \frac{z(2+2xz+x^2z^2)}{y^2(1+xz)^3}$$

7. Analice los extremos de la función implícita dada por la ecuación:

$$x^2 - 2x - 2y + y^2 + 1 = 0$$

La ecuación se la escribe en la forma:

$$F(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1$$

Se obtiene las derivadas parciales:

$$F'_x(x,y) = 2x - 2, \qquad F'_y(x,y) = 2y - 2, \qquad F'_{xx}(x,y) = 2,$$

Para encontrar los extremos, se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2y + y^2 + 1 & = & 0 \\ 2x - 2 & = & 0 \end{cases}$$

El sistema tiene dos soluciones A(1,0), B(1,2). Se encuentra el valor de la segunda derivada en los puntos encontrados:

$$f''_A = -\frac{F''_{xx}(1,0)}{F'_y(1,0)} = 1, \qquad f''_B = -\frac{F''_{xx}(1,2)}{F'_y(1,2)} = -1$$

En los puntos A, B la derivada F'^y es diferente de cero, por cada uno de estos puntos pasa la función implícita. En el punto A, la función tiene un mínimo local, en el punto B, la función tiene un máximo.

8. Analice los extremos de la función implícita dada por la ecuación:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$$

La ecuación se la escribe en la forma:

$$F(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1$$

Se obtiene las derivadas parciales:

$$F'_x(x,y) = 2x - 2y + 2, \quad F'_y(x,y) = 4y - 2x, \quad F'_{xx}(x,y) = 2,$$

Para encontrar los extremos, se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 1 & = & 0 \\ 4x - 2y + 2 & = & 0 \end{cases}$$

La solución al sistema, da todos los posibles puntos en los cuales puede existe un extremo. El sistema tiene dos soluciones A(-3,-2), B(-1,0). Se encuentra el valor de la segunda derivada en los puntos encontrados:

$$f''_A = -\frac{F''_{xx}(-3,-2)}{F'_y(-3,-2)} = 1, \quad f''_B = -\frac{F''_{xx}(-1,0)}{F'_y(-1,0)} = -1$$

En los puntos A, B la derivada F'^y es diferente de cero, por cada uno de estos puntos pasa la función implícita. En el punto A, la función tiene un mínimo local, en el punto B, la función tiene un máximo.

9. Analice los extremos de la función implícita dada por la ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$$

La ecuación se la escribe en la forma:

$$z = f(x,y) = F(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72$$

Se obtiene las derivadas parciales:

$$F'_x = 10x - 2y - 2z, \quad F'_y = 10y - 2x - 2z, \quad F'_z = 10z - 2x - 2y,$$

Para encontrar los extremos, se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 & = & 0 \\ 10x - 2y - 2z & = & 0 \\ 10y - 2x - 2z & = & 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son las soluciones $(1,1,4), (-1,-1,-4)$, el estudiante debe demostrarlo. Se obtiene el valor la derivada parcial F'_z, en las soluciones:

$$F'_z(1,1,4) = 36 \neq 0, \quad F'_z(-1,-1,-4) = -36 \neq 0,$$

Como $F'_z \neq 0$, esto indica que, por estos puntos pasa la función implícita analizada. Se analiza el discriminante:

$$\delta = w(x,y,z) = (f''_{xy})^2 - f''_{xx} f''_{yy}$$

Se obtiene las segundas derivadas parciales:

$$f''_{xx} = -\frac{F''_{xx}}{F'_z}, \quad f''_{yy} = -\frac{F''_{yy}}{F'_z}, \quad f''_{xy} = -\frac{F''_{xy}}{F'_z},$$

Por lo tanto:

$$\delta = w(x,y,z) = (f''_{xy})^2 - f''_{xx} f''_{yy} = \frac{(F''_{xy})^2 - F''_{xx} F''_{yy}}{F'_z}$$

Se encuentra los valores del discriminante y de las derivadas parciales, en los puntos$(1,1,4),(-1,-1,-4)$:

$$F''_{xx}=10,\qquad F''_{yy}=10,\qquad F''_{xy}=-2,$$

$$\delta=w(1,1,4)=\frac{4-100}{(36)^2}=-\frac{96}{(36)^2}<0$$

$$\delta=w(-1,-1,-4)=\frac{4-100}{(-36)^2}=-\frac{96}{(-36)^2}<0$$

En ambos casos, el discriminante es negativo, por lo tanto, existe extremo en el punto (1,1,4), en este punto un máximo y en el punto (-1,-1,-4), se tiene un mínimo.

$$f''_{1xx}=-\frac{F''_{xx}(1,1,4)}{F'_z(1,1,4)}=-\frac{10}{36}<0,\quad f''_{2xx}=-\frac{F''_{xx}(-1,-1,-4)}{F'_z(-1,-1,-4)}=-\frac{-10}{-36}>0$$

10. Encontrar los extremos de la función implícita de ecuación:

$$x^2-2xy-3y^2+4=0$$

Para resolver el ejercicio, se aplica las condiciones dadas:

$$F(x,y)=x^2-2xy-3y^2+4$$

Se encuentra las derivadas con respecto x e y:

$$F'_x(x,y)=2x-2y\qquad\qquad F'_y(x,y)=-2x-6y\qquad\qquad F'_{xx}(x,y)=2$$

Se forma el sistema de ecuaciones, que permite obtener los puntos en los cuales podría haber extremos:

$$\begin{cases} F(x,y)=x^2-2xy-3y^2+4 &= 0\\ F'_x=2x-2y &= 0\end{cases}$$

Hay resolver el sistema se obtiene dos puntos $P_1(1,1)$ y $P_2(-1,-1)$:

$$f''_{P_1}=-\frac{F''_{xx}(1,1)}{F'_y(1,1)}=\frac{1}{4},\qquad f''_{P_1}=-\frac{F''_{xx}(-1,-1)}{F'_y(-1,-1)}=-\frac{1}{4}$$

Para definir que extremo se tiene se aplica:

$$\sigma(x,y)=-\frac{F''_{x^2}(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{2}{-2x-6y}=\frac{1}{x+3y}$$

En el punto P_1 $\sigma(x,y)>0$ es un mínimo, en el punto P_2 $\sigma(x,y)<0$ es un máximo.

11. Encuentre la primera y segunda derivada de la función implícita de ecuación:

$$x^3+2xy-3y^2=0\qquad en\ el\ punto\ (1,1)$$

Se deriva con respecto a ' x ' y se recuerda que, ' y ' es función ' x '; por lo tanto:

$$3x^2+2y+2xy'-6yy'=0;\qquad y'(2x-6y)=-(3x^2+2y)$$

$$y'=\frac{3x^2+2y}{2x-6y};\qquad y'(1)=\frac{3\cdot1^2+2\cdot1}{2\cdot1-6\cdot1}=-\frac{5}{-4}=\frac{5}{4}$$

Se vuelve a derivar con respecto ' x ', recordando que, ' y ' es función 'x '; se tiene:

$$y''=-\frac{(6x+2y)(2x-6y)-(3x^2+2y)(2-6y)}{(2x-6y)^2}$$

Se reemplaza el valor de y' y el punto dado:

$$y''=-\frac{\left[(6\cdot1+2\cdot\frac{5}{4})\right](2\cdot1-6\cdot1)-(3\cdot1^2+2\cdot1)\left[(2-6\frac{5}{4})\right]}{(2\cdot1-6\cdot1)^2}$$

$$y'' = -\frac{\left[(6+\frac{10}{4})\right](-4)-(5)\left[(2-\frac{30}{4})\right]}{4} = -\frac{[(-24-10)]-\left[(10-\frac{150}{4})\right]}{4} =$$

$$y'' = -\frac{\left[(6+\frac{10}{4})\right](-4)-(5)\left[(2-\frac{30}{4})\right]}{4} = -\frac{-24-10-10+\frac{150}{4}}{4} =$$

$$y'' = -\frac{-44+\frac{75}{2}}{4} = -\frac{-44+\frac{75}{2}}{4} = \frac{15}{32}$$

11.13.2. Ejercicios Propuestos de una Función Implícita

1. Encontrar la derivada de la función $\frac{dy}{dx}$:
   1. Ax + By + C =0
   2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
   3. $\sin^2 x - x\cos y + 1 = 0$
   4. $x^2 \ln y - y^2 \ln x + 1 = 0$
   5. $y + ye^{-x} - x = 0$
   6. $xe^{2y} - ye^{2x} = 0$
   7. $(x^2+y^2-ax)^2 - b^2(x^2+y^2) = 0$

   1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad a,b>0$
   2. $2y^2 - 4x^3y + 5x^2 - 12 = 0$
   3. $2\cos(x-2y) - 2y + x = 0$
   4. $xy + \ln y + \ln x = 0$
   5. $y + x - e^{\frac{y}{x}} = 0$
   6. $1 + y^x - y = 0$
2. Encontrar la primera y segunda derivada de la función dada y el valor de ellas en el punto dado.
   1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1$
   2. $x - y + \ln y = 0$
   3. $\ln(\sqrt{x^2+y^2}) = a\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
   4. $x^2 - 3xt + t^2 - 25 = 0, \quad (0,5)$
   5. $\tan(x+t) - xt - 1 = 0, \quad \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

   1. $xe^y - y + 1 = 0$
   2. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$
   3. $e^{2x-3y} - 10 = 0$
   4. $\frac{x}{t} - \frac{4}{x} - t + 1 = 0, \quad (1,2)$
   5. $\frac{x+2t}{x-1} + 3tx - 2 = 0, \quad (0,2)$
3. Encontrar las derivadas parciales de la función implícita z = f(x,y) de:
   1. $z^3 - 3xyz - 8 = 0$
   2. $e^{zy} + zx = 0$
   3. $e^{3z} + xy + z = 0$
   4. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$
   5. $xyz = a^3$

   1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 - 10 = 0$
   2. $ye^z + ze^{3x} = 0$
   3. $e^z = \cos(x)\cos(y)$
   4. $z^2 = xy$
   5. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$
4. Analice los extremos de la función implícita:
   1. $x^2 + 2xy + y^2 - 4y - \frac{1}{4} = 0$
   2. $x^5 + y^4 - 4xy^2 = 0$
   3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$
   4. $y^3 + 2xy + x^2$
   5. $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$

   1. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$
   2. $x^3 + y^3 - 12xy = 0$
   3. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
   4. $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0$
   5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

Capítulo 12

Integrales Múltiples

12.1. Integrales Dobles

12.1.1. Integral Doble, Interpretación Geométrica

Si ’ D ’ es un dominio regular o un dominio regular cerrado, a f(x, y) es una función limitada en D. El área ’ P ’ es un rectángulo (de lados paralelos a los ejes de coordenadas) que contiene a ’ D ’. Se simboliza por π_n a la división de ’ P ’ en $\overline{m_n}$ rectángulos (de lados paralelos a los ejes de coordenadas) de los cuales m_n : $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$, $P_1^{(n)}$, $\cdots$, $P_{m_n}^{(n)}$ son puntos que están en el dominio ’ D ’. Siempre se cumple la condición: $m_n \leq \overline{m_n}$.

Si $\delta_i^{(n)}$ es el área de un rectángulo $P_i^{(n)}$; $A_i^{(n)}(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$ es un punto cualquiera que pertenece al dominio ’ D ’ que pertenece además al rectángulo $P_i^{(n)}$; δ_n y es el cateto mas largo, de los catetos de los rectángulos $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$, $P_3^{(n)}$, $\cdots$, $P_{m_n}^{(n)}$,.

La suma S_n definida con la fórmula:

$$S_n = \sum_{i=1}^{m_n} f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}) \cdot \delta_i^{(n)}$$

Si para toda sucesión de la división π_n, en tal forma que, se obtiene el $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, la sucesión S_n, es convergente a un mismo número, sin importar la forma de selección de los puntos $A_i^{(n)}$; en este caso, la función $f(x, y)$ es integrable en la extensión ’ D ’, y al limite de la sucesión S_n, se la denomina integral doble de la función $f(x, y)$ en el dominio ’ D ’ y su símbolo es:

$$\iint\limits_D f(x, y) \cdot d\delta \quad o \quad \iint\limits_D f(x, y) dx dy$$

Como ’ D ’ es un dominio regular o un dominio regular cerrado; por lo tanto, $f(x, y)$ es continua e integrable en ’ D ’, en ese caso:

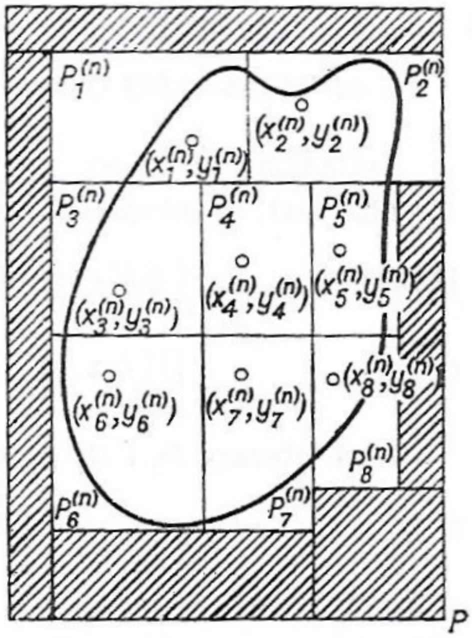


Figura 10.1

$$\iint\limits_D f(x, y) \cdot d\delta = \iint\limits_D f(x, y) dx dy$$

Lo que, además, se puede escribir en la forma:

$$\iint\limits_D f(x, y) \cdot d\delta = \iint\limits_D f(x, y) dx dy = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}) \cdot \delta_i^{(n)}$$

Si $f(x, y)$ es una función continua y toma valores positivos ($f(x, y) \geq 0$), la interpretación geométrica de la integral doble $\iint\limits_D f(x, y) dx dy$ es el volumen del cuerpo limitado por el dominio ’ D ’, que se encuentra en el plano Oxy y la superficie $z = f(x, y)$. Las superficies cilíndricas, que se obtienen, al trazar cada punto del borde del dominio ’ D ’ , rectas paralelas al eje Oz (hasta el punto de corte con la superficie $z = f(x, y)$).

En el momento, que:

$$f(x, y) < 0$$

Todas las sumas de la integral son negativas, a su limite; es decir, su integral doble representa el volumen con signo negativo del respectivo cuerpo de base ’ D ’, limitado en su parte inferior por la superficie z = f (x, y). Cuando la función f (x, y) cambia de signo en la extensión ’ D ’, la integral doble es igual a la suma algebraica del volumen que se encuentra sobre el plano Oxy.

En el caso, de que f(x,y) = 1, significa que, la superficie tiene una ecuación:

$$z = 1$$

Entonces la columna limitada por el dominio ' D ' y la superficie, es un cilindro de altura 1; por lo tanto, su volumen numéricamente es igual al área del dominio ' D ':

$$pole\ \ D = \iint_D 1 \cdot dxdy = \iint_D dxdy$$

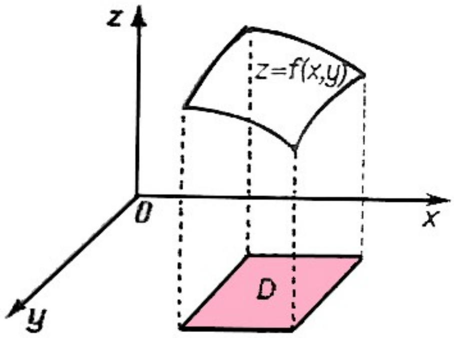


Figura 10.2

12.2. Propiedades de Integrales Dobles

Se considera que, los conjuntos que aparecen en las fórmulas son dominios regulares, cerrados o no y las funciones definidas en ellas, son continuas y limitadas. En ese caso:

1. $\iint_D Kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy$ k - constante
2. $\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$
3. Si los dominios $D_1 \ \ y \ \ D_2$ no tienen puntos internos comunes; entonces:
$$\iint_{D_1+D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$
4. Si m es la parte inferior de la función f(x, y) en el dominio ' D ', a M es la parte superior de la función f(x, y) en el dominio ' D ', a $|D|$ es el área del dominio ' D '; entonces:
$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot |D|$$
5. Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ en el dominio 'D'; entonces:
$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$$
6. Si $f(x,y) > 0$, y el dominio D_1 está contenido en el dominio D_2; entonces:
$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy \leq \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

12.3. Cambio de Integral Doble a una Integral Reiterada

Se considera en forma permanente, que la funciones son continuas y limitadas en la extensión analizada; por lo tanto:

1. Si la extensión ' D ' es normal con respecto el eje Ox con las ecuaciones: $a \leq x \leq b, \ \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$; entonces:
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

2. Si la extensión ' D ' es normal con respecto el eje Oy con las ecuaciones: $\alpha(x) \leq x \leq \beta(x), \quad c \leq y \leq d$; entonces:
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dx \right) dy$$
Las integrales definidas con las fórmulas escritas anteriormente, se les llama integrales reiteradas.

3. De las propiedades de integrales dobles resulta, que si la extensión ' D ' es un rectángulo definido con las ecuaciones $a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$; entonces:
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

4. Y si además, la función $f(x,y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$, la integral doble es igual al producto de las integrales unitarias:
$$\iint_D \varphi(x) \cdot \psi(y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(y)dy$$

12.4. Cambio de Variables en una Integral Doble

En muchos casos y en especial cuando la extensión de integración ' D ' tiene la forma de anillo, circunferencia o partes de estás figuras geométricas, resulta muy cómodo en el cálculo de la integral doble introducir coordenadas polares:

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta)$$

En el cambio de variable se aplica el determinante de Jacobiano (J):

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) = \rho$$

Lo que resulta que:
$$|J| = |\rho| = \rho$$

En base a lo escrito, se puede escribir:
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| d\rho d\theta$$

Esta relación, se la generaliza para cualquier transformación:
$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v)$$

Relacionando el área Δ en el plano uv con el área ' D ' en el plano xy, en está forma, para diferentes puntos del área Δ corresponde diferentes puntos del área ' D ' , a está relación, se lo denomina de mutuo relación.

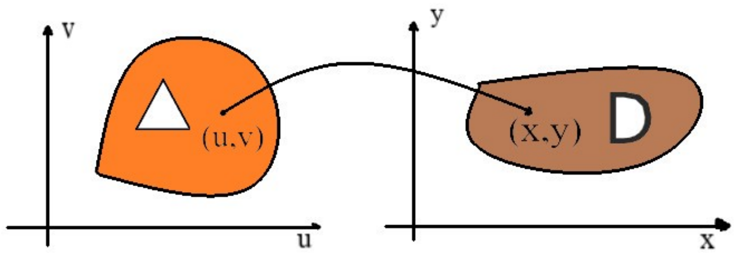


Figura 10.3

Además, se debe considerar que, las funciones $\varphi(u,v)$ y $\psi(u,v)$ son continuas, tiene sus derivadas; y que además, el determinante de Jacobiano es diferente de cero:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

Se tiene:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(\varphi(u,v)\psi(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

En forma similar, se lo realiza para una integral triple, es decir, las dimensiones de V en el espacio xyz tiene la relación mutua on $\overline{V}$ en el espacio uvw:

$$x = \varphi(u,v,w), \qquad \psi(u,v,w) \qquad z = \omega(u,v,w)$$

Donde las funciones $\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \omega(u,v,w)$ tienen su derivada parcial continua y Jacobiano en el campo $\overline{V}$:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Lo que resulta que:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\overline{V}} f(\varphi(u,v,w)\psi(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Se debe indicar que, la relación mutua entre Δ y D, no debe ser necesariamente mutua en los bordes.

12.4.1. Ejercicios Resueltos de Integrales Dobles.

1. Un paralelogramo cuya base está definida por las rectas x = -1, y = - 2, x = 1, y = 2, quedo cortado en su parte superior por la superficie $z = 6 - x^2 - y^2$. Calcular el volumen del cuerpo que se obtuvo? (Ver figura 10.4)

   De las condiciones dadas, la función toma valores positivos y de acuerdo a la interpretación geométrica de la integral doble, se tendría:

$$V = \iint\limits_{D} (6 - x^2 - y^2)dxdy$$

   En este caso, el orden de integración es indiferente, ya que las variables x, y son constantes. Además, el estudiante, ya en este momento, debe reconocer la función dada $z = 6 - x^2 - y^2$, que es una paraboloide y por el signo negativo de la variables x, y la función tiene un máximo. El orden de integración, se lo realiza con respecto a la variable y:

$$V = \int\limits_{y=-2}^{y=2} \left(\int\limits_{x=-1}^{x=1} (6 - x^2 - y^2)dx \right) dy = \int\limits_{y=-2}^{y=2} \left[6x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right]_{-1}^{1} dy =$$

$$= \int\limits_{y=-2}^{y=2} \left[\left(6(1) - \frac{(1)^3}{3} - (1)y^2 \right) - \left(6(-1) - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)y^2 \right) \right] dy =$$

$$= \int\limits_{y=-2}^{y=2} \left[\left(6 - \frac{(1)}{3} - (1)y^2 \right) - \left(-6 + \frac{(1)}{3} + (1)y^2 \right) \right] dy =$$

$$= \int_{y=-2}^{y=2} \left[\left(6 - \frac{(1)}{3} - y^2 \right) + 6 - \frac{(1)}{3} - y^2 \right] dy =$$

$$= \int_{y=-2}^{y=2} \left[\frac{34}{3} - 2y^2 \right] dy = \left[\frac{34}{3} y - 2\frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{2}$$

$$== \left(\frac{68}{3} - \frac{16}{3} \right) - \left(-\frac{68}{3} + \frac{16}{3} \right) = \frac{104}{3}$$

En el ejercicio, se lo ha resuelto tomando el orden primero con respecto a x (la integral interna) y después con respecto a y (la integral externa). El estudiante, debe resolver el ejercicio tomando un orden inverso al hecho en este ejercicio y comprobar, si se obtiene el mismo resultado, para si demostrar una de las propiedades de integral doble.

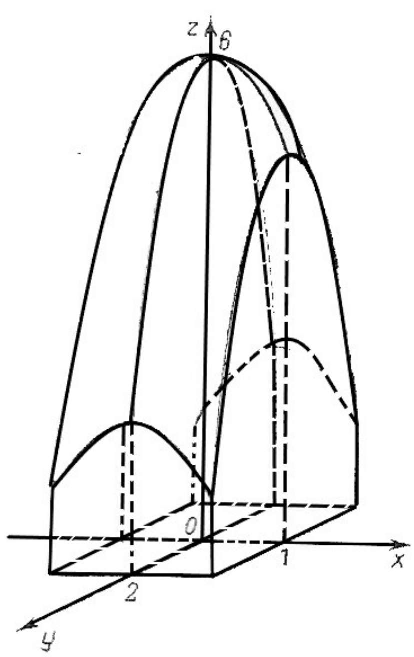


Figura 10.4

2. Calcular la integral doble:

$$V = \iint_D (2x + y + 1) dx dy$$

Si el área de su dominio es un triangulo de vértices A(1, 1), B(5; 3), C(5, 5).

El área de integración es un triangulo. El orden de integración con respecto la variable ' x ' o la variable ' y ' es indiferente, pero se debe recordar que la primera integración (integral interna), se lo realiza en los limites de las variables y la segunda integración (integral externa) se lo realiza en los limites constantes.
Si, se realiza la integración primero con respecto el eje ' x '; es decir, sera la integral externa y para lo cual, se traza rectas perpendiculares al eje ' x ' (la recta entre cortada) y se observa que, en todo el intervalo del eje ' x ' cortan en dos puntos de las mismas funciones; es decir:

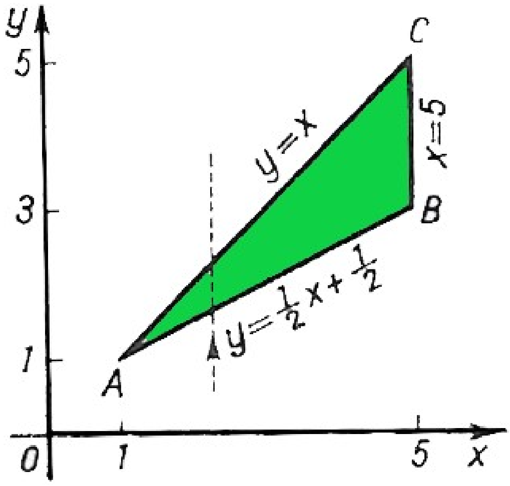


Figura 10.5

$$V = \int_{x=1}^{x=5} \left(\int_{y=\frac{1}{2}(x+1)}^{y=x} (2x + y + 1) dy \right) dx =$$

Primera, se calcula la integral interna:

$$\int_{y=\frac{1}{2}(x+1)}^{y=x} (2x + y + 1) dy = \left[2xy + \frac{y^2}{2} + y \right]_{y=\frac{1}{2}(x+1)}^{y=x} =$$

$$= 2x^2 + \frac{x^2}{2} + x - 2x\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) - \frac{1}{2}(x+1) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(16x^2 + 4x^2 + 8x - 8x^2 - 8x - x^2 - 2x - 1 - 4x - 4\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(11x^2 - 6x - 5\right)$$

Segundo, se calcula la integral externa:

$$V = \frac{1}{8}\int\limits_{x=1}^{x=5}\left(11x^2 - 6x - 5\right)dx = \frac{1}{8}\left[\frac{11}{3}x^3 - 3x^2 - 5x\right]_1^5$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{11\cdot 125}{3}75 - 25 - \frac{11}{3} + 3 + 5\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{11\cdot 124}{3} - 92\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{11\cdot 31}{3} - 23\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{272}{3} = \frac{136}{3}$$

Si, se realiza la integración primero con respecto el eje ’ y ’; es decir, sera la integral externa y para lo cual, se traza rectas perpendiculares al eje ’ y ’ (las rectas entre cortadas l, k) y se observa que, en todo el intervalo del eje ’ y ’ cortan en dos puntos de diferentes funciones y por lo tanto, se tendría dos integrales dobles. Aunque el orden de la integración ha sido diferente, el resultado tiene que ser el mismo; por lo tanto, el estudiante debe resolver el ejercicio y demostrar que es verdad.

$$V = \int\limits_{y=1}^{y=3}\left(\int\limits_{x=y}^{x=2y-1}(2x+y+1)dx\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{y=3}^{y=5}\left(\int\limits_{x=y}^{x=5}(2x+y+1)dx\right)dy$$

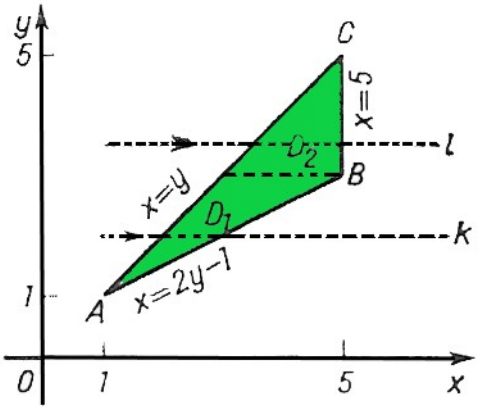


Figura 10.6

3. Dado un cilindro de radio ’ r ’, su eje de rotación es el eje Oy. Calcular el volumen de la parte del cilindro que está sobre el triangulo OAB, que es la mitad del cuadrado OABC de lado igual a ’ r ’, que se encuentra en el plano Oxy.

La ecuación de la superficie del cilindro es : $x^2 + z^2 = r^2$; por lo tanto, z = $\sqrt{r^2 - x^2}$, donde $0 \le x \le r$, lo cual permite definir, que el volumen que se busca es:

$$V = \iint\limits_D z dxdy = \iint\limits_D \sqrt{r^2 - x^2}dxdy =$$

El área de integración es el triangulo OAB. La selección del orden de integración puede ser:

a) Facilidad de definir las variables de los limites, o

b) Facilidad de cálculo de la integral

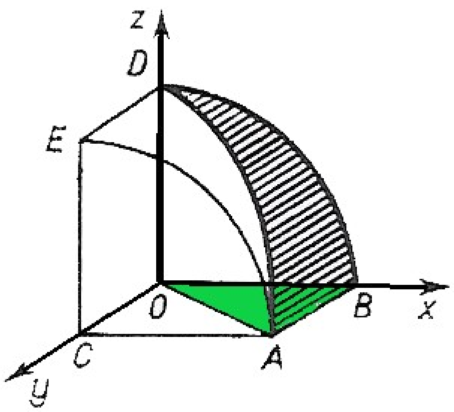


Figura 10.7a

En este ejercicio la función para integrar no contiene la variable y, la integración con respecto y, seria lo mas fácil, que integrar con respecto x.

Para definir los limites de la integración se utiliza la figura 10.7b. La integral interna es con respecto la variable y; por lo tanto, los limites de integración es de y = 0 e y = r. Los limites de integración con respecto x son: x = 0 y x = r.

$$V = \int_{x=0}^{x=r} \left(\int_{y=0}^{y=x} \sqrt{r^2 - x^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \int_0^x dy \right) dx =$$

$$= \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \, [y]_0^x \right) dx =$$

$$= \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2} dx == -\frac{1}{2} \int_{r^2}^0 \sqrt{t} dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{r^2}^0 = \frac{1}{3} r^3$$

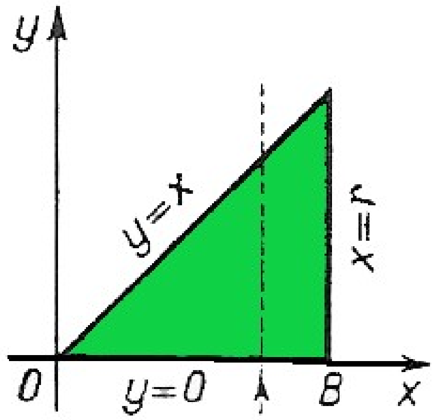


Figura 10.7b

Finalmente, el volumen es $V = \frac{1}{3} r^3$. Como se puede apreciar, el resultado esta solamente en función de ' r ' y lo interesante del ejercicio, es que, en su solución, no aparece π en el resultado.

4. Calcule la integral doble:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{10 + 2x + y}}$$

Donde D está limitado por el arco de una parábola, el eje Ox y $-1 \leq x \leq 3$.

Si se desea integrar con respecto la variables x y en función de la figura 10.8, se obtiene los limites de integración; por lo tanto, se obtiene:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{10 + 2x + y}} = \int_{-1}^3 \left(\int_0^{x^2} \frac{dy}{\sqrt{10 + 2x + y}} \right) dx =$$

$$\int_{-1}^3 2\left[\sqrt{10 + 2x + y} \right]_0^{x^2} dx =$$

$$= 2 \int_{-1}^3 \left(\sqrt{10 + 2x + x^2} - \sqrt{10 + 2x} \right) dx$$

$$= 2 \int_{-1}^3 \sqrt{10 + 2x + x^2} dx - 2\sqrt{2} \int_{-1}^3 \sqrt{5 + x} dx$$

Cada una de las integrales obtenidas, se las calcula en forma independiente, la primera integral, es una integral conocida:

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 10} dx = \int \sqrt{(x + 1)^2 + 9} dx =$$

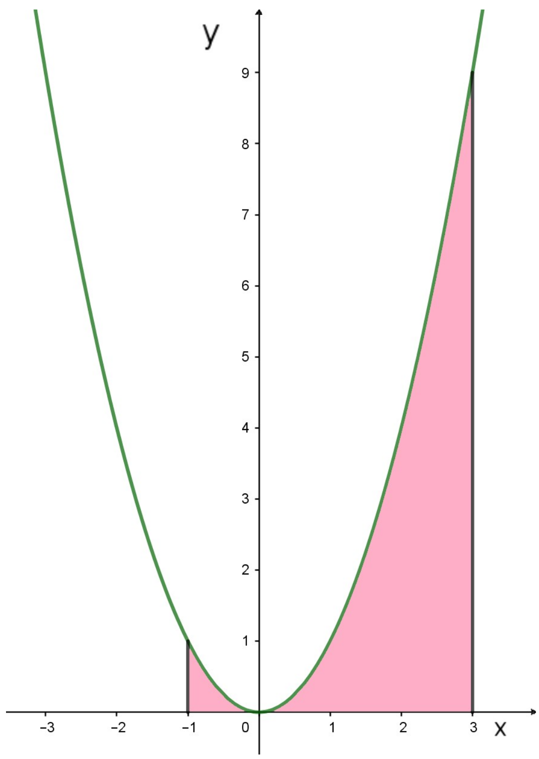


Figura 10.8

$$\int \sqrt{(x + 1)^2 + 9} dx = \left[\frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{(x + 1)^2 + 9} + \frac{9}{2} \ln \left| (x + 1) + \sqrt{(x + 1)^2 + 9} \right| \right]_{-1}^3 =$$

$$= \left[\frac{4}{2}\sqrt{(4)^2+9}+\frac{9}{2}\ln\left|(4)+\sqrt{(4)^2+9}\right|\right]-\left(0+\frac{9}{2}\ln\sqrt{9}\right)=$$

$$= 10+\frac{9}{2}\ln 9-\frac{9}{2}\ln 3 = 10+\frac{9}{2}\ln 3$$

La segunda integral:

$$\int_{-1}^{3}\sqrt{x+5}dx = \int_{-1}^{3}(x+5)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{(x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{2}{3}\left((3+5)^{\frac{3}{2}}-(-1+5)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{8^3}-\sqrt{4^3}\right)=$$

$$= \frac{2}{3}\left(8\sqrt{8}-2^3\right)=\frac{2}{3}\left(8\cdot 2\sqrt{2}-8\right)=\frac{16}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Finalmente:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{10+2x+y}} = 2\left(10+\frac{9}{2}\ln 3\right)-2\sqrt{2}\frac{16}{3}(2\sqrt{2}-1) = 9\ln 3-\frac{4}{3}\left(17-8\sqrt{2}\right)$$

Cuando en la estructura de la integral doble, presenta elementos matemáticos complejos de formas geométricas, como, circulares, elípticas o hiperbólicas , es de gran ayuda, el cambio de variables. En un 70 a 80 por ciento de los casos reduce, significativamente, el trabajo de integrar. Entre las mas populares en su aplicación, está el cambio polar; es decir, el cambio de su forma cartesiana representada por pares ordenados (x, y) a la forma polar representada por: $(\rho\cos(\theta),\ \ \rho\sin(\theta))$.

1. Calculé la integral $\iint_D \sqrt{xy}dxdy$ si el dominio ’ D ’ está definido por las curvas $y^2 = ax,\ y^2 = bx,\ xy = p,\ xy = q$, donde: $0 < a < b,\ 0 < p < q$.

   Se forma nuevas variables ’ u ’ y ’ v ’ según las fórmulas $y^2 = ux,\ xy = v$.
   Lo que se necesita es u (x, y) y v (x ,y); por lo tanto, de la primera se despeja ’ x ’ y se reemplaza en la segunda:

$$y^2 = ux \longrightarrow x = \frac{y^2}{u}$$

$$xy = v \longrightarrow y\cdot\frac{y^2}{u} = v$$

$$y^3 = v\cdot u \longrightarrow y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}$$

Ahora:

$$xy = v \longrightarrow y = \frac{v}{x}$$

$$y^2 = ux \longrightarrow \left(\frac{v}{x}\right)^2 = ux$$

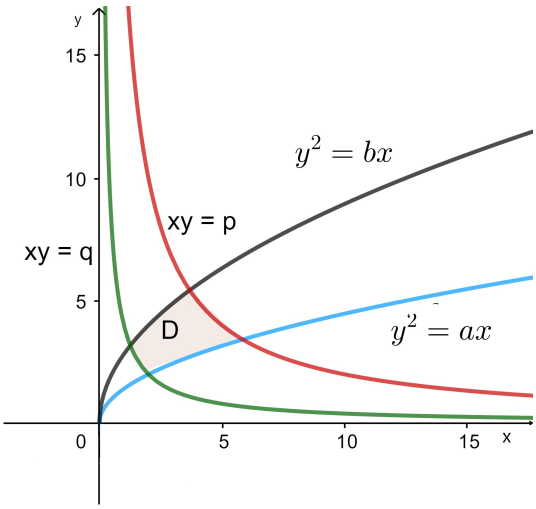


Figura 10.9a

$$\left(\frac{v^2}{u}\right) = x^3 \longrightarrow x = v^{\frac{2}{3}}u^{-\frac{1}{3}}$$

En este momento, se ha logrado establecer una relación de ’ x ’ en función de (u, v); por lo tanto, se debe encontrar una relación para definir ’ y ’ en función de (u, v). Esto permite estar en condiciones de realizar un cambio de las variables (x, y) a las variables (u, v), para aplicar en la integral doble, se requiere encontrar el valor del determinante de Jacobiano; para lo cual, se requiere encontrar sus derivadas parciales.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}$$

Se obtiene el valor del determinante de Jacobiano (J):

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \dfrac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\\[2mm] \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}\end{vmatrix}=\left|-\frac{1}{3u}\right|=\frac{1}{3u}$$

La figura 10.9 representa el dominio ’ D ’ en el sistema cartesiano, se debe obtener el dominio Δ en el nuevo sistema:

$$y^2=ax,\longrightarrow\frac{y^2}{x}=a\longrightarrow u=a \qquad y^2=bx,\longrightarrow\frac{y^2}{x}=b\longrightarrow u=b$$

$$xy=p\longrightarrow v=p, \qquad xy=q\longrightarrow v=q,$$

El gráfico, en el nuevo sistema permite obtener la siguiente información; que tanto, la variable ’ u ’ como ’ v ’ son constantes y por lo tanto el orden de integración es indiferente.

Ya con todo lo que se ha hecho, es posible integrar en el nuevo sistema:

$$\iint\limits_D\sqrt{xy}\,dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_\Delta\sqrt{v}\frac{dudv}{u}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_a^b\left(\int\limits_p^q\sqrt{v}dv\right)\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_a^b\left(\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}\right)_p^q\frac{du}{u}=$$

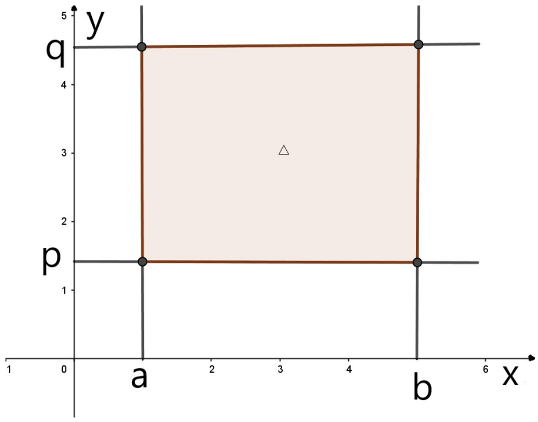


Figura 10.9b

$$=\frac{1}{3}\int\limits_a^b\left(\frac{2}{3}\left(q^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right)\right)\frac{du}{u}=\frac{2}{9}\left(q^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

2. Calculé la integral doble:

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$$

Donde D está limitada por la ecuación $x^2+y^2=2ax$.

Se define que tipo de figura es el dominio D y sus elementos:

$$x^2+y^2=2ax\longrightarrow x^2-2ax+y^2=0$$

$$x^2-2ax+y^2+a^2-a^2=0\longrightarrow(x-a)^2+(y-0)^2=a^2$$

La ecuación representa una circunferencia de radio R = a, su centro c(a,0).
En el ejercicio se aplica cambio de variable; por lo tanto:

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_\Delta(\rho)^2\rho d\rho d\theta$$

$$\iint\limits_\Delta\rho^3d\rho d\theta$$

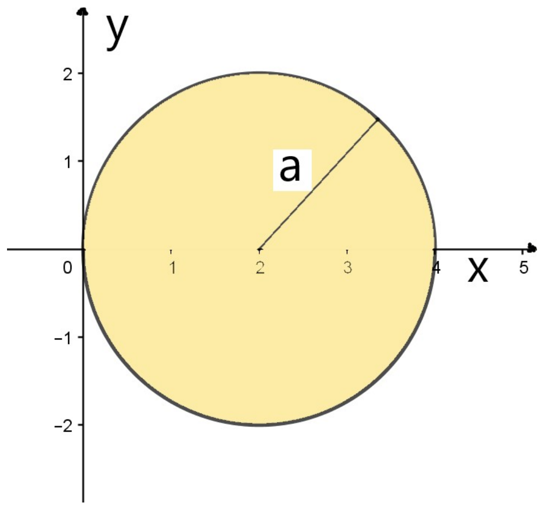


Figura 10.10

Ahora toca definir los limites de integración: $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ para definir ρ se aplica la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+y^2=2ax \longrightarrow (\rho\cos(\theta))^2+(\rho\sin(\theta))^2=2a\rho\cos(\theta)$$

$$\rho^2\cdot 1=2a\rho\cos(\theta)\longrightarrow \rho=2a\cos(\theta)$$

Por lo tanto: $0\le\rho\le 2a\cos(\theta)$. Como ρ tiene la variable θ, este limite debe estár en la integral interna:

Finalmente, se debe escribir los limites:

$$\iint\limits_{\Delta}\rho^3 d\rho d\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{0}^{2a\cos\theta}\rho^3 d\rho\right)d\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^4}{4}\right)_0^{2a\cos(\theta)}d\theta$$

$$=4a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\theta))^4 d\theta=8a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\theta))^4 d\theta$$

El ultimo elemento se integra:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\theta))^4 d\theta=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2(\theta)\right)^2 d\theta=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta=$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)\right)d\theta=\frac{1}{4}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta+2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\theta)d\theta+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(2\theta)\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left([\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[2\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left[2\theta+\frac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{4}+0\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=8a^4\frac{3\pi}{16}=\frac{3\pi}{2}a^4$$

3. Calcule el volumen del área limitada por la superficie $z^2(a^2-x^2-y^2)=1$ y el cilindro con su eje paralelo al eje z y su corte transversal al plano Oxy está definido por $x^2+y^2-ax=0$ donde $(a>0)$. Primero, se obtiene toda la información de la ecuación $x^2+y^2-ax=0$:

$$x^2+y^2-ax=0\longrightarrow x^2-2\frac{1}{2}ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+y^2=0$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

Lo cual, indica que, es una circunferencia de centro $C\left(\frac{a}{2},0\right)$ de radio $R=\frac{a}{2}$. Además, se conoce que está circunferencia, seria el dominio del volumen buscado. La ecuación de la superficie con respecto a z es:

$$z=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

Los signos de la raíz, también indica que la figura es simétrica; por lo tanto:

$$V=2\iint\limits_{D}zdxdy=2\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$$

Como se puede observar, la función está en función $f(x^2+y^2)$, el dominio también tiene una estructura circular; por lo tanto, se debería aplicar cambio de variable.

$$V=2\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}=2\iint\limits_{\Delta}\frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

Se debe obtener los limites de la integración, la figura 10.11, permite obtener los valores de $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
El dominio está definido como $x^2 + y^2 - ax = 0$, en el sistema cartesiano, pero esto permite obtener los cambios de ρ en el sistema polar.

$$x^2 + y^2 = ax$$

$$(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 = a\rho\cos(\theta)$$

$$\rho^2 \cdot 1 = a\rho\cos(\theta) \longrightarrow \rho = a\cos(\theta)$$

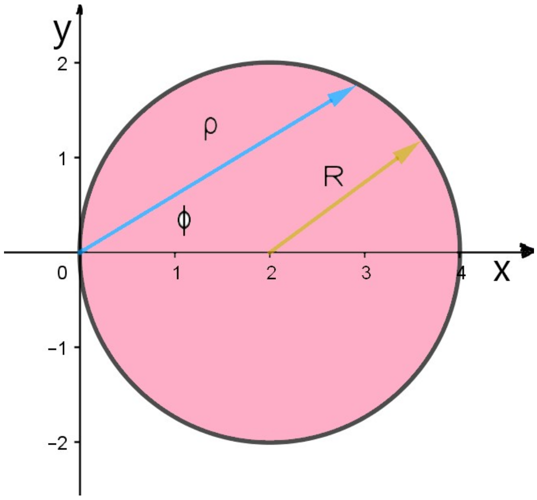


Figura 10.11

Por lo tanto: $0 \le \rho \le a\cos(\theta)$. Como ρ tiene la variable θ, este limite debe estár en la integral interna:

Finalmente, se debe escribir los limites:

$$2\iint\limits_{\Delta} \frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}} d\rho d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{0}^{a\cos\theta} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right) d\theta = -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{a^2-\rho^2}\right)_0^{a\cos(\theta)} d\theta =$$

$$-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{a^2-(a\cos\theta)^2} - \sqrt{a^2}\right) d\theta = -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(a\sqrt{1-\cos^2\theta} - a\right) d\theta =$$

$$= -2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (|\sin(\theta)| - 1)\, d\theta = -2a\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(\theta)|\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)$$

$$= -2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin(\theta)) d\theta - 2a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta + 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$= -2a\left[\cos(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + 2a\left[\cos(\theta)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + 2a[\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -2a\left(\cos(0) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + 2a\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right) + 2a\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= -2a(1-(0)) + 2a(0-(1)) + 2a\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$-2a(1) - 2a(1) + 2a\pi = -4a + 2a\pi = 2a(\pi - 2)$$

Lo interesante del ejercicio, es el gráfico que represente la función $z = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$. El estudiante ya puede hacerlo aplicando cálculo diferencial y seria bueno, que lo obtenga, aquí solamente se lo presenta.

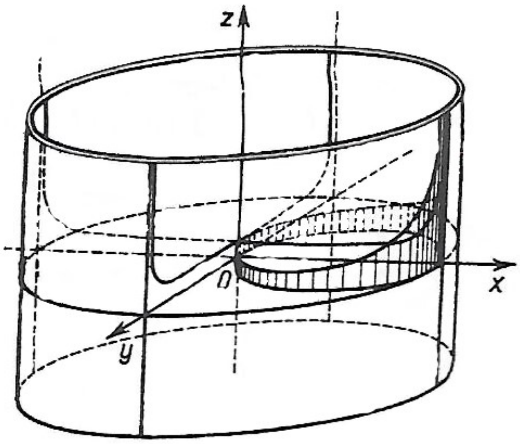


Figura 10.12

12.4.2. Ejercicios Propuestos de Integrales Dobles.

1. Resuelva las siguientes integrales dobles:

a) $\int_0^4 \left[\int_4^{12} xy dy \right] dx$

b) $\int_0^b \left[\int_t^{10t} \sqrt{st-t^2} dt \right] ds$

c) $\int_0^1 \left[\int_4^{12} (x^2+y) dy \right] dx$

d) $\int_0^2 \left[\int_x^{x\sqrt{x}} (x^2+y) dy \right] dx$

e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\cos\theta} r^3 dr \right] d\theta$

f) $\int_1^2 \left[\int_x^{x+3} (x+y) dy \right] dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} r^3 dr \right] d\theta$

a) $\int_0^4 dx \int_4^{12} xy(x-y) dy$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} r^4 dr, \quad a>0$

c) $\int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2} dy$

d) $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{(x^2+y^2)} dy$

e) $\int_0^6 dx \int_1^5 \frac{dy}{(x+y)}$

f) $\int_2^6 dx \int_1^5 \frac{dy}{(x+y)}$

g) $\int_{-3}^3 dy \int_1^5 (x+2y) dx$

2. Obtenga la integral doble $\iint_D \sin(x)\cos(y) dxdy$. Si D está formado por los vértices del triangulo A(a, 0), B(0, a), C(0, 0), cuando $a>0$

3. Obtenga la integral doble $\iint_D (x+2y) dxdy$. Si D está formado por los vértices del triangulo A(0, 0), B(2, 2), C(-1, 1).

4. Obtenga la integral doble $\iint_D (2x+1) dxdy$. Si D está formado por los vértices del triangulo A(-1, 1), B(1, 1), C(0, 0).

5. Obtenga la integral doble $\iint_D (2x+1) dxdy$. Si D está formado por los vértices del triangulo A(0, 1), B(1, 1) , C(0, 0)

6. Calcule la integral doble $\iint_D (2x+1) dxdy$, donde el dominio D está limitada por las rectas $y = x,\ x+y = 2a,\ x = 0$.

7. Calcule la integral doble $\iint\limits_D \sqrt{xy-y^2}dxdy$, donde el dominio D está limitada por los vértices del trapecio $A(1,1),\ B(5,1),\ C(10,2),\ E(2,2)$.

8. Calcule la integral doble $\iint\limits_D xydxdy$, donde el dominio D está limitada por las rectas $x+y=2,\ x^2+y^2=2y$.

9. Calcule la integral doble $\iint\limits_D ydxdy$, donde el dominio D está limitada por los vértices del trapecio $A(1,1),\ B(0,0),\ C(0,1)$.

10. Calcule la integral doble $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, donde el dominio D está limitada por las rectas $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$.

11. Calcule la integral doble $\iint\limits_D \sqrt{a^2+x^2}dxdy$, donde el dominio D está limitada por las curvas $y^2-x^2=a^2,\ x=a,\ x=0,\ y=0,\ y>0$.

12. Calcule la integral doble $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, donde el dominio D está limitada por las curvas $y=x\tan(x),\ y=x$.

13. Calcule la integral doble $\iint\limits_D (4-y)dxdy$, donde el dominio D está limitada por las curvas $x^2=4y,\ y=1,\ x=0,\ x>0$.

14. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=1+x+y,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ x+y=1$.

15. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=4x^2+2y^2+1,\ x+y-3=0,$.

16. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=a^2-x^2,\ y=2x,\ x+y=a,\ z=0,\ y=0$.

17. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$.

18. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=xy,\ x+y+z=1,\ z=0$.

19. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z^2=xy,\ x+y=4,\ x+y=6$.

20. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=x+y,\ xy=1,\ xy=2,\ y=x, y=2x, z=0\ (x>0, y>0)$.

21. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=x^2+y^2,\ xy=5,\ xy=10,\ y=\frac{x}{2}, y=2x$,.

22. Calcule la integral doble $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, donde el dominio D está limitada por la parte interna de la circunferencia $x^2+y^2=1$

23. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=3x,\ x^2+y^2=4,$ y limitada por los planos Oxy, Oxz y Oxy.

24. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $x+y+z=10,\ x^2+y^2=4,$ y limitada por los ejes $x=0,\ y=0,\ z=0$.

25. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $z=ae^{-x^2-y^2},\ x^2+y^2=R^2,$ y limitada por Oxy.

26. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $x^2+y^2-cz=0,\ x^2+y^2-ax=0,$ y limitada por Oxy.

27. Encontrar el volumen del cuerpo limitado por las curvas $x^2+y^2-4z^2=0,\ x^2+y^2-8x=0,$ y limitada por Oxy.

28. Calcúlese las siguientes integrales dobles:

$$a)\ \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy \right) dx \qquad b)\ \int_0^a \left(\int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \right) dy$$

29. Calcúlese la integral $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-9}dxdy$ donde D es un anillo entre las circunferencias $x^2+y^2=9$ y $x^2+y^2=25$.

30. Calcúlese la integral $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ donde D es un anillo entre las circunferencias $x^2+y^2=ax$ y $x^2+y^2=2ax$.

31. Calcúlese la integral $\iint\limits_D s\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ donde D es un pétalo de la lemniscata $(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)$ y $(x \geq 0)$

32. Calcúlese la integral $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{c^2-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}$ $(c>1)$ donde D está limitada por una elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

12.5. Área de una Superficie en el Espacio

Se toma en consideración una red plana S de ecuación z = f (x, y), donde f (x, y) es una función continua y que posee las derivadas parciales $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$, del cual, su proyección al plano Oxy es el área ’ D ’. Esta área se divide en ’ n ’ partes $\Delta D_1, \Delta D_2, \Delta D_3, \cdots, \Delta D_n$. y al diámetro de cada una de estás divisiones, se lo simboliza con δ_n.

Esta red plana, de la cual, se proyecta al plano Oxy, se obtiene el área ’ D ’, a la cual, se lo denomina red superficial y que está sobre el área ’ D ’. De la existencia de las derivadas continuas, se concluye que, la red superficial posee en cada punto M(x,y,z) un plano tangencial, que cambia en forma continua de punto a punto.
En cada división del área D, se selecciona un punto:

$$(x_1,y_1)\in\Delta D_1,\ (x_2,y_2)\in\Delta D_2,\ (x_3,y_3)\in\Delta D_3,$$
$$(x_4,y_4)\in\Delta D_4,\ \cdots,(x_n,y_n)\in\Delta D_n$$

Estos puntos son proyecciones perpendiculares al plano Oxy de los puntos:

$$M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),\ M_3(x_3,y_3,z_3),$$
$$M_4(x_4,y_4,z_4),\cdots\ M_n(x_n,y_n,z_n).$$

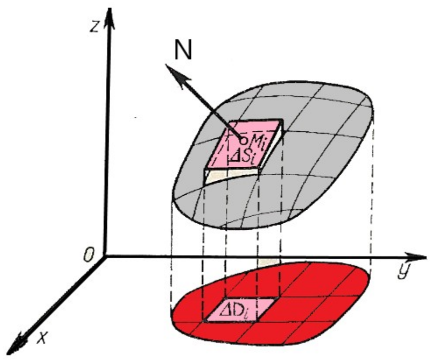


Figura 10.13

Estos puntos, se encuentran en la red plana ’ S ’ de ecuación $z_i=f(x_i,y_i)$ donde $i=1,2,3,\cdots,n$ en cada uno de estos puntos se traza un plano tangencial a la red ’ S ’ y por ΔS_i, es el área de cada elemento, que se ha dividido al plano tangencial, de forma que, su proyección al plano Oxy, sea ΔD_i, donde $i=1,2,3\cdots n$.

Esta división del área de red plana , se lo realiza de tal manera, para que su suma $\sum\limits_i^n \Delta S_i = S$ y además, entre $\Delta S_i\ y\ \Delta D_i$ existe un angulo φ_i; por lo cual, se puede obtener una relación entre estos elementos:

$$\cos(\varphi_i)=\frac{\Delta D_i}{\Delta S_i}\longrightarrow \Delta S_i=\frac{\Delta D_i}{\cos(\varphi_i)}$$

Por cada punto $M_i(x_i,y_i,z_i)\in\Delta S_i$, se puede trazar un plano tangente a la superficie, pero además, se puede trazar un vector perpendicular (N) al plano ΔS_i y que pase por el punto M_i. El vector N es perpendicular a toda recta que pertenezca al plano tangencial, pero hay muchas rectas en el plano

tangencial, se debe encontrar la mejor de ellas, para lo cual, se debe aplicar geometría analítica vectorial.
En este caso, lo que se conoce:

$$z = f(x,y)$$

Esta ecuación, conocida como la ecuación simple de una superficie, se la puede escribir en la forma implícita:

$$z - f(x,y) = 0$$

Y en está caso, se lo puede escribir:

$$f(x,y,z) = z - f(x,y)$$

Es una función de varias variables, por lo que, se recurre a la teoría de este tipo de funciones. Y en este caso, el diferencial de una función de varias variables es:

$$\Delta f(x,y,z) = f_x'(x,y,z)\Delta x + f_y'(x,y,z)\Delta y + f_z'(x,y,z)\Delta z$$

Como es una identidad, se divide para Δt:

$$\frac{\Delta f(x,y,z)}{\Delta t} = f_x'(x,y,z)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y'(x,y,z)\frac{\Delta y}{\Delta t} + f_z'(x,y,z)\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Se toma el limite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta f(x,y,z)}{\Delta t} = f_x'(x,y,z) \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y'(x,y,z) \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + f_z'(x,y,z) \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Lo que permite encontrar:

$$\frac{df(x,y,z)}{dt} = f_x'(x,y,z)\frac{dx}{dt} + f_y'(x,y,z)\frac{dy}{dt} + f_z'(x,y,z)\frac{dz}{dt}$$

Para cumplir la condición de perpendicular, se recuerda el producto punto de dos vectores, este producto tiene que ser igual a cero; por lo tanto, $\dfrac{df(x,y,z)}{dt} = 0$:

$$0 = f_x'(x,y,z)\frac{dx}{dt} + f_y'(x,y,z)\frac{dy}{dt} + f_z'(x,y,z)\frac{dz}{dt}$$

En este caso, se considera que:

$$N[f_x'(x,y,z), f_y'(x,y,z), f_z'(x,y,z)]$$

Son los componentes del vector ’ N ’, que definen la perpendicularidad al plano ΔS_i y:

$$v\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$$

Son los componentes del vector ’ v ’, que definen el paralelismo (tangencial) al plano ΔS_i.

Se ha obtenido una fórmulas para los componentes del vector ’ N ’, esto se aplica a la relación que se tiene:

$$f(x,y,z) = z - f(x,y)$$

$$n_x = f_x'(x,y,z) = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}; \qquad n_y = f_y'(x,y,z) = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$$

$$n_z = f_z'(x,y,z) = 1$$

Ahora, se debe calcular el coseno de teta, en está demostración, se requiere $\cos(\theta_z)$

$$\cos(\theta_z) = \frac{n_z}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Finalmente, se obtiene:

$$\cos(\varphi_i) = \frac{\Delta D_i}{\Delta S_i} \longrightarrow \Delta S_i = \frac{\Delta D_i}{\cos(\varphi_i)} = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + 1}}}$$

$$= \frac{\Delta D_i}{\cos(\varphi_i)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + 1}\ \ \Delta x_i \Delta y_i$$

$$S = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_i^n \frac{\Delta D_i}{\cos(\varphi_i)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_i^n \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos(\varphi_i)} = \iint_D \frac{dxdy}{\cos(\varphi_i)}$$

$$S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + 1}\ \ dxdy$$

$$S = \iint_D \sqrt{(f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2 + 1}\ \ dxdy$$

12.5.1. Ejercicios Resueltos de Área de Superficie.

1. Hállese el área de una parte de la superficie $y^2 + z^2 = 2ax$ que se encuentre entre el $y^2 = ax$ y el plano x = a.

   Primero, se define que tipo de superficie se tiene, la ecuación $y^2 + z^2 = 2ax$, es una paraboloide que se abre con respecto al eje x, se despeja z, que es igual:

   $$z = \sqrt{2ax - y^2}$$

   En el plano Oxy se tiene el dominio, definido por las curvas $y^2 = ax, \quad x = a. \qquad (a > 0)$ Se obtiene las derivadas parciales:

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}}$$

   Se eleva al cuadrado:

   $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}\right)^2, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(-\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}}\right)^2$$

   Se calcula:

   $$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a^2}{2ax - y^2}\right) + \left(\frac{y^2}{2ax - y^2}\right) = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}$$

   Como la función es simétrica, se puede facilitar la integración multiplicando por 4.

   $$\iint_D \left(\sqrt{\frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}}\right) dxdy$$

   Se define los limites de la integración, lo cual, se define en función del dominio:

   $$4\iint_D \left(\sqrt{\frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}}\right) dxdy = 4\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{ax}} \sqrt{\frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}} dy\right) dx$$

$$= 4\int_0^a (\sqrt{2ax+a^2})\left(\int_0^{\sqrt{ax}} \frac{dy}{\sqrt{2ax-y^2}}\right)dx =$$

$$= 4\int_0^a (\sqrt{2ax+a^2})\left(\arcsin\left[\frac{y}{\sqrt{2ax}}\right]_0^{\sqrt{ax}}\right)dx =$$

$$= 4\int_0^a (\sqrt{2ax+a^2})\left(\arcsin\left[\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{2ax}}\right] - \arcsin\left[\frac{0}{\sqrt{2ax}}\right]\right)dx =$$

$$= 4\int_0^a (\sqrt{2ax+a^2})\left(\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] - 0\right)dx = 4\int_0^a (\sqrt{2ax+a^2})\frac{\pi}{4}dx =$$

$$= \pi\int_0^a (\sqrt{2ax+a^2})dx = \frac{\pi}{3a}\left[(\sqrt{2ax+a^2})^3\right]_0^a =$$

$$= \left[\frac{\pi}{3a}\left[(\sqrt{2aa+a^2})^3\right] - \left[(\sqrt{2a0+a^2})^3\right]\right] = \frac{\pi}{3a}\left[\left[(\sqrt{3a^2})^3\right] - \left[(\sqrt{a^2})^3\right]\right]$$

$$= \frac{\pi}{3a}\left[\left[(3\sqrt{3}a^3)\right] - \left[(a)^3\right]\right] = \frac{\pi a^3}{3a}\left[\left[(3\sqrt{3})\right] - 1\right]$$

$$S = \frac{\pi a^2}{3}(3\sqrt{3}-1)$$

2. Hállese el área de una parte de la superficie $2xy = z^2$ que se intersecta con un paralelogramo que se encuentra en el plano Oxy y sus vértices son los puntos A(0,0),B(4,0)C(4,9), D(0,9).

   Se desea calcular el área de superficie que está sobre el plano Oxy, en ese caso $z \geq 0$. El área de integración es el rectángulo. Dicha área de superficie, se la puede calcular por la fórmula :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

   Se obtiene las derivadas parciales, si z = $\sqrt{2xy}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{2y}\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{2x}\frac{1}{2\cdot\sqrt{y}}$$

   Se reemplaza:

$$S = \int_0^9\left(\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{2y}{4x} + \frac{2x}{4y}}\, dx\right)dy = \int_0^9\left(\int_0^4 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\, dx\right)dy =$$

$$= \int_0^9\left(\int_0^4 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\, dx\right)dy = \int_0^9\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\int_0^4\left(\sqrt{x} + \frac{y}{\sqrt{2xy}}\right)\, dx\right)dy =$$

$$= \int_0^9\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\int_0^4\left(\sqrt{x} + \frac{y}{\sqrt{2xy}}\right)\, dx\right)dy = \int_0^9\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + y\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)_{x=0}^{x=4}\right)dy =$$

$$= \int_0^9\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\left(\frac{16}{3} + 4y\right)\right)dy = \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^9 y^{-\frac{1}{2}}dy + 2\sqrt{2}\int_0^9 \sqrt{y}dy =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^9 + 2\sqrt{2}\left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^9 = \left(\frac{8}{3}\cdot 6 + 2\cdot\frac{2\cdot 27}{3}\right)\sqrt{2} = 52\sqrt{2}$$

3. Encontrar el área de superficie del corte de una semiesfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ donde: $z>0$, con un cilindro $x^2+y^2=r^2$ donde $r<R$.

   Las dos figuras tienen su centro en el punto de origen. De la ecuación de la semiesfera, se obtiene:

   $$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

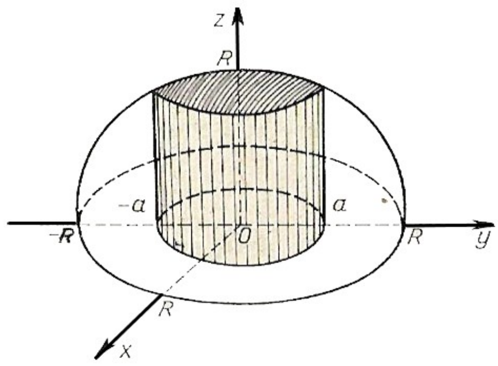
   

   Figura 10.14

   Las derivadas parciales son:

   $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{z}$$

   El área de superficie requerida es:

   $$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=$$

   $$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{z^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}\right)}dxdy=\iint_D \sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z}}dxdy=\iint_D \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

   El dominio D está definido por los parámetros de la circunferencia; por lo cual, se puede determinar los limites de la integración, y por facilidad se transforma a su forma polar, en donde $0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le\rho\le a$

   $$S=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)d\theta=-R\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^a d\theta=-R\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{R^2-a^2}-R\right]d\theta=$$

   $$=-R\left[\sqrt{R^2-a^2}-R\right]\int_0^{2\pi}d\theta=-R\left[\sqrt{R^2-a^2}-R\right][\theta]_0^{2\pi}$$

   $$S=2\pi R\left[a^2-\sqrt{R^2-a^2}\right]$$

4. Calcúlese el área de superficie del corte de un cilindro de radio $\frac{1}{2}r$ y su centro está en el eje x, de una esfera de radio R y su centro en el punto de origen, considere $z>0$

   La ecuación de la esfera es:

   $$x^2+y^2+z^2=R^2\longrightarrow z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

   La ecuación del cilindro que representa al dominio y que cumple con las condiciones del ejercicio es:

   $$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2\longrightarrow x^2-2x\frac{R}{2}+\frac{R^2}{4}+y^2=\frac{R^2}{4}$$
   $$x^2-xR+y^2=0$$

   Las derivadas parciales son:

   $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{z}$$

   El área de superficie requerida es:

   $$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=$$

   $$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{z^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}\right)}dxdy=\iint_D \sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z}}dxdy=\iint_D \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

El dominio D está definido por los parámetros de la circunferencia; por lo cual, se puede determinar los limites de la integración, y por facilidad se transforma a su forma polar, en donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, el valor de ρ se lo obtiene de:

$$x^2 - xR + y^2 = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 = xR$$

$$(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 = R(\rho\cos(\theta)) \longrightarrow \rho^2(\cos^2(\theta)) + \rho^2(\sin^2(\theta)) = R(\rho\cos(\theta))$$

$$\rho^2(1) = x(\rho\cos(\theta)) \longrightarrow \rho = R(\cos(\theta))$$

Por lo tanto, el intervalo de ρ sera: $0 \leq \rho \leq R\cos(\theta)$

$$= \iint\limits_D \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \iint\limits_\Delta \frac{R\rho d\rho d\theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{r\cos(\theta)} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) d\theta$$

$$S = -R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^{r\cos(\theta)} d\theta = -R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{R^2 - (R\cos(\theta))^2} - R \right] d\theta =$$

$$-R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[R\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} - R \right] d\theta = -R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} - 1 \right] d\theta =$$

$$= -R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} - 1 \right] d\theta = -R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [|\sin(\theta)| - 1]\, d\theta =$$

$$= -R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin(\theta)) d\theta - R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta + R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$= -R^2 [\cos(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + R^2 [\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} + R^2 [\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -R^2 \left(\cos(0) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) + R^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right) + R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= -R^2 (1 - (0)) + R^2 (0 - (1)) + R^2 \left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right) \right) =$$

$$-R^2(1) - R^2(1) + R^2\pi = -2R^2 + R^2\pi = R^2(\pi - 2)$$

12.5.2. Ejercicios Propuestos de Área de Superficie.

1. Calcúlese el área de la parte de la superficie $x^2 + z^2 = 1$, la cual, está sobre el plano Oxy y su proyección en el plano Oxy es un triangulo de vértices A(1,0),B(0,1),C(0,0.)
2. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + z^2 = y^2$ que está cortada por el cilindro $y^2 = 2px$ donde $p > 0$
3. Hállese el área de una parte de la superficie $z = \sqrt{xy}$, que se intercepta con un paralelogramo de vértices A(3,0), B(0,6), C(3,6), O(0,0).
4. Calcúlese el área de la parte del plano $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ cortado por los ejes del plano cartesiano.
5. Hállese el área S de un paralelogramo que se encuentra en el plano $x\sqrt{2} + y + z - 2 = 0$ de proyección en el plano Oxy es un cuadrado de vértices: A(1,0), B(0,1), C(1,1), C(0,0).
6. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + y^2 = 2z$ que está cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

7. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $Rz = xy$ que está cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.
8. Hállese el área de una parte de la superficie que se corta con $x^2 + y^2 = 2x$
9. Hállese el área de una parte del plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ que se encuentra entre los ejes del plano cartesiano.
10. Calcúlese el área de la parte de la superficie $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, la cual, está sobre el plano Oxy y su proyección en el plano Oxy es un triangulo de vértices A(2,1),B(2,2),C(0,0.)
11. Calcúlese el área de la parte de la superficie $z = 2xy$, la cual está limitada por los planos $x + y = 1$ x = 0, y = 0.
12. Hállese el área de superficie de un cono $x^2 - y^2 = z^2$ limitada por los ejes del plano cartesiano y el plano $y + z = a$

12.6. Aplicaciones de Integrales Dobles

La principal aplicación de integrales dobles, es el cálculo de centros de gravedad de cuerpos planos y regulares. En el caso de cuerpos no-planos y no-regulares, se recomienda aplicar integrales triples, que en muchos casos facilita el calculo de estos centros de gravedad. En cualquiera de los dos casos, con cuerpos regulares o no, el procedimiento es muy parecido.

El centro de gravedad de un cuerpo es el punto respecto al cual, las fuerzas de gravedad que ejerce sobre los diferentes puntos materiales, que constituyen el cuerpo, producen un momento resultante nulo, por lo tanto, es un punto de equilibrio.

El centro de gravedad está muy relacionado con lo que se ha llamado, momento de las fuerzas. Cuanto menor es la distancia del centro de gravedad al centro de la estructura, mucho más fácil será resistir la fuerza, que se sobrepone en el cuerpo. Algo que, se puede aplicar incluso en la vida diaria de cada persona; así como, en la practica de muchos deportes, su conocimiento permite perfeccionar el deporte practicado .

Al cuerpo se lo divide en ’ n ’ partes, en tal forma que $\sum_{i}^{n} A_i = A$, nos de el cuerpo que se analiza. Se considera un punto cualquiera A_i, este punto estará en el plano cartesiano; por lo tanto, estará definido por un par ordenado $A_i(x_i, y_i)$.
Cada punto tendrá una masa m_i y la suma de estás masas, de cada uno de estos puntos, nos da la masa del cuerpo; es decir, $\sum_{i}^{n} m_i = M$. Se analiza un punto del cuerpo, sobre el cual actúa una fuerza F_i, el momento con respecto al eje y, se lo calcula por medio de $M_{y_i} = m_i \cdot x_i$

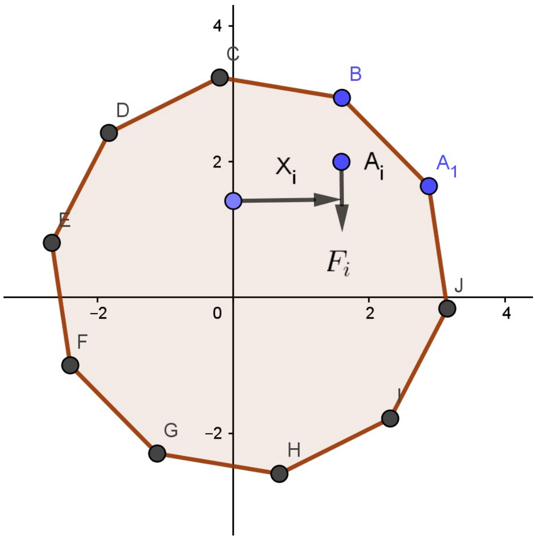


Figura 10.15

Se desea encontrar el momento que producen todas los puntos del cuerpo con respecto al eje y; por lo tanto:

$$M_y = \sum_{i}^{n} M_{y_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \cdots + m_n \cdot x_n$$

Este momento es igual a la suma de los productos de su masa correspondiente y por su respectiva relativa distancia al eje y.

En forma idéntica, se obtiene un momento con respecto el eje x:

$$M_x = \sum_{i}^{n} M_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \cdots + m_n \cdot y_n$$

Al considerar la distancia relativa, significa que, se debe tomar encuenta el lugar del cuadrante, en el cual, está el punto A_i.

Para determinar el momento estático del cuerpo, por la distribución de la masa del cuerpo y este a su vez por la masa de cada punto. Además, si es en forma continua (homogénea o uniforme) con respecto a la densidad de área del cuerpo (también se la puede definir como, densidad superficial) $\delta(x,y)$; por lo tanto:

$$\delta(x_i,y_i) = \frac{m_{area}}{Area} = \frac{m_i}{area_i}$$

Por lo tanto, la masa de una partícula (punto) aproximadamente sera igual:

$$\delta(x_i,y_i) = \frac{m_{area}}{Area} = \frac{m_i}{area_i} \longrightarrow m_i = \delta(x_i,y_i)\cdot Area$$

En base a lo cual, se puede escribir:

$$M_x = \sum_{i}^{n} M_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot y_i = \sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\cdot Area_i\cdot y_i =$$

$$M_y = \sum_{i}^{n} M_{y_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot x_i = \sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\cdot Area_i\cdot x_i$$

En ambos casos el área, se la puede definir como el producto de $Area = \Delta x\cdot\Delta y$ y en ese caso, se tendría:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\cdot Area_i\cdot y_i = \sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot y_i$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\cdot Area_i\cdot x_i = \sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot x_i$$

En este análisis, se debe reducir el error que se produce al dividir el cuerpo en ' n ' partes; por lo tanto, se debe tomar el limite cuando ' n ' tiende al infinito y en ese momento $\Delta x \approx dx \ \ ,\Delta y \approx dy$, gracias a lo cual, se puede escribir la doble integral:

$$M_x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot y_i = \iint_D y\delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot$$

$$M_y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot x_i = \iint_D x\delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot$$

El centro de gravedad de un cuerpo, se lo define como el punto $S(\xi,\eta)$ en el cual, se concentra toda la masa del cuerpo y tiene un mismo momento estático, con relación a cada eje del plano cartesiano, que todo el cuerpo.

Lo que significa:

$$M\cdot\xi = M_y \longrightarrow \xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot}{M} = \frac{\iint_D x\delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot}{\iint_D \delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot}$$

$$M\cdot\eta = M_x \longrightarrow \eta = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot}{M} = \frac{\iint_D y\delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot}{\iint_D \delta(x_i,y_i)\cdot dx\cdot dy\cdot}$$

En el momento, en el cual, se considere que, el cuerpo es uniforme o homogéneo, en ese instante, se puede definir que $\delta(x_i,y_i) = 1$

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x dx\cdot dy\cdot}{\iint_D dx\cdot dy}, \qquad \eta = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\cdot dx\cdot dy\cdot}{\iint_D dx\cdot dy}$$

12.6.1. Ejercicios Resueltos de Centro de Gravedad

1. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de la placa homogénea limitada por las curvas $ay = x^2$, x + y = 2a ($a > 0$) Primero, se encuentra los puntos de intersección M_1, M_2; por lo tanto, se forma un sistema:

$$\begin{cases} x+y &= 2a \\ ay &= x^2 \end{cases}$$

Se obtiene los puntos de intersección de las figuras que son: $M_2 = (a,a)$, $M_1(-2a,4a)$ Se calcula, el momentos estático: M_x:

$$M_x = \iint_D y\,dx\,dy = \int_{-2a}^{a}\left(\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-2a}^{a}\left(\frac{1}{2}\left((2a-x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(2a-x)^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)_{-2a}^{a} = \frac{36}{5}a^3$$

$$M_y = \iint_D x\,dx\,dy = \int_{-2a}^{a}\left(\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy\right)x\,dx =$$

$$= \int_{-2a}^{a}\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right)x\,dx =$$

$$= \left[ax^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right]_{a}^{-2a} = -\frac{9}{4}a^3$$

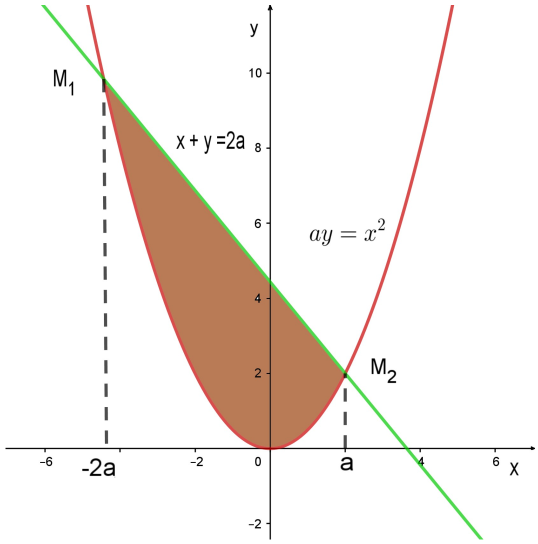


Figura 10.16

$$M = \iint_D dx\,dy = \int_{-2a}^{a}\left(\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy\right)dx = \int_{-2a}^{a}\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{5a^2}\right)_{-2a}^{a} = \frac{9}{2}a^2$$

Finalmente:

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{-\dfrac{9a^3}{4}}{\dfrac{9a^2}{2}} = -\frac{a}{2}, \qquad \eta = \frac{M_x}{M} = \frac{\dfrac{36a^3}{5}}{\dfrac{9a^2}{2}} = \frac{8a}{5}$$

Como se puede apreciar al aplicar integrales dobles, para el calculo de centro de gravedad de cuerpos, definidos como placas, o de cuerpos no muy gruesos, es mas agradable, rápido y en algunos casos mucho mas sencillo, que el aplicar propiedades de integrales simples; por lo tanto, el estudiante debe valorar este método aplicando integrales doble.
Además, se debe tener en cuenta que, en los ejercicios se considera que la densidad del cuerpo es uniforme, con lo cual facilita el calculo del centro de gravedad de cuerpos no muy gruesos, en la practica no siempre se cumple esta condición.
Esta conclusión, también se debe tener en cuenta para cuerpos gruesos; así como, para el calculo del centro de gravedad de cuerpos en tres ejes.

2. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de la cuarta parta de una elipse, suponiendo que su densidad es uniforme.

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

las fórmulas a aplicar:

$$x_c = \xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x dx \cdot dy \cdot}{\iint\limits_D dx \cdot dy},$$

$$y_c = \eta = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y \cdot dx \cdot dy \cdot}{\iint\limits_D dx \cdot dy}$$

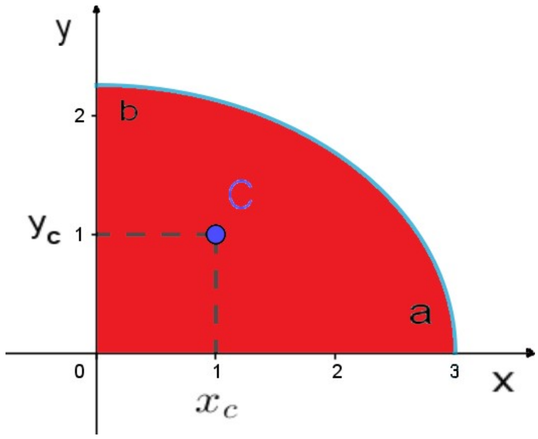


Figura 10.17

$$M = \iint\limits_D dxdy = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx = \int_0^a \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \right) dx = \frac{b}{a} \int_0^a \left(\sqrt{a^2-x^2} \right) dx$$

$$= \frac{b}{a} \int_0^a \left(\sqrt{a^2-x^2} \right) dx = \frac{b}{a} \left[\frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} \right]_0^a = \frac{ab\pi}{4}$$

$$M_x = \iint\limits_D ydxdy = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy \right) dx = \int_0^a \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 (a^2-x^2)}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^a b^2 dx - \int_0^a \frac{b^2}{a^2} x^2 dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(b^2 a - \frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3} \right) = \frac{1}{2}\left(b^2 a - \frac{b^2 a}{3} \right) = \frac{ab^2}{3}$$

$$M_x = \frac{ab^2}{3}$$

$$M_y = \iint\limits_D xdxdy = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) xdx = \int_0^a \left(\frac{b}{a} \right) \sqrt{a^2-x^2} xdx =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{-1}{3} \right) \left[(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{-1}{3} \right) \left[(-a^3) \right] = \frac{a^2 b}{3}$$

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{a^2 b}{3}}{\frac{ab\pi}{4}} = \frac{4a}{3\pi}, \qquad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{ab^2}{3}}{\frac{ab\pi}{4}} = \frac{4b}{3\pi}$$

3. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las curvas $y^2 = 4x + 4,\ \ y^2 = -2x + 4$

$$M = \iint_D dxdy = 2\int_0^2 \left(\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx \right) dy =$$

$$= 2\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4} \right) dy =$$

$$2\int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{4} \right) dy =$$

$$6\left[y - \frac{1}{12}y^3 \right]_0^2 = 8$$

$$M_y = \iint_D xdxdy = 2\int_0^2 \left(\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} xdx \right) dy =$$

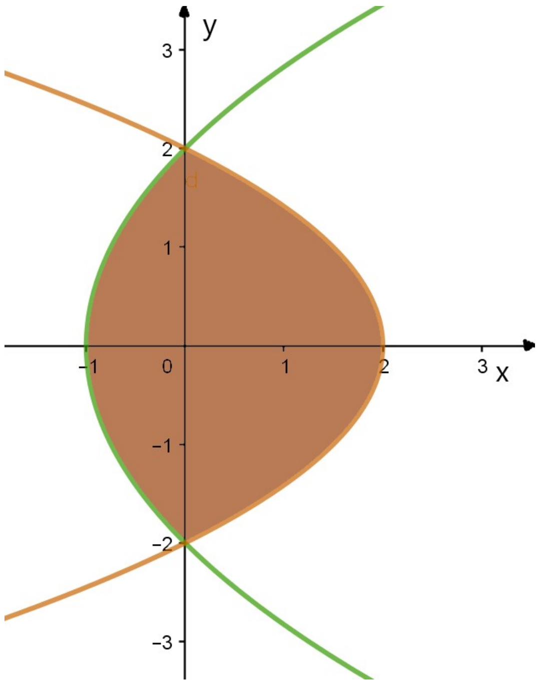


Figura 10.18

$$= \int_0^2 \left(\frac{(4-y^2)^2}{4} - \frac{(y^2-4)^2}{16} \right) dy = \int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{2} + \frac{3y^4}{16} \right) dy$$

$$= \left(3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3y^5}{80} \right)_0^2 = \frac{16}{5}$$

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{16}{8 \cdot 5} = \frac{2}{5}, \qquad y_c = \frac{M_x}{M} = 0$$

$y_c = 0$, ya que la figura es simétrica con respecto al eje ' x '. Si el estudiante no observa esta relación, es aconsejable que compruebe este valor.

12.6.2. Ejercicios Propuestos de Centro de Gravedad

1. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$.
2. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por la cardiode $\rho = a(1+\cos\theta)$.
3. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del semisegmento de la parábola $y^2 = ax$ cortada por la recta x = a, y = 0 $(y > 0)$.
4. Hállese las coordenadas del centro de gravedad las coordenadas del área limitada por las curvas $y^2 = x$, $y = x^2$.
5. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por las curvas $y = \sqrt{2x-x^2}, y = 0$.
6. Hállese la masa de una placa cuadrada de lado a, cuya densidad en un punto cualquiera es proporcional al cuadrado de la distancia entre este punto uno de los vértices del cuadrado.
7. Hállese la masa de una placa circular de radio r si su densidad es inversamente proporcional a la distancia entre un punto y es igual a δ. en el borde de la placa.
8. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de la superficie de un arco de cicloide $x = a(t - \sin(t)), y = a(1-\cos(t))$
9. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de la de la mitad superior del circulo $x^2 + y^2 = a^2$

10. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por las curvas $y^2 = ax,\ y = x$.

11. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por las curvas $y^2 = 8ax,\ xy = a^2, x = 2a$

12. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por la cardiode $\rho = a\cos 2\theta$.

13. Hállese la masa de una placa que tiene forma de un triangulo rectángulo con catetos OB = a y OA = b, si la densidad en cualquier punto es igual a la distancia del punto al cateto OA.

14. Hállense los momentos estáticos respecto a los ejes OX y Oy de la figura homogénea limitada por la cardiode r = $a(1+\cos\theta)$.

15. Hállense los momentos estáticos respecto a los ejes OX y Oy de una figura homogénea limitada $y = \sin(x)$ y la recta que pasa por el punto de origen y el punto $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

16. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

12.7. Integrales Triples

12.7.1. Integral Triple, Interpretación Geométrica

En forma parecida, como en el caso de un conjunto plano, la cercanía a un punto $M(x_0, y_0, z_0)$ en un conjunto espacial V, se denomina al interior de una esfera de centro, el punto M_0, de radio $R(R > 0)$ cuya distancia ρ, desde M_0 es menor a R.

Un dominio espacial V, se denomina dominio uniforme espacial; si para todo conjunto espacial limitado, todo su contorno se encuentra en V; es decir, pertenece a V. Un dominio espacial V, se denomina dominio uniforme superficial, si para todo curva cerrada (sin puntos comunes), se encuentra completamente en el interior de V.

Un dominio regular, se denomina dominio limitado, si su contorno se puede dividir en un número finito de superficies de ecuaciones dadas:

$$z = z(x,y), \qquad y = y(z,x) \qquad x = x(y,z)$$

Las proyecciones de estás superficies a su respectivo plano de coordenadas, son dominios planos regulares.
Un dominio normal con respecto el plano Oxy, se denomina al conjunto Ω de todos los puntos M(x,y,z) de los cuales, sus proyecciones $M^*(x,y)$ al plano Oxy pertenecen a cierto definido, cerrado dominio regular plano D, y sus coordenadas cumplen con la desigualdad:

$$\psi(x,y) \leq z \leq \varphi(x,y)$$

En donde, las funciones $\psi(x,y)\ y\ \varphi(x,y)$ son continuas en D y además, la función $\psi(x,y)$ es menor que la función $\varphi(x,y)$ en el interior de D. Ver figura 10.19.

De la definición dada, resulta que, al trazar una recta paralela al eje Oz, está atraviesa en cualquier punto interior del dominio regular con respecto al plano Oxy, atraviesa el contorno de la sección en exactamente en dos puntos.
En forma parecida, se define el dominio normal con respecto el plano Oyz; así como, el dominio normal con respecto al plano Ozx. Por ejemplo, la esfera tiene un dominio normal con respecto a cada uno de los planos cartesianos.

El dominio normal, es como resultado de la definición, un dominio cerrado regular; así como, un dominio uniforme espacial y de superficie.

12.7.2. La Integral Triple

Si Ω es un dominio regular o un dominio regular cerrado. Si f(x,y,z) es una función limitada en Ω y además, se define por A a un punto de coordenadas (x,y,z). La terminología de la función f(x,y,z) , en forma corta, es f(A).

Si P es un cubo (de paredes paralelas a los planos cartesianos), que se encuentra en Ω. Si π_n significa una libre distribución de los cubos, en un número finito $\overline{m_k}$ de cubos parciales, de los cuales

$m_n : P_1^n, P_2^n, P_3^n, \cdots, P_{m_n}^n$, contiene puntos del dominio Ω. Se simboliza por Δv_i^n el volumen del cubo P_i^n y por δ_n la mayor distancia de los catetos de los cubos $P_1^n, P_2^n, P_3^n, \cdots, P_{m_n}^n$. Si por A_i^n se simboliza a un punto cualquiera en el dominio Ω, que pertenece al cubo P_i^n. Si por s_n se simboliza a la suma definida por el producto de $f(A_i^n)\cdot\Delta v_i^n$; es decir:

$$s_n = \sum_{i=1}^{m_n} f(A_i^n)\cdot\Delta v_i^n$$

Si para todo tipo de sucesión de $\{\pi_n\}$, para lo cual, $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$, la sucesión s_n es convergente al mismo número, sin importar la forma de selección de los puntos A_i^n, en este caso, se dice que, la función f(x,y,z) se integra en el dominio Ω y el limite común de las sucesiones s_n, se denomina la integral triple de la función f(x,y,z) en el dominio Ω y su símbolo es:

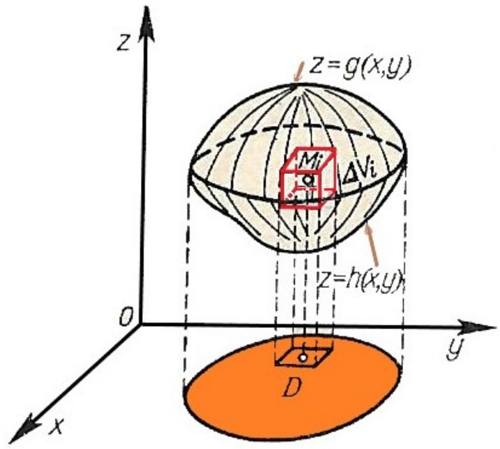


Figura 10.19

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \qquad o \qquad \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

se puede demostrar que, la integración de la función f(x,y,z) en el dominio Ω y que el valor de la integral no depende de la selección del tipo de cubo P (solamente debe estar en el dominio Ω).

Toda función continua en el dominio Ω, es en el, integrable. Sin embargo, se debe tener en cuenta, que la función f(x,y,z) debe estar limitada en todo el dominio Ω. En el caso de que la función f(x,y,a) sea igual a uno 1:

$$|\Omega| = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$$

Donde $|\Omega|$ significa el volumen del dominio Ω.

La integral triple tiene la siguiente interpretación: si el dominio es normal Ω y es definido por puntos de cierto cuerpo C, y la función f(x,y,z) significa la densidad puntual del cuerpo C, entonces, la integral $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ representa la masa del cuerpo C.

12.8. Propiedades de Integrales Triples

Se considera que los conjuntos que aparecen en las fórmulas son dominios regulares, cerrados o no y las funciones definidas en ellas son continuas y limitadas. En ese caso, estás propiedades son verdaderas:

1. $\iiint\limits_{\Omega} Kf(x,y,z)dxdydz = k\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ k - constante
2. $\iiint\limits_{\Omega}(f(x,y,z)+g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dxdydz$
3. Si los dominios $\Omega_1 \;\; y \;\; \Omega_2$ no tienen puntos internos comunes; entonces:

$$\iiint\limits_{\Omega_1+\Omega_2} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dxdydz$$

12.9. Cambio de Integral Triple a una Integral Reiterada

Si Ω es un dominio espacial normal con relación al plano Oxy y si existen dos funciones $z = \varphi(x,y)$ y $z = \psi(x,y)$ que son continuas en un dominio plano regular D y que el dominio espacial Ω es el conjunto de puntos P(x,y,z) y sus coordenadas cumplen las condiciones:

$$(x,y)\in D, \qquad \psi(x,y)\leq z\leq \varphi(x,y)$$

En forma similar , se define el dominio normal con respecto a los planos Oyz o Ozx. De la definición de dominio normal, resulta que, es un dominio regular cerrado. Y si además , la función f(x,y,z), es continua en el dominio Ω, el cual es normal con respecto al plano Oxy, la integral triple existe y se la puede representar por la fórmula:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D}\left(\int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

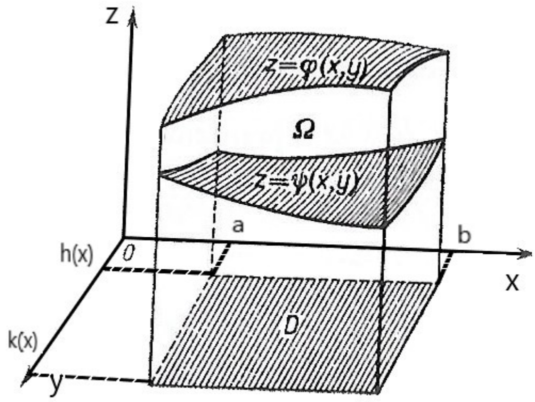


Figura 10.20

La fórmula escrita, para el cálculo de una integral triple se transforma en el cálculo de una integral doble y dos integrales unitarias.
Y si además, el dominio plano D es igual una región normal, con respecto al eje Ox y está definida por las desigualdades:

$$a\leq x\leq b, \qquad h(x)\leq y\leq k(x)$$

Por lo tanto, se aplica el cambio de una integral doble en dos unitarias y ; por lo tanto, se obtiene la fórmula:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int\limits_{a}^{b}\left[\int\limits_{h(x)}^{k(x)}\left(\int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx$$

Esta fórmula, nos indica, que si el dominio Ω es normal con respecto al plano Oxy, a su proyección del Dominio Ω al plano Oxy, es decir, el dominio plano D es normal con respecto del eje Ox. La primero integral, se integra con respecto la variable z (las dos restantes variables son constantes), a los limites de integración son funciones con respecto x e y. La segunda integral, es con respecto la variable y (la variable x se considera constante), y sus limites de integración son funciones con respecto a la variable x. La tercera integral, se lo realiza con respecto la variable x y sus limites de integración son constantes.

Esta notación, en algunos casos, se lo escribe sin los paréntesis:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int\limits_{a}^{b} dx\int\limits_{h(x)}^{k(x)} dy\int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)dz$$

En forma similar, se obtienen fórmulas cuando el dominio Ω es normal con respecto a los demás planos cartesianos.

Si Ω está definido por lineas perpendiculares a los ejes; es decir, es un paralelogramo, un cubo, definido con las desigualdades:

$$a\leq x\leq b, \qquad c\leq y\leq d, \qquad e\leq z\leq f$$

La función f(x,y,z) es continua en el dominio Ω.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv =$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx$$

Este es el caso, en el cual el orden de integración es indiferente, en cualquier orden que se considere los limites de integración el resultado sera el mismo.

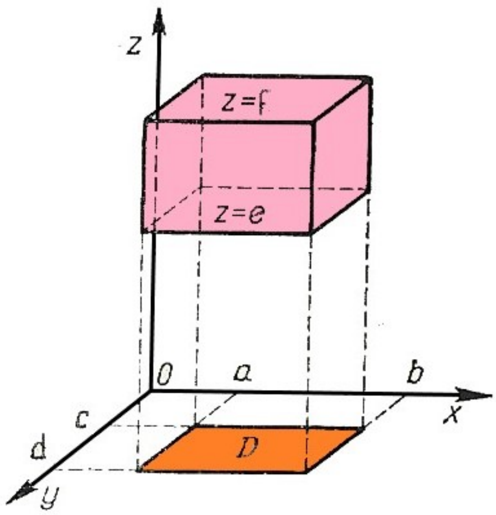


Figura 10.21

12.10. Cambio de Variables Cartesianas a Coordenadas Esféricas o Cilíndricas de una Integral Triple

En el caso de cambio de variables en una integral triple, intervienen las mismas propiedades y teoremas que en el cambio de variables en una integral doble.
En el caso de una integral triple, existen dos casos particulares en el cambio de variables, que son:

1. Cambio de variables de un sistema cartesiano a un sistema esférico.
2. Cambio de variables de un sistema cartesiano a un sistema cilíndrico.

Las relaciones entre las coordenadas cartesianas (x,y,z) y las coordenadas esféricas (ρ, θ, φ), se las obtiene rápidamente al observar la figura 10.22, en base a los tres triángulos rectángulos que aparecen: ΔORQ, ΔOPQ, ΔOPT.
En el triangulo ΔORQ :

$$\sin\varphi = \frac{QR}{OQ} = \frac{y}{OQ} \longrightarrow y = OQ \cdot \sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{OR}{OQ} = \frac{x}{OQ} \longrightarrow x = OQ \cdot \cos\varphi$$

En el triangulo ΔOQP :

$$\cos\psi = \frac{OQ}{\rho} \longrightarrow OQ = \rho \cdot \cos\psi$$

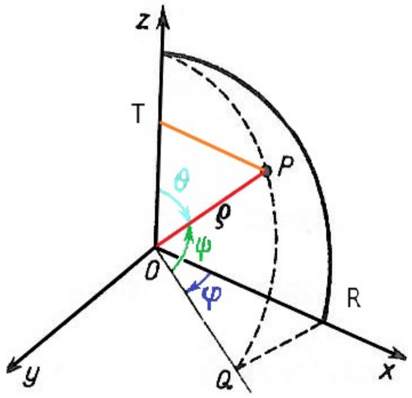


Figura 10.22

Se reemplaza OQ:

$$y = OQ \cdot \sin\varphi \longrightarrow y = \rho \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi$$
$$x = OQ \cdot \cos\varphi \longrightarrow x = \rho \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi$$

La figura 10.22 también nos indica que: $\theta + \varphi = 90°$; por lo tanto, son ángulos complementarios, si es así;

$$\sin\theta = \cos\psi$$

Finalmente:

$$y = \rho \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi \longrightarrow y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$
$$x = \rho \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi \longrightarrow x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

En el triangulo ΔOPT, se obtiene:

$$\cos\theta = \frac{OT}{\rho} = \frac{z}{\rho} \longrightarrow z = \rho \cdot \cos\theta,$$

Para cada punto del plano cartesiano se lo representa en su forma polar esférica y en ese caso, se tendría:

$$(x,y,z) \longrightarrow (\rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ \rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ \rho\cdot\cos\theta,)$$

Ya, se está en condiciones de obtener el valor del determinante de Jacobiano:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}\neq 0$$

Se obtiene las derivadas parciales y se reemplaza, en el determinante:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cdot\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}=\rho^2\cdot\sin\theta$$

Para obtener la valor del determinante de Jacobiano, lo mejor es aplicar propiedades de determinantes. El valor del determinante dependiendo de que angulo se tome en cuenta , ver fig.10.22, puede estar expresado:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\rho^2\cdot\sin\theta \quad J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\psi,\varphi)}=\rho^2\cdot\cos\psi$$

Ya con el valor de Jacobiano, se puede cambiar de las variables cartesianas (x,y,z) a las variables polares (ρ,ψ,φ).
En el primer caso, se tiene la expresión:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(\rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ \rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ \rho\cdot\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

En el segundo caso, se tiene la expresión:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(\rho\cdot\cos\psi\cdot\cos\varphi,\ \rho\cdot\cos\psi\cdot\sin\varphi,\ \rho\cdot\sin\psi)\rho^2\cos\psi d\rho d\psi d\varphi$$

En el caso, de que el cuerpo analizado sea no-esférico se aplica las coordenadas cilíndricas; es decir, de las coordenadas cartesianas (x,y,z) a las coordenadas cilíndricas (ρ,θ,z), se las obtiene rápidamente las relaciones de cambio, ver la figura 10.23, en base al triángulo rectángulo: ΔORQ,

$$\sin\varphi=\frac{RQ}{OQ}=\frac{y}{\rho}\longrightarrow y=\rho\sin\varphi$$

$$\cos\varphi=\frac{OR}{OQ}=\frac{x}{\rho}\longrightarrow x=\rho\cos\varphi$$

$$z=z$$

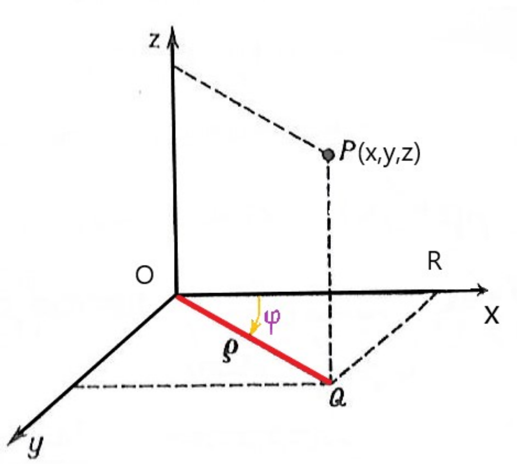


Figura 10.23

Para cada punto del plano cartesiano, se tendría:

$$(x,y,z)\longrightarrow(\rho\cdot\cos\varphi,\ \rho\cdot\sin\varphi,\ z)$$

El valor de Jacobiano es ρy el cambio de variables es igual a:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(\rho\cdot\cos\varphi,\ \rho\cdot\sin\varphi,\ z)\rho\cdot d\rho d\varphi dz$$

12.10.1. Ejercicios Resueltos de Integrales Triples

1. Hállese el valor de:

$$J = \iiint_{\Omega} (x+y+z)dxdydz$$

Si el dominio Ω está limitado por los planos : x = 0, x = 1; y = 0, y = 1; z = 0, z = 1. En el ejercicio, se tiene que la función f(x,y,z) = x + y + z y el dominio Ω es un cubo, sus catetos son paralelas a los ejes del plano cartesiano, definidos con las desigualdades:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

Por lo tanto; se tiene:

$$J = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 (x+y+z)dz \right] dy \right] dx$$

Primero, se integra , la integral interna:

$$= \int_0^1 (x+y+z)dz = \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} = \left(x+y+\frac{1}{2} \right)$$

Se reemplaza:

$$= \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x+y+\frac{1}{2} \right) \right] dy \right] dx$$

La segunda integral interna, se integra:

$$= \int_0^1 \left(x+y+\frac{1}{2} \right) dy = \left[\left(x+\frac{1}{2} \right) y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x+1$$

Se reemplaza:

$$J = \int_0^1 (x+1)dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. Hállese el valor de:

$$J = \iiint_{\Omega} (1-x)yzdxdydz$$

Si el dominio Ω está limitado por la ecuación x + y+ z = 1 y $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
La función f(x,y,z) = (1- x)yz, lo que indica que , que el dominio espacial Ω es normal con respecto el plano Oxy. La coordenada desde cualquier punto del dominio es:

$$0 \leq z \leq 1-(x+y)$$

La proyección del dominio Ω sobre el plano Oxy es el dominio plano D y se lo puede definir por las desigualdades:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1-x$$

En función de lo definido, se escribe la integral triple:

$$J = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-(x+y)} (1-x)yzdz \right] dy \right] dx$$

Se calcula la integral interna en función de la variable z, tratando a las demás variables como constantes:

$$= \int_0^{1-(x+y)} (1-x)yzdz = \left[\frac{(1-x)yz^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-(x+y)} =$$

$$= \frac{(1-x)y}{2}\left[z^2\right]_0^{1-(x+y)} = \frac{(1-x)y}{2}\left[1-(x+y)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(1-x)y(1-x-y)^2dy\right]dx$$

Se integra la integral interna:

$$= (1-x)\int_0^{1-x}\left[y(1-x)^2-2(1-x)y^2+y^3\right]dy =$$

$$= (1-x)^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} - 2(1-x)^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} + (1-x)\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x} =$$

$$= \frac{(1-x)^5}{2} - \frac{2}{3}(1-x)^5 + \frac{1}{4}(1-x)^5 = \frac{(1-x)^5}{12}$$

Finalmente:

$$J = \frac{1}{24}\int_0^1(1-x)^5dx = -\frac{1}{24\cdot 6}\left[(1-x)^6\right]_0^1 = \frac{1}{144}$$

3. Hállese la masa M de un prisma $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$, si la densidad en un punto (x,y,z) es igual a $\delta(x,y,z) = x+y+z$

   En la interpretación de la integral triple, se sabe, que la masa $M = \iiint\limits_{\Omega}\delta(x,y,z)dxdydz$; por lo tanto:

$$M = \iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$$

   El dominio está definido por las desigualdades; $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$

$$M = \int_0^a\left[\int_0^b\left[\int_0^c(x+y+z)dz\right]dy\right]dx$$

   Se integra la integral interna (con respecto a z):

$$\int_0^c(x+y+z)dz = \left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_0^c = xc+yc+\frac{c^2}{2}$$

   Se reemplaza y se integra con respecto y:

$$\int_0^b\left(xc+yc+\frac{c^2}{2}\right)dy = \left[cxy+\frac{cy^2}{2}+\frac{c^2y}{2}\right]_0^b = bcx+\frac{cb^2}{2}+\frac{c^2b}{2}$$

   Finalmente, se integra con respecto a x:

$$\int_0^a\left(bcx+\frac{cb^2}{2}+\frac{c^2b}{2}\right)dx = \left[\frac{bcx^2}{2}+\frac{cb^2x}{2}+\frac{c^2bx}{2}\right]_0^a = \frac{a^2bc}{2}+\frac{ab^2c}{2}+\frac{abc^2}{2} = \frac{abc}{2}(a+b+c)$$

   La masa del prisma es igual a $M = \dfrac{abc}{2}(a+b+c)$

4. Calcule la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} x dxdydz$, si el dominio está limitados por los ejes del plano cartesiano y el plano $2x+2y+z-2=0$.
La variable z tiene los limites de integración $0 \le z \le 2-2x-2y$, lo que permite:

$$\iiint\limits_{\Omega} x dxdydz = \iint\limits_{D}\left[\int_{0}^{2-2x-2y} x dz\right] dxdy =$$

Donde D es el área limitada por los ejes del plano cartesiano, ya que es la proyección del dominio Ω en el plano Oxy y sus limites de integración serian:

$$0 \le y \le 1-x$$

$$= \iint\limits_{D} x(2-2x-2y)dxdy =$$

$$= \int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1-x}(2x-2x^2-2xy)dy\right]dx =$$

$$= \int_{0}^{1}\left[2xy-2x^2y-xy^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int_{0}^{1}\left[(2x(1-x)-2x^2(1-x)-x(1-x)^2)\right]dx =$$

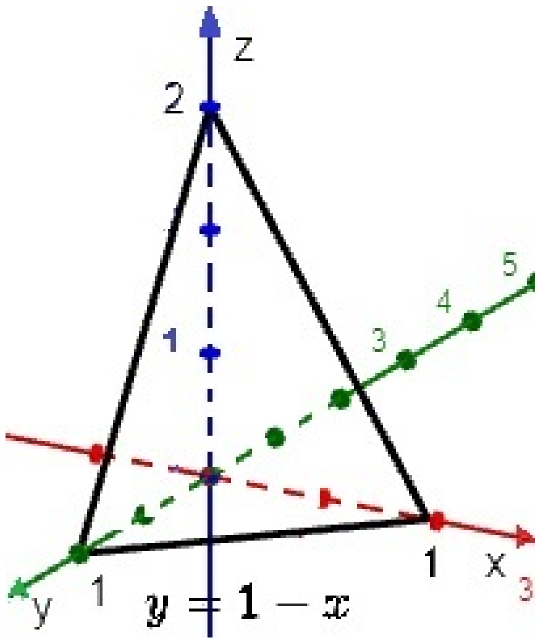


Figura 10.24

$$= \int_{0}^{1-x}(x^3-2x^2+x)dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

5. Calcule la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, si el dominio está limitado por los planos del plano cartesiano y el plano $x+y+z=1$.

Como ninguna de las variables se diferencia entre ellas, el orden de integración es indiferente. La variable z tiene los limites de integración $0 \le z \le 1-x-y$.

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} =$$

$$= \int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1-x}\left[\int_{0}^{1-x-y}\frac{dz}{(x+y+z+1)^3}\right]dy\right]dx =$$

Se comienza la integración por la integral interna:

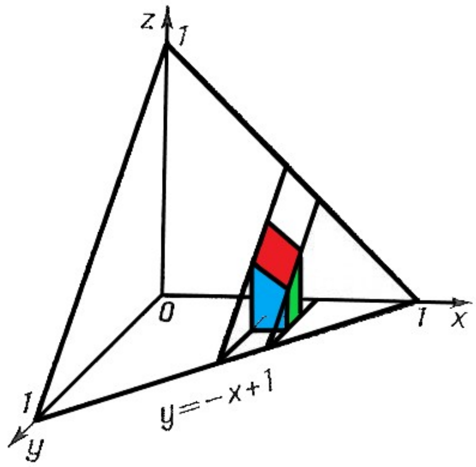


Figura 10.25

$$= \int_{0}^{1-x-y}\frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2(x+y+1)^2}$$

Se integra la integral con respecto y:

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1-x}\left[\frac{1}{(x+y+1)^2}-\frac{1}{4}\right]dy = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x+y+1}-\frac{y}{4}\right]_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1-x}{4}+\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{1+x}\right)$$

Finalmente, la ultima integral:

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(-\frac{3}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{8}+\ln(1+x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$$

6. Calcule la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, si el dominio Ω está limitados por $x^2+y^2+z^2=z$.

Se desarrolla la ecuación, aplicando el método canónico para la expresión del dominio:

$$x^2+y^2+z^2 = z \longrightarrow x^2+y^2+z^2-z = 0$$

$$x^2+y^2+z^2-2\cdot\frac{z}{2} = 0 \longrightarrow x^2+y^2+z^2-2\cdot\frac{z}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0$$

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} = 0 \longrightarrow x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = (\frac{1}{2})^2$$

La información que da la ultima ecuación obtenida, es que, se tiene una esfera de centro $C(0,0,\frac{1}{2})$ y de radio $R=\frac{1}{2}$.
Por la estructura de la función f(x,y,z) y del dominio indica en forma clara, que el cambio de variables seria la mejor opción para resolver el ejercicio.
La figura 10.26, se observa claramente los limites de las variables ρ,θ,φ:

$$0\leq\varphi\leq 2\pi, \qquad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},$$

$$0\leq\rho\leq\cos(\theta)$$

En este caso, se tiene que el valor del determinante de Jacobiano es $\rho^2\sin(\theta)$ $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$, en base a la fórmula de cambio de variable, su estructura es:

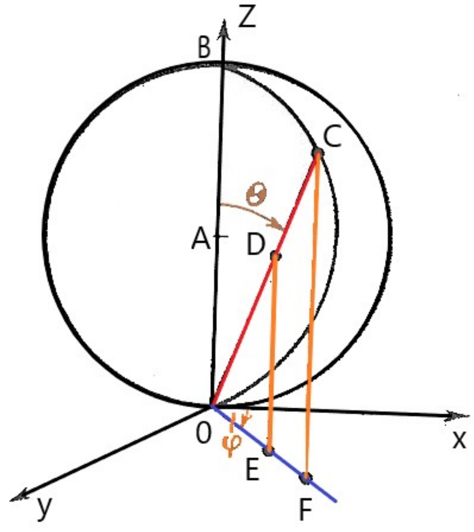


Figura 10.26

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint\limits_{\Psi}\rho^3\sin(\theta)d\rho d\theta d\varphi$$

En este caso, se observa que dos variables tienen valores constantes φ y θ, la tercera variable depende de $\cos(\theta)$ eso indica, que es la primera que se debe integrar; por lo tanto, es la integral interna:

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int_{0}^{2\pi}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{0}^{\cos(\theta)}\rho^3\sin(\theta)d\rho\right)d\theta\right]d\varphi$$

La integral interna:

$$\left(\int_{0}^{\cos(\theta)}\rho^3\sin(\theta)d\rho\right) = \left[\frac{\rho^4\sin\theta}{4}\right]_0^{\cos\theta 0} = \frac{1}{4}\cos^4\theta\cdot\sin\theta$$

Se reemplaza y se integra La segunda integral:

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos^4\theta\cdot\sin\theta\right)d\theta\right]d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{20}\cos^5\theta\right]_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$-\frac{1}{20}\int_0^{2\pi}\left(\cos^5(2\pi)-\cos^5(0)\right)d\varphi=\frac{1}{20}\int_0^{\frac{1}{2}}d\varphi=\frac{1}{20}\left[\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{10}$$

7. Calcule la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, si el dominio Ω está limitados por $x^2+y^2=z^2,\ \ z=1$.

La ecuación $x^2+y^2=z^2$ representa una figura cónica circular, para todo valor $z=c\neq 0$ su directriz que se encuentra en el plano Oxz tiene por ecuación z = x y z = -x; por lo tanto, son bisectrices entre los ejes cartesianos OX y Oz, en forma similar es la directriz en el plano Ozy que tiene por ecuación z = y y z = -y.
La figura representa el dominio Ω en un octavo del plano cartesiano; es decir, para $x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z\geq 0$.

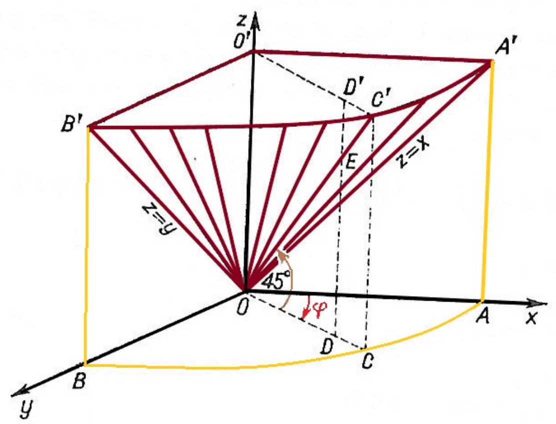


Figura 10.27

La estructura de la integral; así como, de la superficie, se ve la necesidad de aplicar cambio de variable del cartesiano al plano cilíndrico, en tal caso:

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\iiint\limits_{\Psi}\rho^2d\rho d\varphi dz$$

Los limites de la integración, se los puede obtener de la figura 10.27:

$$0\leq\varphi\leq 2\pi,\qquad 0\leq\rho\leq OC=OO'=1,\qquad \rho\leq z\leq 1$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\int_\rho^1\rho^2dz\right]d\rho\right]d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left[\rho^2z\right]_\rho^1d\rho\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left[(\rho^2-\rho^3)\right]d\rho\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1d\varphi=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{6}$$

8. Hállese la integral triple $\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$. Donde Ω está limitado por los planos $y=0, z=0, z=h>0$, la superficie cilíndrica de ecuación $x^2+y^2=2x$ y que se encuentre en un octavo del plano cartesiano.

Se introduce las coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z$$

Se debe definir los limites de integración con las nuevas variables:

$$0 \le z \le h, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = 2\rho\cos\varphi$$

$$\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$$

$$\rho = 2\cos\varphi$$

Por lo tanto, el limite de ρ es:

$$0 \le \rho \le 2\cos\varphi$$

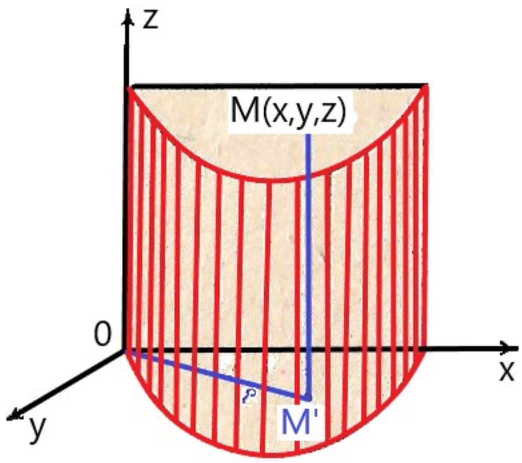


Figura 10.28

Lo que se obtiene:

$$J = \iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \iiint_{\Psi} z\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} \cdot \rho d\rho d\varphi dz$$

$$= \iiint_{\Psi} z \cdot \rho \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \iiint_{\Psi} z \cdot \rho^2 \cdot d\rho d\varphi dz$$

Se introduce los limites de integración:

$$J = \int_0^h \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\cos\varphi} z \cdot \rho^2 d\rho \right] d\varphi \right] dz$$

Se integral la integral interna:

$$\int_0^{2\cos\varphi} z \cdot \rho^2 d\rho = z\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} = \frac{8z}{3}\cos^3\varphi$$

Se reemplaza:

$$J = \int_0^h \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8z}{3}\cos^3\varphi\right] d\varphi \right] dz$$

Se integra la segunda integral interna:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8z}{3}\cos^3\varphi\right] d\varphi = \frac{8z}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{8z}{3}\left[\sin\varphi + \frac{\sin^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$J = \frac{8z}{3}\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{16z}{3}$$

Se reemplaza en la ultima integral:

$$\int_0^h \frac{16z}{9}dz = \frac{16}{9}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \frac{8}{9}h^2$$

12.10.2. Ejercicios Propuestos de Integrales Triples

1. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2z dxdydz$. Si, Ω es el dominio que está limitado por los planos x = 1, x = 3; y = 0, y = 2; z = 2, z = 5.

2. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(x+y++z+1)^3}$. Si, Ω es el dominio limitado por el plano x + y + z = 1 y los planos del plano cartesiano.

3. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$. Si, Ω es el dominio limitado por los planos x = 0,y = 0 z = 0 y la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ que se encuentra en el primer cuadrante del plano cartesiano.

4. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$. Si, Ω es el dominio limitado por una superficie cilíndrica de ecuación $x^2+y^2=1$ y los planos z = 0 y z = 3.

5. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$. Si, Ω es el dominio limitado por el plano de ecuación x + y + z = 1.

6. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz$. Si, Ω es el dominio limitado por la superficie z = xy, z = 0, y = , x =1.

7. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} \sin(x+2y+3z)dxdydz$. Si, Ω es un prisma limitado por $0 \le x \le \pi,\ \pi \le y \le 2\pi,\ 0 \le z \le 3\pi$

8. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$ Si, Ω es una pirámide limitado por los planos del plano cartesiano y el plano de ecuación x + y + z = 1

9. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} x^2zdxdydz$ Si, Ω es un cono limitado por la superficie: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ y el plano $z=c>0$

10. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$ Si, Ω es un cono limitado por $\dfrac{1}{8}$ de la elipsoide superficie: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ y el plano $x=0, y=0, z=0$

11. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} (2x+3y-z)dxdydz$ Si, Ω es un prisma de tres caras limitado por los planos z = 0,z = a; x = 0, y = 0, x + y = b $(a>0, b>0)$

12. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y+z^2)^3dxdydz$ Si, Ω está limitado por el cilindro $x^2+z^2=1$ y los planos y = 0, y = 1.

13. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)dxdydz$ Si, Ω está limitado por las superficies $z=\dfrac{(x^2+y^2)}{2}$, z = 2.

14. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ Si, Ω es la esfera $x^2+y^2+z^2 \le r^2$

15. Hállese la masa de la esfera de radio R, que se encuentra en el primer octavo del plano cartesiano, si su densidad del cuerpo en cada punto es igual a la distancia de ese punto al plano Oxy.

16. Hállese la masa de la esfera de radio R, que se encuentra en el primer octavo del plano cartesiano y limitada por la superficie $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, $(a \le c, b \le c)$ si su densidad del cuerpo en cada punto es igual $\rho(x,y,z)=z$.

17. Hállese el volumen del cuerpo limitado por el plano Oxy, la figura cilíndrica $x^2 + y^2 = r^2$ y la paraboloide hiperbólica de ecuación $z = \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{y^2}{2b}$
18. Hállese el volumen del cuerpo limitado por la figura cilíndrica $x^2 + \left(y - \dfrac{a^2}{2}\right)^2 = r^2$ y la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
19. Un paralelogramo de base cuadrada asentada en el plano Oxy de vértices A(1,0), B(3,1), C(2,3), D(0,2) se atraviesa con un plano de ecuación $\dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{2} = 1$ Hállese el volumen de la parte inferior.
20. Hállese el volumen del cuerpo limitado por los plano z = 0, x + y = a, x + y = -a, x - y = a,x - y = -a y la superficie a(z - a) = xy. Donde $a > 0, z \geq 0$
21. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ Si, Ω está limitada por los planos z = 0, un cilindro $x^2+y^2 = 2Rx$ y la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$
22. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ Si, Ω está limitada por la paraboloide $z = x^2 + y^2$, y el plano z = 1.
23. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$ Si, Ω está limitada por la superficie cónica $z^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano z = h.
24. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$ Si, Ω está limitada por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
25. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)dxdydz$ Si, Ω está limitada por el anillo esférico $x^2+y^2+z^2 = R_1^2, x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2, \quad R_1 < R_2$.
26. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}} dxdydz$ Si, Ω está limitada por un octavo de la esfera definida por: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$
27. Hállese la integral triple: $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}dxdydz$ Si, Ω está limitada por un octavo de la esfera definida por: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$

12.11. Aplicaciones de Integrales Triples

El centro de gravedad de un cuerpo es el punto respecto al cual, las fuerzas de gravedad que ejerce sobre los diferentes puntos materiales, que constituyen el cuerpo, producen un momento resultante nulo.

El centro de gravedad está muy relacionado con lo que, se ha llamado, momento de las fuerzas. Cuanto menor es la distancia del centro de gravedad al centro de la estructura, mucho más fácil será resistir la fuerza, que se sobrepone en el cuerpo. Algo que se puede aplicar incluso en la vida diaria. Al cuerpo se lo divide en n partes, en tal forma que $\sum\limits_{i}^{n} A_i = A$ nos de el cuerpo que se analiza. Se considera un punto cualquiera A_i, este punto estará en el plano cartesiano; por lo tanto, estará definido por un terciario ordenado $A_i(x_i, y_i, z_i)$.

Cada punto tendrá una masa m_i y la suma de estás masas de cada uno de estos puntos, nos da la masa del cuerpo; es decir, $\sum\limits_{i}^{n} m_i = M$. Se analiza un punto del cuerpo, sobre el cual actúa una fuerza F_i, el momento con respecto el plano Oxy, se lo calcula por medio de $M_{xy_i} = m_i \cdot z_i$

Se desea encontrar el momento que producen todas los punto del cuerpo con respecto al plano Oxy; por lo tanto:

$$M_{xy} = \sum_{i}^{n} M_{xy_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + \cdots + m_n \cdot z_n$$

En forma idéntica, se obtiene un momento con respecto al plano Oyz:

$$M_{yz} = \sum_{i}^{n} M_{yz_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \cdots + m_n \cdot x_n$$

Se obtiene un momento con respecto al plano Ozx:

$$M_{zx} = \sum_{i}^{n} M_{zx_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot zx_i = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \cdots + m_n \cdot y_n$$

Al considerar la distancia relativa, significa que, se debe tomar en cuenta el lugar del cuadrante, en el cual, está el punto A_i.

Para determinar el momento estático del cuerpo, por la distribución de la masa si es en forma continua (homogénea o uniforme) de la densidad de volumen del cuerpo $\delta(x,y,z)$; por lo tanto:

$$\delta(x_i, y_i, z_i) = \frac{m_{volumen}}{Volumen} = \frac{m_i}{v_i}$$

Por lo tanto, la masa de una partícula (punto) aproximadamente sera igual:

$$\delta(x_i, y_i, z_i) = \frac{m_{volumen}}{volumen} = \frac{m_{v_i}}{v_i} \longrightarrow m_{v_i} = \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i$$

El centro de gravedad de un cuerpo, se lo define como el punto $S(\xi, \eta, \phi)$ en el cual, se concentra toda la masa del cuerpo y tiene un mismo momento estático, con relación a cada eje, que todo el cuerpo.

En algunos libros, también se puede encontrar la terminología, para el centro de gravedad $S(x_c, y_c, z_c)$.

En base a lo cual, se puede escribir:

$$M_{xy} = \sum_{i}^{n} M_{xy_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot volumen_i \cdot z_i =$$

$$M_{yz} = \sum_{i}^{n} M_{yz_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot volumen_i \cdot x_i$$

$$M_{zx} = \sum_{i}^{n} M_{zx_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot volumen_i \cdot y_i$$

En todos los casos el volumen, se lo puede definir, como el producto de $Volumen = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ y en ese caso, se tendría:

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot volumen_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot z_i$$

$$M_{yz} = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot volumen_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot x_i$$

$$M_{zx} = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot volumen_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot y_i$$

En este análisis, se debe reducir el error, que se produce al dividir el cuerpo en ' n ' partes; por lo tanto, se debe tomar el limite cuando ' n ' tiende al infinito y en ese momento $\Delta x \approx dx, \quad \Delta y \approx dy, \quad \Delta z \approx dz$ gracias a lo cual, se puede escribir la triple integral:

$$M_{xy} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot z_i \cdot dx \cdot dy \cdot \cdot dz = \iiint_V z\delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$M_{yz} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot x_i = \iiint_V x\delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot$$

$$M_{zx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot y_i = \iiint\limits_V y\delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot$$

El centro de gravedad de un cuerpo, se lo define como el punto $S(\xi, \eta, \phi)$ en el cual, se concentra toda la masa del cuerpo y tiene un mismo momento estático con relación a cada plano, que todo el cuerpo.

Lo que significa:

$$M \cdot \xi = M_{yz} \longrightarrow \xi = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V x\delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{M} = \frac{\iiint\limits_V x\delta(x_i, y_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_V \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}$$

$$M \cdot \eta = M_{zx} \longrightarrow \eta = \frac{M_{zx}}{M} = \frac{\iiint\limits_M y\delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot}{M} = \frac{\iiint\limits_V y\delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_V \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}$$

$$M \cdot \phi = M_{xy} \longrightarrow \phi = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_M z\delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot}{M} = \frac{\iiint\limits_V z\delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_V \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}$$

En el momento, en el cual, se considere que el cuerpo es uniforme o homogéneo, en ese instante, se puede definir que $\delta(x_i, y_i) = 1$

$$\xi = x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V x dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_V dx \cdot dy \cdot dz}, \qquad \eta = y_c = \frac{M_{zx}}{M} = \frac{\iiint\limits_V y \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_V dx \cdot dy \cdot dz}$$

$$\phi = z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_V z dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_V dx \cdot dy \cdot dz},$$

12.11.1. Ejercicios Resueltos de Centro de Gravedad de Cuerpos

1. Hállese el volumen del cuerpo limitado por las superficies $hz = x^2 + y^2, \quad z = h$

   El cuerpo está limitado en su parte inferior por una paraboloide $z = \dfrac{x^2 + y^2}{h}$, en su parte superior por un plano z = h, y se proyecta en el plano Oxy una circunferencia $x^2 + y^2 \le h^2$.

   Se aplica el cambio de variables cilíndricas, en las cuales, la ecuación de la paraboloide toma la forma $z = \dfrac{\rho^2}{h}$. Se define los limites de integración:

   $$0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le h, \qquad \frac{\rho^2}{h} \le z \le h$$

   El volumen del cuerpo se calcula:

   $$V = \iiint\limits_\Omega dxdydz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^h \left[\int_{\frac{\rho^2}{h}}^{h} \rho dz \right] d\rho \right] d\theta$$

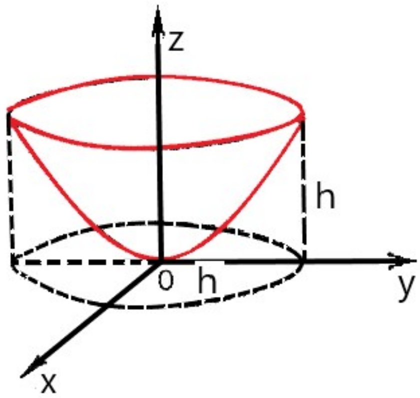


Figura 10.29

   Se integra la integral interna:

   $$\int_{\frac{\rho^2}{h}}^{h} \rho dz = \rho \int_{\frac{\rho^2}{h}}^{h} dz = \rho \left[z \right]_{\frac{\rho^2}{h}}^{h} = \rho \left[h - \frac{\rho^2}{h} \right]$$

Se integra la segunda integral interna:

$$\int_0^h \rho\left[h-\frac{\rho^2}{h}\right]d\rho=\left[\frac{h\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4h}\right]_0^h=\left[\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{4}\right]$$

La última integral:

$$\left[\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{4}\right]\int_0^{2\pi}d\theta=\left[\frac{h^3}{4}\right]\left[\frac{2\pi}{4}\right]=\frac{\pi h^3}{2}$$

2. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo prismático homogéneo limitado por los planos: x = 0, z = 0, y = 1, y = 3, x +2z = 3.

   Se encuentra el volumen del cuerpo:

$$V=\iiint_V dxdydz=\int_0^3\left[\int_1^3\left[\int_0^{\frac{3-x}{2}}dz\right]dy\right]dx=\int_0^3\left[\int_1^3\left[\frac{3-x}{2}\right]dy\right]dx=$$

$$=\int_0^3[(3-x)]dx=\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

   Se calcula cada una de las coordenadas del centro de gravedad:

$$x_c=\xi=\frac{M_{yz}}{M}=cuerpo\ homogéneo=\frac{\iiint_V xdxdydz}{V}=\frac{\iiint_V xdxdydz}{\frac{9}{2}}=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3\left[\int_1^3\left[\int_0^{\frac{3-x}{2}}dz\right]dy\right]xdx=\frac{2}{9}\int_0^3\left[\int_1^3\left[\frac{3-x}{2}\right]dy\right]xdx=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3[(3-x)]xdx=\frac{2}{9}\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=1$$

$$y_c=\eta=\frac{M_{zx}}{M}=cuerpo\ homogéneo=\frac{\iiint_V ydxdydz}{V}=\frac{\iiint_V ydxdydz}{\frac{9}{2}}=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3\left[\int_1^3\left[\int_0^{\frac{3-x}{2}}dz\right]ydy\right]dx=\frac{2}{9}\int_0^3\left[\int_1^3\left[\frac{3-x}{2}\right]ydy\right]dx=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3\left[\frac{3-x}{2}\right]\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3dx=\frac{4}{9}\int_0^3(3-x)dx=\frac{4}{9}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3=2$$

$$z_c==\frac{M_{xy}}{M}=cuerpo\ homogéneo=\frac{\iiint_V zdxdydz}{V}=\frac{\iiint_V zdxdydz}{\frac{9}{2}}=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3\left[\int_1^3\left[\int_0^{\frac{3-x}{2}}zdz\right]dy\right]dx=\frac{2}{9}\int_0^3\left[\left[\frac{(3-x)^2}{8}\right][y]_1^3\right]dx=\frac{1}{18}\int_0^3(3-x)^2dx$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3 (3-x)^2 dx = \frac{1}{18} = \frac{1}{18}\left[\frac{-(3-x)^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{2}$$

Finalmente, las coordenadas del centro de gravedad $(\xi, \eta, \phi) = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$

3. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo homogéneo limitado por los planos: z = 0 y la paraboloide $z = 3 - x^2 - y^2$.

   La figura dada es simétrica con respecto los planos Oxz y Oyz; en ese caso, $x_c = y_c = 0$ Lo que toca es encontrar z_c, lo cual, en base a la fórmula:

$$z_c = \frac{\iiint\limits_M z\delta(x_i, y_i, z_i)\cdot dx \cdot dy \cdot}{M} = \frac{\iiint\limits_V z\delta(x_i, y_i, z_i)\cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_V \delta(x_i, y_i, z_i)\cdot dx \cdot dy \cdot dz}$$

   Pero como el cuerpo es homogéneo:

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_V dx \cdot dy \cdot dz}$$

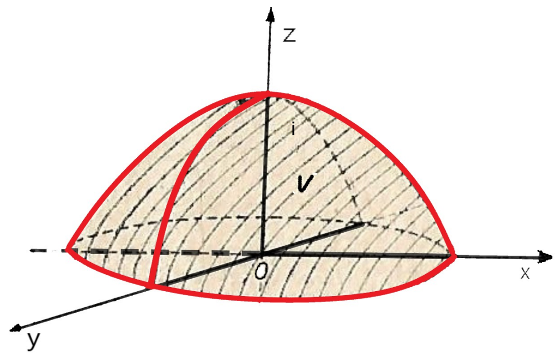


Figura 10.30

   Se introduce las coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = z$$

   Se observa que cuando un punto M(x,y,z) cambia de posición en el dominio V, sus coordenadas ρ, θ, z (Ver figura 10.30) cumplen las siguientes inecuaciones:

$$0 \le \rho \le \sqrt{3}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le z \le 3 - \rho^2$$

   Las in-ecuaciones escritas definen los limites de integración en el nuevo dominio y el valor del determinante de Jacobian tiene el valor de ρ; por lo tanto:

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_\Psi \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{\sqrt{3}}\left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{3-\rho^2}\rho dz\right]d\theta\right]d\rho =$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left[\int_0^{2\pi}\left[(3-\rho^2)\rho\right]d\theta\right]d\rho =$$

   La última integral:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left[2\pi\left[(3-\rho^2)\rho\right]\right]d\rho = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(3\rho - \rho^3)d\rho = 2\pi\left[\frac{3}{2}\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

   Finalmente:

$$= 2\pi\left[\frac{3}{2}\cdot 3 - \frac{3^2}{4}\right] = 2\pi\cdot 9\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{9}{2}\pi$$

   En forma muy similar, se calcula:

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \frac{9}{2}\pi$$

   Con estos resultados obtenidos, se obtiene las coordenadas del centro de gravedad: $(x_c, y_c, z_c) = (0, 0, 1)$

12.11.2. Ejercicios Propuestos de Centro de Gravedad de Cuerpos

1. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de un cono circular de radio igual a 'r' y de altura h.

2. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo definido con las siguientes condiciones $y^2 \leq 4x,\ y\ 2x + y + z \leq 4,\ z \geq 0.$

3. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo definido con las siguientes condiciones $z \geq y^2 \leq 4x,\ y\ 2x + 3y \leq 3,\ x \geq 0,\ z \leq 1.$

4. En una semiesfera definida con la ecuación $x^2+y^2+z^2 \leq a^2, z \geq 0$ si la densidad cambia proporcionalmente a la distancia del punto de origen. Encuentre las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo.

5. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo definido con las siguientes condiciones $2z^2 + y^2 = 4x$, y el plano x = 2.

6. Hállese el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2.$

7. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo definido con las siguientes condiciones x + y = 1, $z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 0.$

8. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo definido con las siguientes condiciones $z^2 = xy, x = 5, y = 5, z = 0.$

9. Hállese las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo definido con las siguientes condiciones $2x + 3y - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$, y la superficie cilíndrica $z = \dfrac{y^2}{2}$.

Bibliografía

[1] Zakoswki Wojciech *Matematyka*, editorial Técnico-científica,Polonia, Lodz 2006.

[2] Steinhaus Hugon *105 Zadan z Matematiki*, Gis Wroclaw 2005.

[3] Roman Leitner y Wojciech Zakowski *Matematyka* editorial técnico-científico, Varsovia, 1980.

[4] Roman Leitner *Zaris Matematyki Wyzszej*, editorial técnico-científico, Varsovia, 1981.

[5] H. Hall y R. Knight *Algebra Superior*, editorial Hispano Americana, Mexico, 1980,2005,2015.

[6] Jose Luis Mataix *Mil Problemas de Aritmetica y Algebra*, editorial Dossat, Madrit, España, 1970,1983,2015.

[7] Andrzej Flisowski y Radoslaw Grzymkowski *Matematyka*, Polonia, Gliwice, 2002.

[8] Richard Johnsonbaugh *Matemáticas Discretas* editorial Iberoaméricana, Mexico,2012.

[9] Oswin Crespo *Ejercicios y Problemas de Algebra* editorial Alameda, España, Madrid 1970.

[10] Izydor Dziubinski y Lucjan Siewierski *Elementy Matematyki Wyzszej* editorial Politechniki lodzkiej, Polonia, Lodz 1980, 1997.

[11] Waclaw Leksinski Bohdan Macukow y Wojciech Zakowski *Matematyka dla maturzystow* editorial Técnico-científico Varsovia, 1991

[12] Raymond A. Barnett *Algebra y Trigonométria* editorial McGraw-Hill, Mexico,1988.

[13] Yakovliev G. N *Algebra y Principios del Análisis* editorial MIR, Moscu 1985.

[14] Jack R. Britton y Ignacio Bello editorial Latinoamericana, Mexico, 1979.

[15] Norbert Drobka y *Matematyka* editorial Técnico-científico,Polonia, Varsovia 1991

[16] Popov A. Danko P. y Kozhevnikova *Matemáticas Superiores* editorial MIR, Moscu, 1985.

[17] Demidovich B. Yampolski A. Efimov A. Bolgov V. y Pospelov S. *Problemas de las Matemáticas Superiores* editorial MIR, Moscu 1981.

[18] Deborah Hughes y Andrew M. Gleason *Cálculo* editorial Continental, Mexico,2000.

[19] Lech Wlodarski y Ewa Hens *Matematyka na Wyzsze Uczelnnie* editorial Técnico-científico, Polonia, Varsovia, 2005.

[20] Grimaldi Ralph *Matemâticas Discretas* editorial Iberoamericana, Mexico,2015.

[21] Sullivan Michael *Precálculo* sexta edision, Mexico, 2009.

[22] C. Liu *Matemáticas Discretas* editorial McGraw-Hill, Mexico, 2007.

[23] Macukow Bohdan *Matematyka w Zadaniach* editorial Técnico-científica, Polonia, Varsovia,2008.

[24] Arcos Garcia Joe *Problemas de Lógica*; *Mil Problemas en Matemâtica* editorial ESPE, Ecuador, Quito,2008, 2009.

[25] kielbase Andrzej *zadan z matematyki* editorial Técnico-científico Polonia, Varsovia 2015.

[26] W. Krysicki y L. Wlodarski *Analiza Matematyczna w Zadaniach* editorial Técnico-científico, Polonia, Varsovia,2015.

[27] Edwin Dimitri Nieto Guerrero *Cálculo de Proposiciones y de Predicados* editorial Casadelpolo, Ecuador, Manabi, 2016.

[28] Edwin Dimitri Nieto Guerrero *Compendio de Matemáticas Volumen I* editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2018.

[29] Edwin Dimitri Nieto Guerrero *Compendio de Matemáticas Volumen II* editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2019.

[30] Edwin Dimitri Nieto Guerrero *Compendio de Matemáticas Volumen III* editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2020.

[31] Edwin Dimitri Nieto Guerrero *Compendio de Matemáticas Volumen VII* editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2022.

[32] Bartosznski R. Czaplinski W. Dziubinski I. Kacki E. Kolupa M. Otto E. Srodka T. Swiatkowski T. Waliszewski W y Wlodarski L *Poradnik Matematyczny* editorial Técnico-científico Polonia, Varsovia 1982.

[33] Piskunov N. *Cálculo Diferencial e Integral* editorial MIR, Moscu 1973,1985,2006.

[34] Kurosch A.G. *Curso de Álgebra Superior* editorial MIR, Moscu 1981, 1998.

[35] Kudriavtsev L. D. *Curso de Análisis Matemático* editorial MIR, Moscu, 1984, 2010.