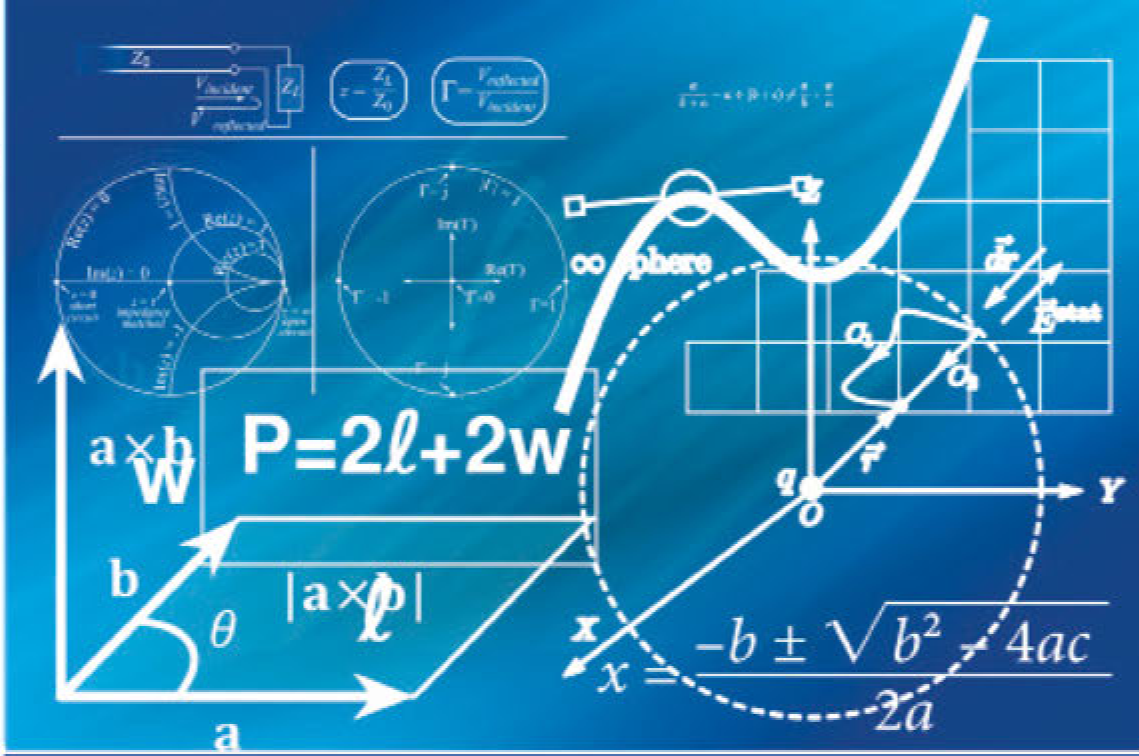

Compendio de Matemáticas

Volumen III

Compendio de Matemáticas Vol. II

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

COMPENDIO DE MATEMÁTICAS

VOLUMEN III

Edwin Dimitri Nieto Guerrero
Fernando Alonso Vaca de la Torre
Eduardo Lázaro Rodríguez Rodríguez

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

COMPENDIO DE MATEMÁTICAS

VOLUMEN III

AUTORES

Edwin Dimitri Nieto Guerrero
Master Ingeniero de la Industria Textil
ednieto@uce.edu.ec

Fernando Alonso Vaca de la Torre
Magister en Automatización y Control Electrónica Industrial;
Magister en Informática; Ingeniero en Electrónica y Control
favaca@uce.edu.ec

Eduardo Lázaro Rodríguez Rodríguez
Master en Ciencias Físicas; Licenciado en Física
elrodriguez@uce.edu.ec

Docentes de la Universidad Central del Ecuador

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

COMPENDIO DE MATEMÁTICAS

VOLUMEN III

REVISORES

Hugo Andrés Vinueza Peralta
Magister en Estadística mención en Gestión de la Calidad y Productividad;
Ingeniero Mecánico
Universidad Técnica Estatal de Quevedo
hugvinu87@gmail.com

Jorge Enrique Ordoñez García
Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones;
Magister en Automatización y Control Industrial;
Máster en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachiller
Universidad de Guayaquil
jordonez.garcia@ug.edu.ec

MAWIL
Publicaciones Impresas
y Digitales

DATOS DE CATALOGACIÓN

AUTORES: Edwin Dimitri Nieto Guerrero
Fernando Alonso Vaca de la Torre
Eduardo Lázaro Rodríguez Rodríguez

Título: Compendio de Matemáticas Volumen III

Descriptores: Matemáticas; Compendio; Educación Superior

Codigo UNESCO: 12 Matemáticas; 1202 Análisis y Análisis Funcional

Edición: 1era

ISBN: 978-9942-826-22-0

Editorial: Mawil Publicaciones de Ecuador, 2020

Área: Educación Superior

Formato: 148 x 210 mm.

Páginas: 212

DOI: https://doi.org/10.26820/978-9942-826-22-0

Texto para Docentes y Estudiantes Universitarios

El proyecto didáctico *Compendio de Matemáticas Volumen III*, es una obra colectiva creada por sus autores y publicada por *MAWIL*; publicación revisada por el equipo profesional y editorial siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento de publicaciones de *MAWIL* de New Jersey.

*Director General: MBA. Vanessa Pamela Quishpe Morocho Ing.
*Dirección Central MAWIL: Office 18 Center Avenue Caldwell; New Jersey # 07006
*Gerencia Editorial MAWIL-Ecuador: Aymara Galanton.
*Editor de Arte y Diseño: Lic. Eduardo Flores

Prefacio

Este texto, que es el tercer volumen de una serie, de por lo menos diez volúmenes, ha sido realizado con el propósito de ayudar a todos aquellos estudiantes que desean mejorar y profundizar sus conocimientos en esta materia y para todos aquellos que desean incrementar sus habilidades para resolver ejercicios de diferentes niveles de dificultad del área de la matemática. Esté es el volumen de una serie de volúmenes, que están siendo preparados para que cumplen con el programa obligatorio que consta en el currículo de las Universidades que tienen la facultad de Ingeniería, el cual consta principalmente de:
Conjuntos, los números reales, inducción matemática,relaciones y funciones, polinomios, funciones exponenciales y funciones logarítmicas,sistema de ecuaciones, planificación optima, series,calculo diferencial de una variable, de dos o mas variables,calculo integral de una o mas variables,ecuaciones diferenciales y métodos numéricos. Los autores esperan, que cumpla con las exigencias de la facultad.
En este volumen se encuentra los temas de sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal. De la observación de estos últimos años, en los cuales hemos enseñado esta materia, nos ha permitido llegar a la conclusión de que justamente el nivel de conocimientos, así como la habilidad de resolver diferentes tipos de problemas, tiene gran influencia en el éxito de permanencia de los estudiantes en nuestra facultad.
El libro pretende lograr los siguientes objetivos:

1. Introducir al alumno de ingeniería en temas técnicos de razonamiento.
   Muchos de los problemas requieren un cuidadoso análisis de estructuras y posibilidades lógicas, en el curso de ese análisis cuidadoso se observará con frecuencia que, la solución de un problema requiere técnicas simples y la aplicación de ellas dará una solución.

2. Incluir una gran variedad de problemas, así como indicar una gran variedad de aplicaciones.

   Las soluciones de algunas aplicaciones conducen por sí mismas a procedimientos deductivos que llevan a algoritmos específicos. Este enfoque refuerza la relación íntima existente entre esta disciplina y diferentes campos de la ciencia.

3. Desarrollar la madurez matemática del estudiante mediante el estudio de estos temas, que son de un área tan diferente a otras; como es el cálculo.

4. La de ayudar a los profesores en la preparación de sus clases, de las diferentes formas de evaluación, así como a los estudiantes en su preparación y mejorar su nivel de conocimientos de la materia.

Los pre-requisitos para este libro son principalmente un interés por abordar y resolver diversos tipos de problemas, una formación básica en el álgebra de secundaria. Nuestra mayor motivación para escribir este libro ha sido el impulso recibido en los últimos 10 años de nuestros alumnos, así como por recomendaciones de las autoridades de la facultad de Ingeniería. En el libro se ha tratado de presentar los diferentes temas en la forma más simple y clara posible, además al final de cada tema hay un conjunto de ejercicios diversos cuya solución quizá requiera la aplicación de varios teoremas. Los ejercicios al final de los temas están diseñados para:

1. Aplicar las ideas presentadas en cada tema.
2. Enlazar ideas de temas anteriores con las ideas de los nuevos temas.
3. Desarrollar otros conceptos relacionados con el material dado.

Si el espacio lo permitiera mencionaría a cada uno de nuestros estudiantes que asistieron a nuestros cursos y sugirieron la redacción de un texto a partir de las notas de clase. No obstante, si hay alguna persona a quien debemos el mayor agradecimiento es, sin duda, a cada una de nuestras familias, esposas e hijos, que sin su aporte, paciencia y motivación; este libro hubiese sido imposible de elaborar.

Los Autores.

Compendio de Matemáticas
Volumen III

MAWIL
Publicaciones Impresas
y Digitales

Índice general

Capítulo 1

Sistema de Ecuaciones

1. Definición de un sistema de ecuaciones
2. Tipos de sistemas
3. Características de un sistema de ecuaciones
4. Métodos de solución de un sistema lineal, entre los cuales se analiza:
    a) Método de Gauss-Jordán
    b) Método de Cramer
    c) Matrices
5. Métodos de solución de un sistema no-lineal

1.1. Definición de un Sistema de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de identidades (o desigualdades) compuestas por variables, los coeficientes de las variables y los coeficientes libres. De la definición de conjuntos se entiende que, el numero de variables puede llega a tener n variables. Se tiene dos tipos de sistemas de ecuaciones que depende del exponente de las variables:

1. Sistemas lineales, todas las variables tienen exponente uno (1).
2. Sistemas no lineales, por lo menos una de todas las variables tiene exponente diferente a uno (1).

1.2. Sistema de Ecuaciones Lineales

Los sistemas lineales se caracterizan por:

1. Todas sus variables tienen exponente igual a 1, de ahí proviene el nombre de lineal. Un sistema lineal de ecuaciones se lo puede representar como:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & c_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & c_n \end{array}\right.$$

Donde:

$a_{i,j} \longrightarrow$ Los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones lineales.

$c_n \longrightarrow$ Los coeficientes libres del sistema de ecuaciones lineales.

$x_n \longrightarrow$ Las variables del sistema de ecuaciones lineales.

2. Los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser cuadrangulares y rectangulares. Un sistema de ecuaciones es cuadrangular cuando el número de variables (incógnitas) es igual al número de ecuaciones. Un sistema de ecuaciones es rectangular cuando el número de incógnitas es mayor o menor al número de ecuaciones en el sistema.

   a) En sistema de ecuaciones, 2x2 cuadrangular, significa que el sistema tiene dos ecuaciones y dos variables.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a_1x & + & b_1y & = & c_1 \end{array}\right.$$

Donde:

$a, b, a_1, b_1 \quad \longrightarrow \quad$ Los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones lineales.

$c, c_1 \quad \longrightarrow \quad$ Los coeficientes libres del sistema de ecuaciones lineales.

$x, y \quad \longrightarrow \quad$ Las variables del sistema de ecuaciones lineales.

b) En sistema de ecuaciones, 3x3 cuadrangular, significa que el sistema tiene tres ecuaciones y tres variables:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Donde:

$a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \quad \longrightarrow \quad$ Los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones lineales.

$d, d_1, d_2 \quad \longrightarrow \quad$ Los coeficientes libres del sistema de ecuaciones lineales.

$x, y, z \quad \longrightarrow \quad$ Las variables del sistema de ecuaciones lineales.

3. Un sistema lineal es rectangular cuando el número de variables es mayor o menor al número de ecuaciones en el sistema lineal.

a) En sistema de ecuaciones, 3x2 rectangular, significa tres ecuaciones y dos variables:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde:

$x, y \quad \longrightarrow \quad$ Las variables del sistema de ecuaciones lineales.

$a, b, c, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \quad \longrightarrow \quad$. Los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones lineales.

$c, c_1, c_2 \quad \longrightarrow \quad$ Los coeficientes libres del sistema de ecuaciones lineales.

b) En sistema de ecuaciones, 4x3 rectangular, significa que el sistema tiene cuatro ecuaciones y tres variables:

$$\begin{cases} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{cases}$$

Donde:

$x, y, z \quad \longrightarrow$ Las variables del sistema de ecuaciones lineales.

$a, b, c, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2 \quad \longrightarrow$. Los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones lineales.

$d, d_1, d_2, d_3 \quad \longrightarrow$ Los coeficientes libres del sistema de ecuaciones lineales.

La teoría general de resolución un de un sistema de ecuaciones lineales indica que:

1. El sistema de ecuaciones lineales tiene una solución única; en el momento en que, las ecuaciones tengan un punto en común, también conocido como punto de equilibrio o como punto de intersección entre las ecuaciones lineales, que en si, cada una de ellas representa la ecuación de una linea recta, lo que nos informa que: para encontrar los puntos comunes entre funciones debo formar y resolver un sistema.

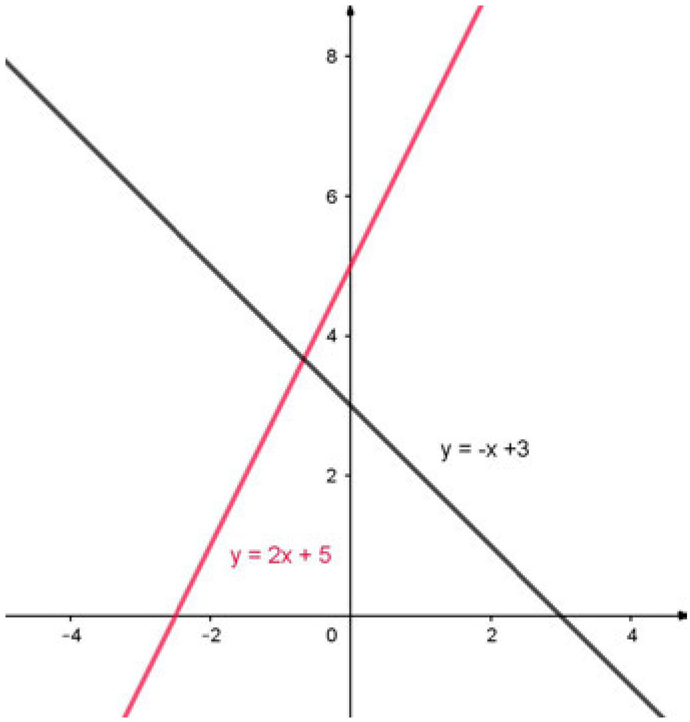

Figura 1.0 Sistema de Ecuaciones Solución Única

2. El sistema de ecuaciones lineales no tiene una solución; esto sucede en el momento en que, las ecuaciones lineales no tengan un punto en común, o un

punto de intersección entre las ecuaciones lineales; por lo tanto , estas rectas deben ser paralelas en toda su dominio.

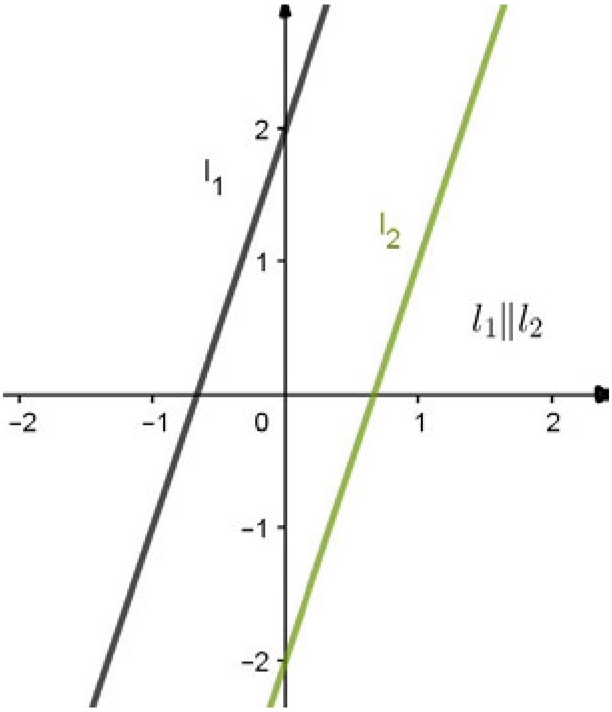

Figura 1.1 Sistema de Ecuaciones No hay Solución

3. El sistema de ecuaciones lineales tiene una cantidad infinita de soluciones; esto sucede en el momento en que, una ecuación dependa de otra de las ecuaciones las ecuaciones lineales no tengan un punto en común, o un punto de intersección entre las ecuaciones lineales; por lo tanto , este sistema es conocido como sistema paramétrico.

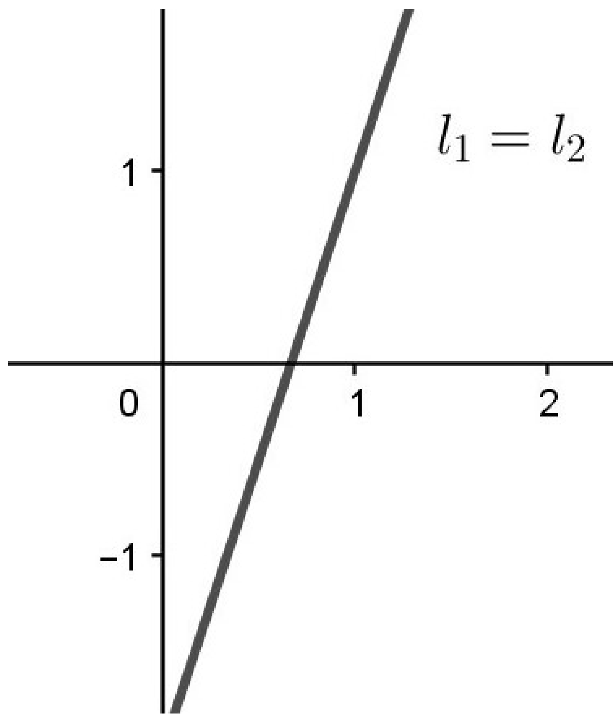

Figura 1.2 Sistema de Ecuaciones Solución Paramétrica

La solución de un sistema de ecuaciones lineales se basan en diferentes métodos de solución, entre los cuales se tiene:

1. Métodos clásicos, entre los cuales se tiene: Suma-resta, gráfico, igualación y substitución.
2. Métodos no-clásicos, como son : Gauss-jordan, determinantes y matrices.

En este libro se analizara los métodos no-clásicos.

1.3. Métodos de Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.3.1. Método Gauss-Jordán.

Los métodos clásicos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales, se vuelven tediosos conforme se incrementa el numero de variables. En el siglo XVIII, Friedrich Gauss y Camille Jordán dieron inicio al uso de este método, que al inicio se lo conocía como método de eliminación.
La aplicación de los métodos clásicos se los desarrollaba conjuntamente con sus variables y si el numero de variables era alto, mayor a tres variables, esta repetición era conflictiva. La idea de Gauss-Jordán, es simplemente el desarrollo de la solución del sistema de ecuaciones sin sus variables; por lo tanto, no se las escribe, para lo cual se creo, lo que se denomino, matriz aumentada.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a_1x & + & b_1y & = & c_1 \end{array}\right. \quad Matriz \;\; Aumentada \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{array}\right]$$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales con el método Gauss-Jordán, esta basado en las mismas propiedades que al aplicar los métodos clásicos; es decir, propiedades básicas de álgebra. Se utiliza las propiedades de álgebra, tanta veces sea necesario hasta obtener lo que se llama matriz unidad. Por lo tanto, el método Gauss-Jordán tiene las características:

1. Solamente se trabaja con filas, a las cuales se aplica las propiedades de álgebra.
2. A cada fila se puede multiplicar, dividir con un número cualquiera.
3. Se puede intercambiar filas.
4. Presenta algunas dificultades al tratar de escribir el algoritmo informático. Es motivo por el cual, su aplicabilidad ha disminuido.

Se desea resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \quad Matriz \;\; Aumentada \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad f_2 \leftrightarrow f_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Se ha intercambiado filas.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \quad (-2)\cdot f_1 + f_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

A la fila uno se ha multiplicado por (-2) y se ha sumado a la fila dos. La fila uno se mantiene constante, cualquiera sean los números que se hallen en la fila.
Como se observa en la segunda fila esta escrito: $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

Por lo cual, se puede escribir: 0x + y = 2 y de esta ecuación fácilmente encontramos y = 2, se reemplaza en la primera fila y se obtiene el valor de x; si así se lo hace, es lo que se llama Gauss-Jordán incompleto.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad (-1)\cdot f_2 + f_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

En el lado izquierdo de la matriz aumentado se ha obtenido la matriz unidad; por lo que, se ha resuelto el sistema de ecuaciones, de donde: x = -1, y = 2., y se ha utilizado el método Gauss-Jordán completo.
Resolver el sistema lineal por el método de Gauss Jordán.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad Matriz\ Aumentada \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad f_1 \leftrightarrow f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] (-3)f_1 + f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] (-2)f_1 + f_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right] (-2)f_3 + f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right] (-2)f_2 + f_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] (-1)f_3 + f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] (2)f_3 + f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] (\frac{3}{2})f_2 + f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \left(\frac{1}{2}\right)f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad (-1)f_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Se ha obtenido la matriz unidad;por lo tanto, $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = -1$.

Se conoce que un sistema tiene tres diferentes tipos de solución.La pregunta natural del estudiante en este momento seria: ¿Como se define que tipo de solución tiene un sistema al resolverlo por Gauss-Jordán. La respuesta es la forma como se presente la matriz aumentada:

1. Si la matriz aumentada tiene la forma:

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

   Por lo tanto, para cada una de las filas se la puede escribir de la forma (se considera la primera fila): $x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$. De donde x toma un solo valor. Esto nos permite concluir que: el sistema tiene solución única.

2. Si la matriz aumentada tiene la forma:

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

   Por lo tanto, en la matriz aumentada existe una fila, que se la puede escribir de la forma: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, lo que indicaría que: 0 = -1, lo cual es una falacia.En este caso el sistema no tiene solución.

3. Si la matriz aumentada tiene la forma:

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Por lo tanto, en la matriz aumentada existe una fila, que se la puede escribir de la forma: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, lo que indicaría que: 0 = 0, lo cual es una tautología.En este caso el sistema es paramétrico y tiene una cantidad infinita de soluciones.

1.3.2. Método Determinantes

El método de determinantes inicio su aplicación en el siglo XVII, por el Japones, Seki Kowa lo desarrollo mas ampliamente el alemán Leibniz Gottfried y fue popularizado por Grabriel Cramer, es por lo cual, que a este método se lo conoce como el método de Cramer.
Su inicio fue en base al análisis de resolver un sistema lineal por el método clásico:
El análsis se lo realiza en función de un sistema 2x2:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a_1x & + & b_1y & = & c_1 \end{array}\right.$$

A la primea fila se multiplica por (b_1) y a la segundo por (-b):

$$\begin{cases} a \cdot b_1 x & + & b_1 \cdot by & = & b_1 \cdot c \\ -b \cdot a_1 x & - & b \cdot b_1 y & = & -b \cdot c_1 \end{cases}$$

Se aplica el método de la suma-resta:

$$a \cdot b_1 x - b \cdot a_1 x = b_1 \cdot c - b \cdot c_1 \quad \longrightarrow \quad x(a \cdot b_1 - b \cdot a_1) = b_1 \cdot c - b \cdot c_1$$

Se despeja x:

$$x = \frac{b_1 \cdot c - b \cdot c_1}{a \cdot b_1 - b \cdot a_1}$$

a la ultima expresión se la escribió de otra forma:

$$x = \frac{b_1 \cdot c - b \cdot a_1}{a \cdot b_1 - b \cdot c_1} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D_b}, \qquad y = \frac{D_y}{D_b} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

Donde:

D_x significa el determinante en (x), D_y significa el determinante en (y) y D_b el determinante básico. El determinante D_x se obtiene al reemplazar los coeficientes de la variable, que se desea calcular, por los coeficientes libres del sistema, en la misma forma se obtiene el determinante D_y . El determinante básico se lo obtiene en base a los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones a resolver.
Por analogía, se lo hace para resolver un sistema de 3x3:

El sistema seria:

$$\begin{cases} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a_1 x & + & b_1 y & + & c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x & + & b_2 y & + & c_2 z & = & d_2 \end{cases}$$

Aplicando el método de Cramer:

$$x = \frac{D_x}{D_b} = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{D_y}{D_b} = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{D_z}{D_b} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Como se puede observar, al momento que expresamos las variables en función de determinantes, el signo menos desaparece, este es el motivo por el cual aparece el teorema de Sarus, el cual dice: El valor del determinante se obtiene al multiplicar la(s) diagonal(es) principal(es) del determinante menos la(s) diagonal(es) secundaria(s).

La diagonal principal es la recta que va de izquierda a derecha, pero de arriba hacia abajo en el determinante. La diagonal secundaria va de arriba hacia abajo, pero de derecha a izquierda en el determinante.
En la solución de un sistema de ecuaciones de 3x3 se debe aumentar 2 filas ó 2 columnas para aplicar el teorema de Sarus, lo cual se presenta en la siguiente figura:

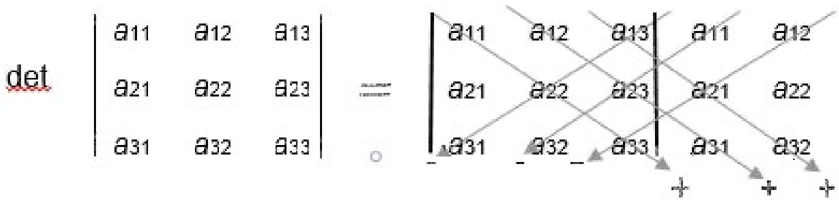

Figura 1.3 Teorema de Sarus en un Sistema 3x3

El método de Cramer es sencillo, entendible y es muy aplicable en la solución de problemas teóricos-técnicos en la matemática y en otras ciencias exactas de la ingeniería.
El principal problema, que se tiene en este método, es que el teorema(regla) de Sarus no se puede aplicar para resolver sistemas de orden mayor a 3; por lo que, es una regla no una ley. Para resolver un sistema de ecuaciones de orden mayor a 3 se debe obligatoriamente aplicar propiedades de un determinante.

Propiedades de Determinantes.

Las propiedades de determinantes se puede aplicar a cualquier sistema de ecuaciones de cualquier orden. Por facilidad de comprensión y visualización , se escribirán y demostrarán las propiedades de un determinante para un determinante de orden 2x2. Estás son:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ Este determinante se utilizara para analizar sus propiedades.

1. Si todo un determinante esta compuesto por ceros,el valor del determinante es igual a cero.

   $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ Al aplicar Sarus se tendría :$0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$

2. Si dos filas o dos columnas son idénticas, el valor del determinante es igual a cero.

   $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$ Al aplicar Sarus se tendría: $a \cdot b - a \cdot b = 0$

3. Si toda una fila ó columna se intercambia con otra fila ó columna, se debe escribir el signo menos delante del determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = c\cdot b - a\cdot d = -(a\cdot d - c\cdot b) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

4. Si toda una fila o columna tiene un factor, el factor sale delante del determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a\cdot k & b\cdot k \\ c & d \end{vmatrix} = a.k\cdot d - bk\cdot c = k(a\cdot d - b\cdot c) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

5. Si todas las filas ó columnas tienen un factor, el factor sale delante del determinante con un exponente que es igual al orden del determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a\cdot k & b\cdot k \\ c\cdot k & d\cdot k \end{vmatrix} = a.k^2\cdot d - bk^2\cdot c = k^2(a\cdot d - b\cdot c) = k^2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

6. Si a toda una fila ó columna le multiplicamos por un numero y le sumamos a otra fila ó columna el valor del determinante no se altera.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c+a\cdot k & d+b\cdot k \end{vmatrix} = a(d+b\cdot k) - b(c+a\cdot k) = ad + ab\cdot k - bc - ab\cdot k$$

$$= ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

7. Esta propiedad se la conoce como el nombre de desarrollo de un determinante, fue creada por Laplace, para su obtención se utilizara un determinante de 3x3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} (se\ \ aplica\ \ Sarus) = aei + dhc + bfg - egc - ahf - bdi$$

Se observa que: se tiene 6 elementos, tres positivos y tres negativos, ademas se tiene una suma y la suma acepta la asociativa y distributiva. Esto se lo realiza según la primera fila.

$= a(ei - hf) + b(fg - di) + c(dh - eg)$ Se escribe de diferente forma:

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} f & d \\ i & g \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Al trazar una horizontal y perpendicular a cada elemento de la fila,con la cual se desea desarrollar el determinante, todo lo que queda fuera de estas dos lineas, es lo que se presente en estos determinantes de 2x2. En el segundo elemento solo cambia el orden; por lo tanto, al aplicar la tercera propiedad se tendría:

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Todos los elementos están en un orden definido;por lo que, nos afecta en este momento es el signo menos. Pero se lo puede escribir de la siguiente forma:

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \left(-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Esta estructura, ya permite escribir la formula general del desarrollo de un determinante:

$$Det.A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$$

Donde:

El elemento $(-1)^{i+j}$. Nos indica que, en el desarrollo de un determinante depende del lugar del elemento en el determinante. Si la suma de (i + j) es par su signo sera positivo y si esta suma (i + j) es impar; por lo tanto, el signo sera negativo.

El elemento $a_{i,j}$ serán todos los elementos de una fila ó columna, según se desarrolla el determinante.

$M_{i,j}$ Es el minorante del determinante, que siempre es un grado menor del grado del determinante que se desarrolla.

El complemento algebraico del elemento a_{ij} del determinante A, se llama escalar A^*_{ij} ó $[a^*]_{ij}$ definido con la fórmula:,
$A^*_{ij} = (-l)^{i+j} \cdot Mij.$

El determinante formado de los complementos algebraicos A* del determinante A, es el determinante formado por la substitución de cada elemento del determinante A con los correspondientes complementos algebraicos, lo que significa que:

$A^* = [A_{ij}]$.

8. El valor del determinante A es igual a la suma de multiplicaciones de los elementos de una fila multiplicados por los cofactores de esa fila, entonces:

$Det. = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k}$ .Donde: i la fila que se desarrolla el determinante

$Det. = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}M_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}A_{k,j}$ .Donde: j la columna que se desarrolla el determinante

Estas fórmulas, llamadas desarrollo de la Laplace, siempre dan un resultado igual, independiente de la fila ó columna que se elegida.

Al desarrollar un determinante, el minorante es un grado menor; por lo tanto, se puede realizar este proceso, tantas veces sean necesarias hasta reducir el orden del determinante, hasta llegar a un determinante de tercer orden, en el cual, se puede aplicar la regla de Sarrus. Pero ademas, si se aplica la sexta propiedad, que nos permite obtener la mayor cantidad de ceros en la fila, con lo cual se facilita el calculo del valor de un determinante.
Calcular el valor del determinante:

1. $Det.A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

   el determinante es de tercer orden, se puede aplicar el teorema de Sarrus ó propiedades. (El estudiante debe obtener el valor del determinante aplicando Sarrus). En este ejercicio se aplicara propiedades.
   Toda la columna tres tiene un factor el numero dos:

$$Det.A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} f_2(1)+f_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

   Ya se tiene la mayor cantidad de ceros en la columna (2). Se desarrolla el determinante según la columna(2):

$$= (-1)^{1+2}\cdot(0)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot(1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot(0)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

   El primer elemento y el tercero al multiplicarlos por cero son igual a cero; por lo que, nos queda unicamente el segundo elemento.
   En el segundo elemento nos queda: $(-1)^{2+2} = (-1)^4 = 1$. El exponente $(2+2)$es el lugar del elemento con el que se desarrolla el determinante $a_{i,j} = 1$, y lo que queda es el minorante(cofactor):

$$Det.A = 2\left[(1)(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\right] = 2(4-5) = 2(-1) = -2$$

2. $Det.A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

   Lo primero que se observa, el determinante es de cuarto orden, no se puede aplicar el teorema de Sarrus, unicamente propiedades. Ninguna fila ni columna tiene un factor. Se escoje cualquier fila o columna, tomando encuenta que es mas fácil trabajar con números pequeños.

$$Det.A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} c_1(-1)+c_2 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} c_1(1)+c_3 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

La tercera columna ya tiene la mayor cantidad de ceros; por lo tanto, desarrollamos el determinante en función de esta columna.

$$Det.A = (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j} = (-1)^{4+3}(5) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-5)(-1^{i+j})(3) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Det.A = (-5)(-1)^{1+2}(3) \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5)(-1)(3)\left[(-2)(2)-(1)(-3)\right]$$

$Det.A = (15)(-1) = -15$ Es el valor del determinante.

3. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + 3y - z = -2 \\ 3x - 2y - 9z = 9 \end{cases}$$

Aplicando las definiciones del método de determinante se obtendría:

$$x = \frac{D_x}{D_b} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 9 & -2 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -9 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{D_y}{D_b} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 9 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -9 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{D_z}{D_b} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -9 \end{vmatrix}}$$

Se calcula los valores de los determinantes, aquí se aplicara propiedades (El estudiante debe resolverlo por el método de Gauss-Jordán).
Se comienza por el calculo del determinante básico:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -9 \end{vmatrix} c_1(1)+c_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -9 \end{vmatrix} c_1(-1)+c_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -12 \end{vmatrix}$$

Se obtuvo una fila con la mayor cantidad de ceros. Se desarrolla el determinante para la primera fila.

$$D_b = (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} = (1)(-60-3) = -57$$

Se calcula el valor del determinante en (x):

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 9 & -2 & -9 \end{vmatrix} c_3(1)+c_2 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 9 & -11 & -9 \end{vmatrix} c_3(-8)+c_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 81 & -11 & -9 \end{vmatrix}$$

Se obtuvo una fila con la mayor cantidad de ceros. Se desarrolla el determinante para la primera fila.

$$D_x = (-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 81 & -11 \end{vmatrix} = (1)(-66-162) = -228$$

Se calcula el valor de la variable (x): $x = \dfrac{D_x}{D_b} = \dfrac{-228}{-57} = 4$

Se calcula el valor del determinante en (y):

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} f_2(1)+f_1 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} f_2(-3)+f_3 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -5 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Se obtuvo una columna con la mayor cantidad de ceros. Se desarrolla el determinante para la tercera columna.

$$D_y = (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = (-1)3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = (-3)(9+10) = (-3)(19) = -57$$

Se calcula el valor de la variable (y): $y = \dfrac{D_y}{D_b} = \dfrac{(3)(-57)}{-57} = 3$

Se calcula el valor del determinante en (z):

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} f_1(-2)+f_2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -18 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} f_1(-3)+f_3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -18 \\ 0 & 1 & -15 \end{vmatrix}$$

Se obtuvo una columna con la mayor cantidad de ceros. Se desarrolla el determinante para la primera columna.

$$D_z = (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 5 & -18 \\ 1 & -15 \end{vmatrix} (1)(-75+18) = -57$$

Se calcula el valor de la variable (z): $z = \dfrac{D_z}{D_b} = \dfrac{-57}{-57} = 1$

1.3.3. Método Matrices.

1.3.4. Elementos de una Matrices.

Matrices es el método mas aplicado actualmente en los procesos técnicos y no-técnicos. Su aplicación se debe principalmente al desarrollo de la informática. El algoritmo informático, para su aplicación no es muy tedioso, como son los algoritmos de los otros dos métodos analizados.
Para su análisis, necesario es conocer las diferentes definiciones y teoremas que facilitan su aprendizaje. Todas estas definiciones están definidas en un campo (dominio) $\mathbb{K}$, que es un cuerpo, que admite las propiedades de:

1. Conmutatividad

2. Asociatividad

Por lo cual, $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ donde: (i,j)$\in \mathbb{N}$.

Definición de Matriz.

Llamamos una matriz a la representación compuesta de n filas y m columnas y su dimensión, esta definida por n x m (n por m). Su representación gráfica es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Los números que aparecen en la definición, $a_{i,j}$ donde i representan las filas, j representan las columnas (i = 1, 2,.., n, j = 1, 2, m) se llaman elementos o términos de una matriz A. También, se usa la forma abreviada de notación: A = $[a_{i,j}]_{nxm}$, $A = A_{nxm}$
Se define $A = [a_{ij}]$, cuando no hay ninguna duda sobre la dimensión de la matriz. Cuando m = n, la matriz es cuadrada. La cifra n define el grado u orden de la matriz y en forma corta se escribe $A = [a_{i,j}]_n \;\; o \;\; A = A_n$. En cada otro caso la matriz es rectangular.
Las matrices:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz cuadrada 3x3.}$$

En la matriz, $a_{1,1} = 1$, lo que nos indica es que: el elemento de la primera fila, primera columna es igual a 1 y así sucesivamente con todos los elementos de la matriz.

$$A_{3x4} = [a_{ij}]_{3x4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & 9 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz rectangular 3x4.}$$

La matriz dada consta de tres filas y cuatro columnas. El elemento $a_{2,4} = 7$.

Matriz Nula.

Una matriz, en la cual todos los elementos son iguales a cero, se llama matriz nula y marcamos con la letra $\mathbb{O}$ o $\mathbb{O}_{mxn}$, cuando se conoce su dimensión, $\mathbb{N}_n$. Como fácil es observar en la matriz:

$$\mathbb{N}_{3x3} = [N_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz nula cuadrangular 3x3}$$

Matriz Columna y Matriz Fila.

La matriz columna es aquella matriz que solo consta de una columna, al igual, la matriz fila es aquella que solo consta de una fila, su terminología es:

$[a_{1,n}]$ Matriz fila, que consta de la primera fila y de n columnas.

$$A_{1,n} = [a_{1,1} \;\; a_{1,2} \;\; a_{1,4} \;\; a_{1,4} \;\; \cdots \;\; a_{1,n}]$$

$$a_{n,3} = \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \cdots \\ a_{n,3} \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz columna. La tercera columna en la matriz dada.}$$

Matriz Diagonal.

La diagonal principal de la matriz cuadrada se compone de elementos con mismos indicadores, es decir, i = j. Si la diagonal principal de una matriz esta formada por cualquier numero, se la llama matriz diagonal. Y en el caso en que la diagonal principal estas compuesta por un solo numero, se lo conoce con el nombre de matriz escalar.

Matriz Triangular Superior(Inferior).

Los elementos de una matriz $[a_{i,j}]$ (i = l, 2,...,n; j =1,2,3,4,..n) que estén en la posición sobre la diagonal principal de una matriz, pueden estar formado por cualquier numero, se lo denomina elementos del triangulo superior de la matriz.
Una matriz cuadrada llamamos de triangulo superior (triangulo inferior), cuando todos los elementos en posición por debajo (por encima) de la diagonal principal tienen valor igual a cero. La matriz de triangulo superior de grado n tiene la forma:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_4 & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz de triangulo superior.}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ Matriz de triangulo inferior.

Matriz Transpuesta.

La matriz transpuesta A^T de la matriz A, se llama a una matriz, que se forma por un intercambio de filas por columnas correspondientes sin cambiar su orden; entonces, es la substitución de elemento a_{ij} por elemento a_{ji}. Si la matriz A = $[a_{ij}]$ la matriz transpuesta es $A^T = [a_{ji}]$
La operación que consiste en la determinación de una matriz transpuesta A^T de la matriz A, se llama transposición de la matriz. El resultado de transposición se cambia las dimensiones de la matriz. Lo que significa que cuando la matriz A tiene una dimensión n x m, la matriz A^T tiene una dimensión m x n.

$$A_{3x4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & 9 & -3 \end{bmatrix} \quad A^T_{4x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & 9 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

De esta definición de la matriz transpuesta resulta las propiedades siguientes:

1. $(A^T)^T = A$

   Demostración: Se considera una matriz cuadrada, aunque puede ser de cualquier orden:

   $(A^T)^T = ((a_{ij})^T)^T = (a_{ji})^T = a_{ij} = A \quad \forall i,j \in \mathbb{N}$

2. $\mathbb{E}^T = \mathbb{E}$

   Demostración: En una matriz unidad, su característica es que, su diagonal principal esta compuesta por unos. En el proceso de transposición la diagonal principal se mantiene constante.

3. $Det.(A_{i,j}) = Det.(A_{i,j})^T \quad \forall i,j \in \mathbb{N}$

   Demostración: Se conoce que el valor de un determinante de segundo orden esta definido por la regla de Sarus:

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = a \cdot d - c \cdot b = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

   La operación multiplicación acepta la propiedad conmutativa. Si el determinante es de mayor orden se aplica propiedades hasta obtener un determinante de segundo o tercer orden , donde se puede aplicar Sarus.

Matriz Simétrica

Se llama matriz simétrica a la matriz cuadrada en la cual sus elementos ubicados simétricamente con relación a la diagonal principal son iguales, donde. $a_{ik} = a_{ki}$

para $i, k = 1, 2, 3, \cdots, n$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & k & r & s \\ c & r & l & p \\ d & s & p & m \end{bmatrix} \longrightarrow A = A^T \quad \forall A \in \mathbb{K}$$

Una matriz anti-simétrica esta definida por: $A = -A^T \quad \forall A \in \mathbb{K}$
Lo escrito permite formular los teoremas siguientes:

1. La suma de una matriz con su transpuesta es una matriz simétrica $S = A + A^T$.

   Demostración:

   $S^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = S$

2. la diferencia de una matriz con su transpuesta es una matriz anti-simétrica $S = A - A^T$.

   Demostración:

   $S^T = (A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -S$

Operaciones Algebraicas con Matrices.

Las operaciones algebraicas con matrices son: la suma y la multiplicación. La división es una operación algebraica, que no se aplica a matrices; por lo que, en este libro se analiza las dos primeras operaciones.Para todo tipo de análisis con matrices de debe entender que, se esta en un campo matemático definido como $\mathbb{K}$. mencionadas.

Igualdad de Matrices.

Dos matrices $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$ de la misma dimensión (n x m) se llaman iguales o idénticas; si todos sus elementos correspondientes de las dos matrices ubicados en los mismos lugares son iguales. lo que significa que:

$a_{i,j} = b_{i,j}$ donde: $i = 1, 2, \cdots, n.$, $j = l, 2, \cdots, m.$

Las propiedades de igualdad de las matrices son:

1. Reflexiva, A = A
2. Simétricas, lo que significa: Si A = B entonces B = A.
3. Transitiva, Si A = B y B = C entonces A = C

Suma de Matrices.

Si se considera el conjunto de todas las matrices de dimensión determinada n x m, y en este conjunto se define la operación de suma y la operación de multiplicación por una constante, así definidos las operaciones de matrices es lo que se denomina un conjunto lineal, también conocida como espacio lineal. Esta definición cada vez toma mas importancia en la matemática moderna.

El espacio lineal sobre un cuerpo de números reales $\mathbb{R}$ se llama un conjunto de X en el cual son dos operaciones:

1. Suma de elementos del conjunto X
2. Multiplicación de elementos del conjunto X por una constante.

La suma de dos matrices $A = [a_{i,j}]_{nxm}$ y $B = [b_{i,j}]_{nxm}$ se define solamente para matrices de igual dimensión, se llama a la matriz $C = [c_{i,j}]_{nxm}$, donde todos sus elementos son el resultado de la suma de los elementos correspondientes de ambas matrices:

$$\mathrm{C = A + B} \quad \leftrightarrow \quad [a_{i,j}]_{nxm} + [b_{i,j}]_{nxm} = [a_{ij} + b_{ij}]_{nxm} = [c_{i,j}]_{nxm},$$

Donde: $i = 1, 2, \cdots, n \;\; y \;\; j = 1, 2, \cdots, m.$

La definición anterior se puede generalizar para cualquier número finito de matrices. De esta definición resultan las siguientes propiedades:

1. La suma de matrices cumple la propiedad conmutativa; por lo tanto,

   A + B = B + A

   Demostración:

   Se define dos matrices con la misma dimensión: A_{nxm}, B_{nxm} sus elementos están definidos: $(a_{ij})_{nxm}, (b_{ij})_{nxm}$; por lo tanto:

   $A_{nxm} + B_{nxm} = (a_{ij})_{nxm} + (b_{ij})_{nxm} = (a_{ij} + b_{ij})_{nxm} = (b_{ij} + a_{ij})_{nxm} =$

   $= (b_{ij})_{nxm} + (a_{ij})_{nxm} = B_{nxm} + A_{nxm}$

2. La suma de matrices cumple la propiedad asociativa; por lo tanto:
   (A + B) + C = A + (B + C).

   Demostración:

   Se define tres matrices, en el campo $\mathbb{K}$, con la misma dimensión: $A_{nxm}, B_{nxm} \;\; y \;\; C_{nxm}$ y sus elementos están definidos: $(a_{ij})_{nxm}, (b_{ij})_{nxm} \;\; y \;\; (c_{ij})_{nxm}$; por lo tanto:

   $(A_{nxm} + B_{nxm}) + C_{nxm} = ((a_{ij})_{nxm} + (b_{ij})_{nxm}) + (c_{ij})_{nxm} = (a_{ij} + b_{ij})_{nxm} + (c_{ij})_{nxm} =$

   $= ((a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}))_{nxm} = ((a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})))_{nxm} = ((a_{ij})_{nxm} + (b_{ij} + c_{ij})_{nxm}) =$

   $= A_{nxm} + (B_{nxm} + C_{nxm})$

3. La suma de matrices cumple la propiedad de identidad; por lo tanto:

   A + $\mathbb{N}$ = A

   Demostración:

   Se define dos matrices con la misma dimensión: A_{nxm}, N_{nxm} sus elementos están definidos: $(a_{ij})_{nxm}, (0_{ij})_{nxm}$; por lo tanto:

   $(A_{nxm} + N_{nxm}) = ((a_{ij})_{nxm} + (0_{ij})_{nxm}) = (a_{ij} + 0_{ij})_{nxm} = (a_{ij}) = A_{nxm}$

4. La suma de matrices cumple la propiedad de transpuesta; por lo tanto,

   $(A + B)^T = A^T + B^T$

   Demostración:

Se define dos matrices, en el campo $\mathbb{K}$, con la misma dimensión: A_{nxm}, B_{nxm} y sus elementos están definidos: $(a_{ij})_{nxm}, (b_{ij})_{nxm}$; por lo tanto:

$$(A_{nxm} + B_{nxm})^T = ((a_{ij})_{nxm} + (b_{ij})_{nxm})^T = (a_{ij} + b_{ij})^T_{nxm} = (c_{ij})^T = c_{ji} =$$
$$= ((a_{ji} + b_{ji}))_{nxm} = ((a_{ji})_{nxm} + (b_{ji})_{nxm}) = ((a_{ij})^T_{nxm} + (b_{ij})^T_{nxm}) = A^T + B^T$$

La diferencia de dos matrices: A - B se define igualmente para matrices de las mismas dimensiones. Se llama una matriz, que es la suma de matriz A con la matriz opuesta de la matriz B, lo que significa:

A - B = A + (-B)

De la definición resulta, que la diferencia entre la matriz $A = [a_{ij}]_{nxm}$ con $B = [b_{ij}]_{nxm}$ de las mismas dimensiones, es la matriz $C = [c_{ij}]_{nxm} = [a_{ij} - b_{ij}]_{nxm}$ y sus elementos son la diferencia con los elementos correspondientes de las matrices.
Como se aprecia las dos matrices son de orden 3x3; por lo tanto , es posible la suma.
Realice las suma de dos matrices dadas:

$$[a_{i,j}]_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad [b_{i,j}]_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -3 & 2 & 8 \\ 6 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de Matrices.

Multiplicación de una Constante por una Matrices.

El producto de una matriz A y un escalar λ se llama a la matriz B de dimensión igual a la matriz A, donde los elementos de la matriz $[b_{ij}]_{nxm}$ es el producto de los elementos de la matriz $[a_{ij}]_{nxm}$ correspondientes (todos sus elementos) a la matriz A y escalar λ, lo que significa:

$B = \lambda \cdot A \leftrightarrow [b_{ij}]_{nxm} = \lambda[a_{ij}]_{nxm} = [\lambda \cdot a_{ij}]_{nxm}$, donde: $i = 1, 2, \cdots, n$ y $j = 1, 2, \cdots, m$.

De la misma forma, el conjunto de todas las matrices de dimensión determinada n x m, y en este conjunto se define, además de la operación de suma y la operación de multiplicación por una constante, así definidos estas operaciones de matrices es lo que se denomina un anillo lineal. Esta definición cada vez toma mas importancia en la matemática moderna.
el espacio lineal sobre un cuerpo de números reales $\mathbb{R}$ se llama un conjunto de X en el cual son dos operaciones:

1. Suma de elementos del conjunto X
2. Multiplicación de elementos del conjunto X por una constante.

Por lo tanto, la multiplicación de cualquier matriz por cualquier número, se lo hace multiplicando todos los elementos de esta matriz por ese numero.
Si A, B son matrices con las mismas dimensiones y α, β son números reales o complejos. Como resultado de la definición surgen las siguientes propiedades:

1. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A.$

   Demostración:

   Se define la matriz, en el campo $\mathbb{K}$, con la dimensión: $A_{mxn}\ \ y\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y sus elementos están definidos:

   $\alpha \cdot (\beta A_{nxm}) = \alpha \cdot (\beta(a_{ij})_{nxm}) = \alpha \cdot (\beta a_{ij})_{nxm} = (\alpha \cdot \beta a_{ij})_{nxm} = ((\alpha \cdot \beta)(a_{ij}))_{nxm} = (\alpha \cdot \beta)((a_{ij}))_{nxm} = (\alpha \cdot \beta) \cdot A_{nxm}$

2. $(\alpha + \beta) \cdot A_{nxm} = \alpha \cdot A_{nxm} + \beta A_{nxm}.$

   Demostración:

   Se define la matriz, en el campo $\mathbb{K}$, con la dimensión: $A_{nxm}\ \ y\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y sus elementos están definidos:

   $(\alpha + \beta) \cdot A = (\alpha + \beta) \cdot (a_{ij})_{nxm} = ((\alpha + \beta) \cdot (a_{ij}))_{nxm} = ((\alpha \cdot (a_{ij}) + (\beta \cdot (a_{ij}))_{nxm} = (\alpha \cdot (a_{ij})_{nxm}) + (\beta \cdot a_{ij})_{nxm} = \alpha \cdot ((a_{ij})_{nxm}) + \beta \cdot (a_{ij})_{nxm} = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

3. $\alpha \cdot (A_{nxm} + B_{nxm}) = \alpha \cdot A_{nxm} + \alpha \cdot B_{nxm},$

   Demostración:

   Se define las dos matrices, en el campo $\mathbb{K}$, con la misma dimensión: A_{nxm}, B_{nxm} y sus elementos están definidos:

   $\alpha \cdot (A_{nxm} + B_{nxm}) = \alpha \cdot ((a_{ij})_{nxm} + (b_{ij})_{nxm}) = \alpha(a_{ij} + b_{ij})_{nxm} = (\alpha \cdot a_{ij} + \alpha \cdot b_{ij})_{nxm} = (\alpha a_{ij})_{nxm} + (\alpha \cdot b_{ij})_{nxm} = \alpha(a_{ij})_{nxm} + \alpha \cdot (b_{ij})_{nxm} = \alpha \cdot A_{nxm} + \alpha \cdot B_{nxm}$

4. $(\alpha \cdot A_{nxm})^T = \alpha \cdot (A_{nxm})^T$

   Demostración:

   Se define la matriz, en el campo $\mathbb{K}$, con la misma dimensión: $A_{nxm},\ \ y\ \ \alpha \in \mathbb{K}$ y sus elementos están definidos:

   $(\alpha \cdot A_{nxm})^T = (\alpha \cdot (a_{ij})_{nxm})^T = (\alpha \cdot a_{ji}) = (\alpha(a_{ij})_{nxm}) = \alpha(a_{ij})_{nxm}) = \alpha \cdot (A_{nxm})^T$

5. $\alpha \cdot \mathbb{N}_{nxm} = 0$

   Demostración:

   Se define la matriz, en el campo $\mathbb{K}$, con la dimensión: $\mathbb{N}_{nxm}$ y sus elementos están definidos:

   $\alpha \cdot \mathbb{N}_{nxm} = \alpha(n_{ij})_{nxm} = \alpha(0_{ij})_{nxm} = (\alpha \cdot 0_{ij})_{nxm} = (0_{ij})_{nxm} = (n_{ij})_{nxm} = \mathbb{N}_{nxm} = 0$

El producto (-1) por una matriz A se lo escribe con el símbolo –A y lo se llama matriz opuesta a la matriz A.
Determinar la matriz A = X - 2Y + 3$\mathbb{E}$, cuando:

$$X_{2x2} = [x_{2x2}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad Y_{2x2} = [y_{2x2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

La letra $\mathbb{E}$ significa la matriz unitaria con la dimensión correspondiente. Como las matrices X y Y son de segundo orden, la matriz unitaria $\mathbb{E}$ también es de segundo orden. Aplicando las definiciones; de multiplicación de matriz por una cifra, de suma, diferencia de matrices y la ley asociativa se obtiene:

$$A = X - 2Y + 3\mathbb{E} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 14 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de Matrices.

la operación algebraica de la multiplicación de matrices esta definida, si el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B, entonces el producto $A_{n,r} \cdot B_{r,m}$ de la matriz $A = a_{ij}$ de dimensión n x r, por la matriz $B = b_{jk}$ de dimensión r x m se llama una matriz $C = c_{ik}$ de dimensión n x m en la cual, sus elementos de la matriz C_{ik} que están ubicados en la i-fila y k-columna es igual a la suma de los productos de los elementos correspondientes de la i-fila de la primera matriz por los elementos de la k-columna de la segunda matriz, lo que significa:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{ir} \cdot b_{rk} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

En la multiplicación de matrices, cómodo es aplicar lo que se conoce con el nombre de esquema de Falk.

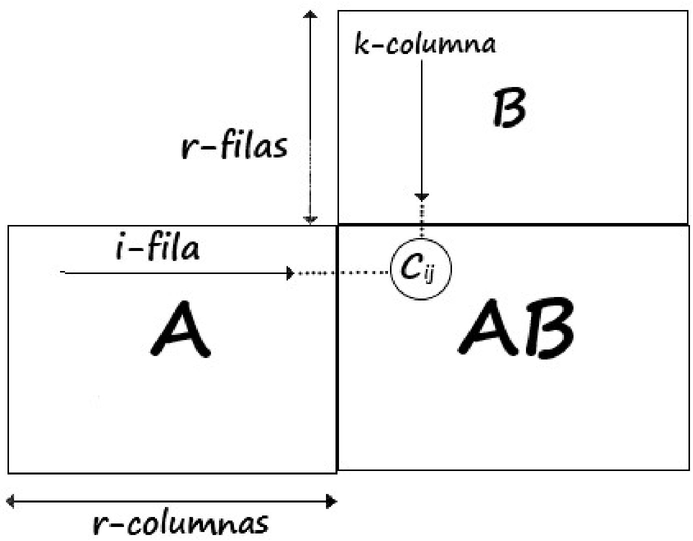

Figura 1.4 Esquema de Falk

De la formula anterior los elementos de C_{ij} de la matriz $C = A \cdot B$ es la suma de los productos de los elementos de fila i de la matriz A y los elementos de la columna j de la matriz B.
Cuando el número de columnas en la matriz A_{nxp} es diferente con número de líneas de la matriz B_{qxm}, lo que significa $p \neq q$, en ese caso multiplicación es no realizable.

La multiplicación de matrices no es conmutable, que significa en general:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Por lo tanto, se debe diferenciar la multiplicación de izquierda a derecha de la matriz A por la matriz B, es decir $A \cdot B$ y la multiplicación de derecha a izquierda de la matriz A por la matriz B, por lo tanto, $B \cdot A$.
Si las matrices A y B cumplen la condición:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Se las llama matrices conmutativas.
En base a las últimas definiciones resultan las siguientes propiedades:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ **Asociativa.**

   Demostración:

   Las matrices A,B y C pertenecen en un campo (dominio) $\mathbb{K}$ y son compatibles para el producto. Se define el producto $D = B \cdot C$

   $$D = B \cdot C \quad \longrightarrow \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot c_{kj} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

   Sea el producto de matrices $E = A \cdot D$:

   $$E = A \cdot D \quad \longrightarrow \quad e_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} \cdot d_{rj} = \left(\sum_{r=1}^{m} a_{ir} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{rk} \cdot c_{kj} \right) \right) = \left(\sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ir} b_{rk} \cdot c_{kj} \right)$$

   Por el lado derecho de la igualdad se realiza un proceso parecido:

   $$F = A \cdot B \quad \longrightarrow \quad f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

   Sea el producto de matrices: $G = F \cdot C$:

   $$G = F \cdot C \quad \longrightarrow \quad g_{ij} = \left(\sum_{r=1}^{m} f_{ir} \cdot c_{rj} \right) = \left(\sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} \right) c_{rj} \right) = \left(\sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kr} \cdot c_{rj} \right)$$

   Se obtuvo que, E = G; por lo tanto, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (b \cdot C)$

2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$ **Distributiva lado derecho**

   Demostración:

   Las matrices A,B y C pertenecen en un campo $\mathbb{K}$ y son compatibles para el producto y la suma.
   Se define la suma $D = A + B$

   $$D = A + B \quad \longrightarrow \quad d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

   y $E = D \cdot C$

   $$E = D \cdot C \quad \longrightarrow \quad e_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{m} d_{ik} \cdot c_{kj} \right) = \left(\sum_{k=1}^{m} (a_{kj} + b_{kj}) \cdot c_{kj} \right) = \left(\sum_{k=1}^{m} (a_{ik} \cdot c_{kj} + b_{ik} \cdot c_{kj}) \right)$$

   $$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot c_{kj} \right) + \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot c_{kj} \right) = A \cdot C + B \cdot C$$

3. $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$ **Distributiva lado izquierdo.**

   Demostración:

   Las matrices A,B y C pertenecen en un campo $\mathbb{K}$ y son compatibles para el producto y la suma.
   Se define la suma $D=A+B$

   $D=A+B \quad \longrightarrow \quad d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

   y $E=C\cdot D$

   $$E=C{\cdot}D \quad \longrightarrow \quad e_{ij}=\left(\sum_{k=1}^{m}c_{ik}\cdot d_{kj}\right)=\left(\sum_{k=1}^{m}c_{ik}(a_{kj}+b_{kj})\right)=\left(\sum_{k=1}^{m}(c_{ik}\cdot a_{kj}+c_{ik}\cdot b_{kj})\right)$$

   $$=\left(\sum_{k=1}^{m}c_{ik}\cdot a_{kj}\right)+\left(\sum_{k=1}^{m}c_{ik}\cdot b_{kj}\right)=C\cdot A+C\cdot B$$

4. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$ **Transpuesta con relación a la multiplicación.**

   Las matrices A y B pertenecen en un campo $\mathbb{K}$ y son compatibles para el producto.

   $$(A\cdot B)^T=\left(\sum_{\forall k}a_{ik}\cdot b_{kj}\right)^T=\left(\sum_{\forall k}a_{jk}\cdot b_{ki}\right)=\left(\sum_{\forall k}(a_{kj})^T\cdot(b_{ik})^T\right)=\left(\sum_{\forall k}(b_{ik})^T\cdot(a_{kj})^T\right)=$$

   $$=B^T\cdot A^T$$

5. $\mathbb{E}\cdot A=A \quad$ y $\quad A\cdot\mathbb{E}=A$

   Demostración:

   Las matrices $\mathbb{E}$ (matriz diagonal) y A pertenecen en un campo $\mathbb{K}$ y son compatibles para el producto.

   $$\mathbb{E}\cdot A=A \quad \longrightarrow \quad \left(\sum_{k=1}e_{ik}\cdot a_{kj}\right)=\left(\sum_{k=1}a_{ij}\right)=A$$

6. $\mathbb{O}\cdot A=\mathbb{O} \quad$ y $\quad A\cdot\mathbb{O}=\mathbb{O}$ **Identidad.**

   Demostración:

   La matriz $\mathbb{O}$, indica que es una matriz nula,es decir, todos sus elementos son igual a cero, $(n_{ij})_{mxn}=0$; por lo tanto, el producto de la matriz nula con cualquier matriz debe ser cero.

Realice la multiplicación de las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&1\\3&1&-1\\1&-3&2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4&-3\\6&-7\\5&-3\end{bmatrix}$$

La matriz A tiene 3 columnas, la matriz B tiene 3 filas; por lo que, es posible realizar la multiplicación.

$$\begin{bmatrix}2&-2&1\\3&1&-1\\1&-3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&-3\\6&-7\\5&-3\end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 4 + (-2\cdot 6) + 1\cdot 5 = 1 & 2\cdot(-3) + (-2\cdot(-7)) + 1\cdot(-3) = 5 \\ 3\cdot 4 + 1\cdot 6 + (-1\cdot 5) = 13 & 3\cdot(-3) + 1\cdot(-7) + (-1)\cdot(-3) = 13 \\ 1\cdot 4 + (-3\cdot 6) + 2\cdot 5 = -3 & 1\cdot(-3) + (-3)\cdot(-7) + 2\cdot(-3) = -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 13 & 13 \\ -3 & -24 \end{bmatrix}$$

División de Matrices en Sub-matrices, Matrices en Bloques.

Se Dice que la matriz $A = [a_{i,j}]_{nxm}$ toma forma de bloques (celular, caja, cuadro), cuando, por medio de algunos líneas horizontales y verticales queda dividida en cuadros y se llaman sub-matrices.
Por ejemplo, por medio de una recta horizontal y otra vertical la matriz, se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta matriz se puede obtener diferentes sub-matrices:

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad A_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad A_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ \hline 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Como se puede observar de una Matriz se puede obtener diferentes sub-matrices, ya que, en cada uno de los casos las sub-matrices tienen diferentes elementos y si el caso fuese necesario se podría construir mas de 4 sub-matrices.
En cada uno de estas sub-matrices se la puede escribir de la forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} Q & T \\ \hline R & M \end{array}\right]$$ Donde: D,T,R, Y M son sub-matrices.

1.3.5. Sistema lineales con Matrices.

Representación de un Sistema de Ecuaciones Lineales con n Variables con Matrices.

Con el conocimiento de los elementos y operaciones con matrices, se puede representar un sistema de ecuaciones lineales de n variables. Un sistema de n ecuaciones esta dado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

El sistema se lo puede representar en su forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ Matriz de los coeficientes de las variables

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ Matriz columna de las variables.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ Matriz columna de los coeficientes libres.

Con esta matrices se presenta un sistema de ecuaciones lineales de n variables:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si se representa a la matriz de los coeficientes de las variables con A, a la matriz de variables con X y a la matriz de los coeficientes libres con B, se puede representar a un sistema de ecuaciones en forme mas sencilla:

$$A \cdot X = B$$

Como se observa, lo escrito , es una identidad y por lo tanto, se puede escribir:

$$A \cdot X = B \quad \longrightarrow \quad X = \frac{B}{A} \quad \longrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Lo ultimo se pudo escribir gracias a las propiedades de una función exponencial. Con lo cual aparece un nuevo tipo de matriz, que se denomina, matriz inversa. A^{-1} es la matriz inversa de A.
Se debe poner atención que, el lado derecho de la igualdad se escribió: $A^{-1} \cdot B$, en esta forma cumple con la condición de existencia de multiplicación de matrices y no $B \cdot A^{-1}$ ya que, en esta forma no cumple la condición de existencia de una multiplicación de matrices. Por lo cual , aparece la condición de : $A \neq 0$.
En el momento en el cual, en vez de una constante se utiliza una variable Y; por lo tanto, se tiene lo que se define como transformaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

1.3.6. Métodos de Calculo de la Matriz Inversa.

Los métodos de calculo de una matriz inversa están basados en lo que, hasta ahora se ha analizado en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. El método de operaciones elementales ,que esta basado en el método de Gauss-Jordán, el segundo, de la matriz adjunta, que esta basado en determinantes.

1.3.7. Método de Operaciones Elementales para Obtener la Matriz Inversa.

El método de operaciones elementales sobre la matriz se llama cada uno de siguientes transformaciones:

1. Transposición (intercambio de puestos) de dos filas cualquiera (columnas).
2. Se suma a todos los elementos de una fila (columna) los correspondientes elementos de otros elementos de otra fila (columna), multiplicados por la cifra.
3. Multiplicar a todos los elementos de una fila (columna) por una cifra diferente a cero

Cuando la matriz B se forma de la matriz A por medio de operaciones elementales, entonces las matrices A y B se llaman equivalentes y se anota: $A \sim B$.
Las operaciones elementales pueden ser utilizadas para determinar la matriz inversa. Nos interesa la matriz inversa de una matriz no singular A, la matriz B significa una matriz de bloques construida del modo siguiente: $B = [A|\mathbb{E}]$. Donde: $\mathbb{E}$ es la matriz unitaria con mismo grado que la matriz A.
Si la matriz de bloques C = $[E \mid D]$ es el resultado de la aplicación de operaciones elementales sobre las filas de la matriz B = $[A \mid E]$, entonces $D = A^{-1}$.
El método de Gauss-Jordán crea la matriz aumentada, en la cual, se aplica operaciones elementales, suma y multiplicación, para obtener la matriz unidad, cuando esto se logra, se ha resuelto el sistema de ecuaciones. En este método se parte de la propiedad, toda matriz multiplicada por su matriz inversa es igual a la matriz unidad, que es una propiedad de la función exponencial:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad \longrightarrow \quad a^n \cdot a^{-n} = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{si n} = 1 \quad \longrightarrow \quad a^1 \cdot a^{-1} = 1$$

Si esto se considera en matrices, se puede relacionar que: la matriz A y su inversa A^{-1} deben ser del mismo orden y que su producto debe ser igual a la unidad,ademas en nuestro caso, se conoce los elementos de la matriz A, que son los coeficientes de las variables y la matriz inversa A^{-1} no se conoce.
En este análisis se utiliza un sistema de ecuaciones de 2x2, por lo que se puede decir:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a_1x & + & b_1y & = & c_1 \end{array} \right. \quad \text{Donde : } a, b, a_1, b_1 \text{ son coeficientes conocidos.}$$

Se aplica lo escrito:

$$A \cdot A^{-1} = 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes e, f, g, h son los coeficientes de la matriz inversa y es lo que se desea conocer. Se realiza la multiplicación de matrices:

$$\begin{bmatrix} a\cdot e+b\cdot g & a\cdot f+b\cdot h \\ a_1\cdot e+b_1\cdot g & a_1\cdot f+b_1\cdot h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que dos matrices sean iguale sus correspondientes elementos deben ser iguales. La aplicación de esta propiedad permite obtener el sistema:

$$\begin{cases} a\cdot e+b\cdot g &=& 1 \\ a_1\cdot e+b_1\cdot g &=& 0 \\ a\cdot f+b\cdot h &=& 0 \\ a_1\cdot f+b_1\cdot h &=& 1 \end{cases}$$

Como se observa, la primera y segunda ecuación tienen las mismas variables(e,g), la tercera y cuarta tienen las variables(f,h). Se forma dos sistemas:

$$\begin{cases} a\cdot e+b\cdot g &=& 1 \\ a_1\cdot e+b_1\cdot g &=& 0 \end{cases} \quad \text{El segundo sistema} \quad \begin{cases} a\cdot f+b\cdot h &=& 0 \\ a_1\cdot f+b_1\cdot h &=& 1 \end{cases}$$

Se aplica el método de Gauss-Jordán a cada sistema; por lo que:

$$\begin{cases} a &+& b &=& 1 \\ a_1 &+& b_1 &=& 0 \end{cases} \quad Matriz \quad Aumentada \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ a_1 & b_1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a &+& b &=& 1 \\ a_1 &+& b_1 &=& 0 \end{cases} \quad Matriz \quad Aumentada \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{array}\right]$$

Como se observa, en ambos sistemas la parte izquierda es la misma, varia la parte derecha, pero también se observa, que la matriz aumentada esta formada por la matriz de coeficientes de las variables y por la matriz unidad, es decir:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Al aplicar propiedades y operaciones elementales, suma multiplicación, a esta ultima matriz aumentada, para lograr pasar la matriz unidad del lado derecho al lado izquierdo de la matriz, en ese momento, se habrá resulto los sistemas y por lo tanto, se habrá obtenido los coeficientes de la matriz inversa.
Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x &+& 2y &+& 3z &=& 14 \\ 3x &+& y &+& 2z &=& 11 \\ 2x &+& 3y &+& z &=& 11 \end{cases}$$

Se represente el sistema con matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

La matriz columna de las variables es igual:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Se requiere el calculo de la matriz inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_1(-3)+f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_1(-2)+f_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_3(2)+f_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_3(5)+f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_3 \leftrightarrow f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right] \quad f_3\left(\frac{1}{18}\right) \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{array}\right] \quad f_3(5)+f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{array}\right] \quad f_3(7)+f_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{array}\right] \quad f_2(-1) \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{array}\right]$$

Por el lado derecho se tiene la matriz unidad; por lo tanto, al lado derecho se tiene la matriz inversa.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Todos los elementos de la matriz inversa, tienen un factor; por lo que, se aplica la propiedad de matrices:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Después de realizar la multiplicación de matrices, queda:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 18 \\ 36 \\ 54 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{x = 1; y = 2; z = 3}$$

1.3.8. Método de Cofactores, determinantes

Si se considera una matriz cuadrada $A = [a_{i,k}]$ (i,j $= 1, 2, 34, \cdots, n$) y de cada elemento de ella, se forma su complemento algebraico para formar una nueva matriz de complementos algebraicos, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

De la matriz obtenida se forma una matriz transpuesta:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow (A^*)^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{3n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz obtenida se denomina matriz adjunta y se simboliza: A^D
Si una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ es una matriz no-singular, es decir, su $Det.A \neq 0$, implica que existe su matriz inversa A^{-1}, la cual es igual al producto de la matriz adjunto multiplicada por la inversa de su determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{Det.A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{3n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Obtenga la matriz inversa de :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Primero se obtiene el valor del determinante A, para confirmar si existe la matriz inversa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} f_1(-3)+f_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} f_1(-2)+f_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Se desarrolla la matriz para la columna uno:

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = -(18-15) = -3$$

Como el $det.A \neq 0$, existe la matriz inversa. Se obtiene la matriz de complementos algebraicos:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

A la ultima matriz la multiplicamos por $(-1)^{i,j}$:

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz adjunta,para lo cual se transpone la matriz de complementos algebraicos:

$$A^D = [A^*_{i,j}]^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz inversa, que es el producto de la matriz adjunta A^D por el valor inverso del determinante de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{Det.A} \cdot A^D = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como ejercicio se deja al estudiante la demostración del producto de $A \cdot A^{-1} = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedades de una Matriz Inversa.

Las propiedades de la matriz inversa Son:

1. $\mathbb{E}^{-1} = \mathbb{E}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
4. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
5. $detA \cdot detA^{-1} = 1$
6. Si $\lambda \neq 0 \quad \longrightarrow \quad (\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$

1.3.9. Matriz Ortogonal.

De geometría analítica se conoce, que las coordenadas de un punto (x,y) que gira alrededor del punto de origen con un angulo α en dirección positiva, cambia al punto (x_1, x_2) por lo cual:

$$\begin{cases} x_1 & = & x \cdot \cos(\alpha) & - & y \cdot \sin(\alpha) \\ y_1 & = & x \cdot \sin(\alpha) & + & y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

Es la transformación lineal de puntos del plano (x,y) a los puntos del plano de coordenadas (x_1, y_1). la matriz de esta transformación lineal es:

$$W = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es una matriz no-singular, ya que:

$$Det.W = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \neq 0$$

Al formar la matriz de complementos algebraicas de la matriz W y después de ella, obtener la matriz transpuesta, se obtiene la matriz adjunta W^D y al multiplicarla por $\dfrac{1}{Det.W} = 1$:

$$Det.W^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Pero a la vez, esta matriz es igual a ala matriz transpuesta:

$$W^{-1} = W^T$$

Es un ejemplo de lo que se denomina , matriz ortogonal.
El análisis general indica que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal, si su matriz inversa A^{-1} es igual a su matriz A^T es decir:

$$A^{-1} = A^T.$$

Si una matriz es ortogonal, entonces:

$$A \cdot A^T = a \cdot A^{-1} = \mathbb{E}, \quad \text{ademas,} \quad A^T \cdot A = \mathbb{E}$$

De estas identidades, se puede obtener las siguientes propiedades:

1. La suma de los cuadrados de todos los elementos de cualquier fila o columna de una matriz ortogonal es igual a 1

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 1 \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, 4, \cdots, \text{n}$$
$$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2 + \cdots + a_{nk}^2 = 1 \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, 4, \cdots, \text{n}$$

2. La suma del producto de todos los correspondientes elementos de dos diferentes filas o dos diferentes columnas de una matriz ortogonal es igual a cero

$$a_{i1} \cdot a_{j1} + a_{i2} \cdot a_{j2} + a_{i3} \cdot a_{j3} + \cdots + a_{in} \cdot a_{jn} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \quad i,j = 1,2,3,\cdots,n$$
$$a_{1k} \cdot a_{1l} + a_{2i} \cdot a_{2l} + a_{3i} \cdot a_{3l} + \cdots + a_{nk} \cdot a_{nl} = 0 \quad \text{para} \quad k \neq l \quad k,l = 1,2,3,\cdots,n$$

3. $Det.A \cdot Det.A^t = \mathbb{E}$ Pero como, Det. A = Det. $A^T; Det.\mathbb{E} = 1$

$$(Det.A)^2 = Det.\mathbb{E} \quad \longrightarrow \quad Det.A = \pm 1$$

Se demostró que, el determinante de una matriz ortogonal puede ser solamente igual a ±1.

1.3.10. Ecuación Característica de una Matriz.

De una matriz cuadrada A de grado n con elementos $[a_{ik}]$ donde: $i,k = 1,2,3,4,\cdots,n$, se forma una nueva matriz, restando la variable λ de todos los elementos ubicados en la diagonal principal y los demás elementos quedan sin cambios.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

El determinante de esta nueva matriz igualando a cero se obtiene una ecuación de grado n con relación a λ, la cual, se llama ecuación característica de la matriz A. Las raíces de esta ecuación, diferentes de cero de la matriz no-singular se llaman valores propios de la matriz A.
encontrar los valores propios de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la ecuación característica de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

De donde: $(2-\lambda)(5-\lambda) - 1 = 0$ se obtiene: $\lambda^2 - 7\lambda + 9 = 0$
Su discriminante $\Delta = 49 - 36 = 13 > 0$ por lo cual, la ecuación tiene dos raíces:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{13}) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{13})$$

Son los valores propios de la matriz A.
Ademas, se puede demostrar que la matriz A es la raíz de su ecuación característica, para lo cual, debe cumplir:

$A^2 - 7A + 9\mathbb{E} = \mathbb{O}$

$$A^2 - 7A + 9\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 5 \\ 1\cdot 2 + 5\cdot 1 & 1\cdot 1 + 5\cdot 5 \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & -7 \\ -7 & -35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En base a lo cual, aparece el teorema de Cayley-Hamilton: Una matriz cuadrada cualquiera, es raíz de su ecuación característica.

1.3.11. Rango de una Matriz.

Si en una matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ tachamos un número determinado de filas i columnas, entonces se obtiene una matriz nueva A que se llama submatriz de la matriz A. Si una submatriz A de la matriz A es una matriz cuadrada, entonces el determinante de esta matriz se llama determinante extraído de la matriz A.
El rango r(A) de una matriz A, se llama el valor de mayor grado de un determinante, extraído de esta matriz A y que no es igual a cero.
De la definición de rango de una matriz, resultan las siguientes implicaciones:

1. $A = [a_{ij} ij]mxn \quad \longrightarrow \quad 0 \leq r(A) \leq min(m,n),$
2. Si el valor del Det. $A_{nxn} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad r(A) = r(A^T) = r(A^{-1} = n.$
3. Si el valor del Det.$A_{nxn} = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 \leq\leq r(A) - r(A^T) \leq n.$

El cálculo del rango de una matriz solamente en base a la definición seria problemático, este problema se lo soluciona por medio de la transformación de una matriz por medio de las operaciones elementales, como ya se sabe, la matriz no cambia de valor de su rango, cuando se aplica operaciones elementales.
Se puede demostrar que, para cualquier matriz A de dimensiones m x n, se puede utilizar las transformaciones elementales para reducir a la forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_k & \mathbb{R} \\ \hline \mathbb{N}_1 & \mathbb{N}_2 \end{array}\right] \quad .$$

La cual es conocida como matriz canónica la que contiene: una sub-matriz unitaria $\mathbb{E}_{\neg\lessdot}$ de grado k, una sub-matriz $\mathbb{R}$ llamada matriz residual y sub-matrices nulas $\mathbb{N}_{\nVdash}$ y $\mathbb{N}_{\nVdash}$.
Los casos que pueden suceder entre k y la dimensión de la matriz:

1. Si k = m, entonces la matriz canónica no tiene sub-matrices nulas

2. Si k = n, entonces no tiene sub-matriz $\mathbb{R}$.

De lo escrito se puede deducir que: el rango de la matriz A, es igual al grado de la matriz unitaria, que aparece en su forma canónica.
Encontrar el rango de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ -3 & -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Se aplica el método de operaciones básicas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ -3 & -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad f_1(-2)+f_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad f_1(3)+f_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f_2(-2)+f_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la matriz obtenida se puede obtener las sub-matrices; por lo que, el rango de la matriz es dos.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Las definiciones de rango, también permite aplicarlas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en especial en sistemas rectangulares. Si se tiene un sistema rectangular lo que se desea conocer es si es posible su resolución.

1.3.12. Sistema de m Ecuaciones Lineales de n Variables

Un sistema de m ecuaciones lineales de n variables es:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

El sistema puede ser homogéneo o no-homogéneo, todas las ecuaciones o algunas de ellas. por lo que puede suceder::

1. El número de ecuaciones puede ser menor que el numero de variables (m ¡n)

2. El número de ecuaciones puede ser igual que el numero de variables (m = n)

3. El número de ecuaciones puede ser mayor que el numero de variables (m ¿n).

Del sistema escrito se puede formar varias matrices:

1. La matriz de los coeficientes de las variables, definida como W

$$W = \begin{bmatrix} a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} & + & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} & + & a_{23} & + & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & + & a_{m2} & + & a_{m3} & + & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2. la matriz completa, que es la matriz formada por los coeficientes de las variable y los coeficientes libres del sistema de ecuaciones lineales, definida como U:

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & + & a_{22} & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{m1} & + & a_{m2} & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

La matriz U se obtuvo de la matriz W al aumentar una columna mas, formada por los coeficientes libres del sistema.

El rango de la matriz W, es decir, r(W), es el determinante de mayor grado sacado de ella diferente de cero. Si todos los elementos de la matriz son cero, entonces su rango es igual a cero.
el teorema de Kronecker-Capelli, el cual habla sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales, dice: La condición suficiente y necesaria para la solución de un sistema de m ecuaciones de n variables es la igualdad del rango de la matriz W y U:

r = r(W) = r(U).

Puede suceder:

1. El rango de estas matrices son iguales al numero de variables n del sistema; por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución

2. El rango de estas matrices es menor al numero de variables n del sistema; por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene una cantidad infinita de soluciones, el cual depende de n - r parámetros.

3. El rango de estas matrices es mayor al numero de variables n del sistema; por lo tanto, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Se debe observar, que siempre: $r(W) \leq n$
Resuelva el sistema:

$$A = \begin{cases} 5x + 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

Se forma la matriz de coeficientes de las variables; así como, la matriz completa:

$$W = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

El determinante máximo que se puede obtener es de grado cuatro, sin embargo la matriz completa:

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se requiere determinar el rango de U, para lo cual se calcula el valor del determinante:

$$Det.U = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad c_3(1)+c_2. \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} f_4(-2)+f_1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante con relación a la columna dos:

$$(1)(-1)^{i+j=6} = 6 \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \quad c_2(2)+c_1 \quad \begin{vmatrix} -7 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -7 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -4 \end{vmatrix} c_2(1)+c_3 \begin{vmatrix} -7 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante con relación a la fila dos:

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = (14-14) = 0$$

Por lo tanto, el rango de $r(U) < 4$. Se analiza el rango de r(W) y en el caso ue sea diferente de cero r(W) = r(U). Se calcula el valor del determinante de W.

$$W = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \quad c_2(-2)+c_1 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 2 \end{vmatrix} \quad c_2(1)+c_3 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante con relación la fila dos:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = ((-1)0 + 2\cdot 7 = 14)$$

Por lo tanto, r(W) = r(U) = 3. El sistema tiene solución única, que es igual a $x = -\frac{2}{7}; y = \frac{10}{7}; z = -\frac{1}{7}$ El estudiante debe comprobar las respuestas.

1.4. Sistema de Ecuaciones No-lineales

Si se Define a D como un conjunto de todos los subconjuntos del plano cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$; por lo tanto, su dominio será el conjunto de pares ordenados de los números reales y a Z como un conjunto de todos los subconjuntos de los números reales; por lo tanto, sera su codominio. La relación del Conjunto D al conjunto Z se llama función de dos variables en x e y. Lo cual se escribe:

z = f(x,y) cuando $(x,y) \in D$

Si A(x,y) y B(x,y) son polinomios de dos variables. El sistema de ecuaciones se lo representa:

$$\begin{cases} A(x,y) & = & 0 \\ B(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

Se llama sistema de ecuaciones no-lineales algebraicas, en este caso, de dos variables. Todo par ordenado que cumple el sistema así definido, se le domina solución al sistema de ecuaciones no-lineales. En el proceso de resolver un sistema de ecuaciones no-lineales de dos variables, se utiliza los métodos clásicos de solución, es decir:

1. Substitución
2. Igualación
3. Suma y resta
4. Productos notables.

Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x^2 & + & y^2 & = & 26 \\ x & \cdot & y & = & 5 \end{cases}$$

De la segunda condición despejamos una de las variables:

$$x \cdot y - 5 = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{5}{x}$$

Se substituye en la primera condición:

$$x^2 + y^2 = 26 \quad \longrightarrow \quad x^2 + \left(\frac{5}{x}\right)^2 = 26$$

Se realiza operaciones algebraicas:

$$x^2 + \left(\frac{25}{x^2}\right) = 26 \quad \longrightarrow \quad x^4 + 25 = 26 \cdot x^2 \quad \longrightarrow \quad x^4 - 26x^2 + 25 = 0$$

Se realiza un cambio de variable, $x^2 = t$

$$x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \quad \longrightarrow \quad t^2 - 26t + 25 = 0$$

Se obtiene las raíces del polinomio de segundo orden en función de t:

$$t^2 - 26t + 25 = 0 \quad \longrightarrow \quad (t - 25)(t - 1) = 0$$

$$t_1 = 25 \quad \longrightarrow \quad x_1^2 = 25 \quad \longrightarrow \quad x_1 = \pm 5$$

Se obtiene y:

$$y = \frac{5}{x} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{5}{x} \quad \longrightarrow \quad y_1 = \frac{5}{5} = 1; \quad y_2 = \frac{5}{-5} = -1$$

$$t_2 = 1 \quad \longrightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad x_2 = \pm(-1)$$

$$y = \frac{5}{x} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{5}{-1} \quad \longrightarrow \quad y_2 = \frac{5}{-1} = -5; \quad y_2 = \frac{5}{1} = 5$$

Los pares ordenados que cumplen la condición son: (5, 1); (5,- 1); (1,5); (-1,5), y son la respuesta.

1.5. Ejercicios de Sistema de Ecuaciones

Los ejercicios aquí presentados, son de diferente grado de dificultad y que además, son bien aplicables en la realidad. El estudiante tendrá una visión mas clara de como y donde se puede aplicar matrices. También, se solicita al estudiante que ponga mucha atención en los ejercicios, en los cuales, se aplican las diferentes propiedades de matrices, propiedades que, serán utilizadas en los niveles superiores de su carrera cualquiera que esta sea.

1.5.1. Ejercicios Resueltos de Sistema de ecuaciones

1. Obtenga el valor del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ 7 & 5 & -3 & -7 & 12 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Primeramente se debe buscar la presencia de factores tanto en filas como en columnas, en este caso no hay:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ 7 & 6 & -3 & -7 & 12 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad f_1(-3)+f_2 \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad C_1(4)+C_4 \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 4 & -33 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 17 & 4 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante según la segunda fila:

$$(-2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ -6 & 4 & -33 & -2 \\ 3 & -2 & 14 & 1 \\ -2 & 6 & 17 & 4 \end{vmatrix} \quad f_1(3)+f_2 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -12 & 10 \\ 3 & -2 & 14 & 1 \\ -2 & 6 & 17 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -12 & 10 \\ 3 & -2 & 14 & 1 \\ -2 & 6 & 17 & 4 \end{vmatrix} \quad C_2(12)+C_3 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & -2 & -10 & 1 \\ -2 & 6 & 89 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & -2 & -10 & 1 \\ -2 & 6 & 89 & 4 \end{vmatrix} \quad C_2(-10)+C_4 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -10 & 21 \\ -2 & 6 & 89 & -56 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante según la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 14 \\ 3 & -10 & 21 \\ -2 & 89 & -56 \end{vmatrix} \quad f_1(-1)+f_2 \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 14 \\ 1 & -5 & 7 \\ -2 & 89 & -56 \end{vmatrix} \quad f_2(-2)+f_1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \\ -2 & 89 & -56 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante según la primera fila:

$$(5)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -56 \end{vmatrix} = -10(2) \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -28 \end{vmatrix} = -20(-28+7) = -20(-21) = 420$$

2. Obtenga el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3}\sqrt{2} & \sqrt{7}\sqrt{3} & \sqrt{5}\sqrt{2} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{5}\sqrt{2} & 2\sqrt{5}\sqrt{3} & \sqrt{5}\sqrt{5} & \sqrt{3}\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\sqrt{2} & 2\sqrt{3}\sqrt{2} & \sqrt{5}\sqrt{2} & \sqrt{5}\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix} \longrightarrow 3\sqrt{10}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix} C_1(-1)+C_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7}-\sqrt{3} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5}-\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2}-\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & (\sqrt{7}-\sqrt{3}) & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix} C_1(-1)+C_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & (\sqrt{7}-\sqrt{3}) & (\sqrt{2}-\sqrt{3}) & -2 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante según la tercera columna:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix} C_1(-1)+C_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2}-\sqrt{5} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5}-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante según la primera fila:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2}-\sqrt{5} \\ \sqrt{2} & \sqrt{5}-\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{5}) = (5-\sqrt{10})-(2-\sqrt{10})$$

$$= (5-\sqrt{10})-(2-\sqrt{10}) = 5-\sqrt{10}-2+\sqrt{10} = 3$$

La respuesta al ejercicio es: $3\cdot 3\sqrt{10}(\sqrt{2}-\sqrt{5}) = 9\sqrt{10}(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

3. Obtenga el valor del determinante::

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln 2 & \ln^2 2 & \ln^3 2 \\ 1 & \ln 4 & \ln^2 4 & \ln^3 4 \\ 1 & \ln 8 & \ln^2 8 & \ln^8 8 \\ 1 & \ln 16 & \ln^2 16 & \ln^3 16 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \ln 2 & \ln^2 2 & \ln^3 2 \\ 1 & \ln 2^2 & \ln^2 4 & \ln^3 2^2 \\ 1 & \ln 2^3 & \ln^2 8 & \ln^8 2^3 \\ 1 & \ln 2^4 & \ln^2 16 & \ln^3 2^4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln 2 & \ln^2 2 & \ln^3 2 \\ 1 & \ln 2^2 & \ln^2 4 & \ln^3 2^2 \\ 1 & \ln 2^3 & \ln^2 8 & \ln^8 2^3 \\ 1 & \ln 2^4 & \ln^2 16 & \ln^3 2^4 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \ln 2 & \ln^2 2 & \ln^3 2 \\ 1 & 2\ln 2 & 4\ln^2 2 & 8\ln^3 2 \\ 1 & 3\ln 2 & 9\ln^2 2 & 27\ln^3 2 \\ 1 & 4\ln 2 & 16\ln^2 2 & 64\ln^3 2 \end{vmatrix}$$

Los coeficientes de la segunda columna se obtienen al aplicar propiedades de una función logarítmica. Los coeficientes de la tercera y cuarta columna se obtienen:

$$\ln^2 4 = (\ln 4)(\ln 4) = (\ln 2^2)(\ln 2^2) = (2\ln 2)(2\ln 2) = 4\ln^2 2$$

$$\ln^3 4 = (\ln 4)(\ln 4)(\ln 4) = (\ln 2^2)(\ln 2^2)(\ln 2^2) = (2\ln 2)(2\ln 2)(2\ln 2) = 8\ln^3 2$$

Se tiene factores, se aplica la propiedad de determinantes:

$$(\ln 2)(\ln^2 2)(\ln^3 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} \longrightarrow (\ln 2)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} f_1(-1) + f_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} f_1(-1) + f_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} f_1(-1) + f_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante según la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \\ 3 & 15 & 63 \end{vmatrix} f_1(-2) + f_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 \\ 3 & 15 & 63 \end{vmatrix} f_1(-3) + f_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 6 & 42 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante según la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 6 & 42 \end{vmatrix} = (2)(6)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 12(7-6) = 12(1)(\ln 2)^6$$

4. Obtenga el valor del determinante::

$$\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & (x-1)(x+1) & (x-1)(x^2+x+1) \\ 2(x-2) & (x-2)(x+2) & (x-2)(x^2+2x+4) \\ 3(x-3) & (x-3)(x+3) & (x-3)(x^2+3x+9) \end{vmatrix}$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & (x+1) & (x^2+x+1) \\ 2 & (x+2) & (x^2+2x+4) \\ 3 & (x+3) & (x^2+3x+9) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & (x+1) & (x^2+x+1) \\ 2 & (x+2) & (x^2+2x+4) \\ 3 & (x+3) & (x^2+3x+9) \end{vmatrix} f_1(-2)+f_2 \begin{vmatrix} 1 & (x+1) & (x^2+x+1) \\ 0 & -x & -x^2+2 \\ 3 & (x+3) & (x^2+3x+9) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & (x+1) & (x^2+x+1) \\ 0 & -x & -x^2+2 \\ 3 & (x+3) & (x^2+3x+9) \end{vmatrix} f_1(-3)+f_3 \begin{vmatrix} 1 & (x+1) & (x^2+x+1) \\ 0 & -x & -x^2+2 \\ 0 & -2x & -2x^2+6 \end{vmatrix}$$

Los elementos de la segunda columna se obtuvieron de la siguiente forma:

-2(x + 1) + (x + 2) = -2x - 2 + x + 2 = -x.

-3(x + 1) + (x + 3) = -3x - 3 + x + 3 = -2x.

En igual forma se obtuvieron los elementos de la tercera columna. Se desarrolla el determinante según la primera columna:

$$\begin{vmatrix} -x & -x^2+2 \\ -2x & -2x^2+6 \end{vmatrix} = (-x)\begin{vmatrix} 1 & -x^2+2 \\ 2 & -2x^2+6 \end{vmatrix} = (-x)(-2x^2+6+2x^2-4) = (-x)(2)$$

La respuesta al ejercicio es: (x - 1)(x - 2)(x - 3)(-2x).

5. Obtenga el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} C_2(-1)+C_3 \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 0 \\ 2b & b-c-a & a+b+c \\ 2c & 2c & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

La tercera columna tiene un factor:

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 0 \\ 2b & b-c-a & 1 \\ 2c & 2c & -1 \end{vmatrix} f_2(1)+f_3 \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 0 \\ 2b & b-c-a & 1 \\ 2c+2b & a+b+c & 0 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante según la segunda fila:

$$(-1)\begin{vmatrix} a-b-c & 2a \\ 2c+2b & b-a+c \end{vmatrix} f_1(1)+f_2 \begin{vmatrix} a-b-c & 2a \\ a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

La segunda fila tiene un factor:

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & 2a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b-c-2a) = -(a+b+c)$$

La respuesta del ejercicio:$(-1)(a+b+c)(-1)(a+b+c)(a+b+c) = (a+b+c)^3$

6. Obtenga el valor del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & x & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & x & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & x & \cdots & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & a & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$$

En este tipo de ejercicios de determinantes, se debe tomar en cuenta:

a) El determinante es cuadrangular

b) No se conoce el numero de filas

c) El método de solución es el mismo; es decir, una de las filas (columnas) se suma a todas las demás filas (columnas), de tal forma que aparezca una constante, que sera factor en el determinante.

Todas las filas se suman a la primera fila:

$$A = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & x & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & x & \cdots & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & a & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Se ha obtenido un factor, se aplica propiedades de determinantes:

$$A = x+(n-1)a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a & x & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & x & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & x & \cdots & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & a & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$$

En este caso la primera columna se multiplica por (-1) y se suma a todas las demás columnas; por lo cual, en todo lugar donde este a se hará cero. Quedando unicamente la diagonal principal del determinante:

$$A = x+(n-1)a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, la respuesta es la multiplicación de todos los elementos de la diagonal principal, que es: $(x+(n-1))(1)(x-a)^{n-1}$

7. Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x\cdot y = 13 \\ (x+y)^2 + x^2\cdot y + x\cdot y^2 = 28 \end{cases}$$

Se puede observar que la primera ecuación se puede transformar:

$$x^2+y^2+xy=13 \quad \longrightarrow \quad x^2+y^2+xy+xy-xy=13$$

Lo que se obtiene:

$$x^2+y^2+xy+xy-xy=13 \quad \longrightarrow \quad x^2+y^2+2xy-xy=13$$

$$x^2+y^2+2xy-xy=13 \quad \longrightarrow \quad (x+y)^2-xy=13$$

El sistema se ha transformado en:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - x\cdot y = 13 \\ (x+y)^2 + x^2\cdot y + x\cdot y^2 = 28 \end{cases}$$

Cambio de variable: x + y = t; $y \quad xy = k$

El sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} t^2 - k = 13 \\ (x+y)^2 + xy(x+y) = 28 \end{cases}$$

Finalmente el sistema queda:

$$\begin{cases} t^2 - k = 13 \\ t^2 + k\cdot t = 28 \end{cases}$$

de la primera ecuación se despeja k y se reemplaza en la segunda ecuación:

$$K=t^2-13 \quad \longrightarrow \quad t^2+(t^2-13)t=28 \quad \longrightarrow \quad t^2+t^3-13t=28$$

$t^2 + t^3 - 13t = 28 \quad \longrightarrow \quad t^3 + t^2 - 13t - 28 = 0$

Se encuentra las raíces del polinomio:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -13 & -28 \\ 4 & & 4 & 20 & 28 \\ \hline & 1 & 5 & 7 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$t^3 + t^2 - 13t - 28 = (t - 4)(t^2 + 5t + 7 = 0)$

Se analiza el discriminante del polinomio de segundo orden:

$\triangle = b^2 - 4a \cdot c = (5)^2 - 4(1)(7) = 25 - 28 = -3$

El polinomio tiene su discriminante menor a cero, lo que significa , que el polinomio nunca la corta al eje x; por lo tanto, el polinomio de primer orden es el que decide, cuando el polinomio de tercer orden es igual a cero y esto sucede cuando t= 4,con este valor, k que es igual a 3. Se forma un nuevo sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x \cdot y = 3 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se despeja y:

$x \cdot y = 3 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{3}{x}$

Se reemplaza en la primera ecuación:

$x + y = 4 \quad \longrightarrow \quad x + \frac{3}{x} = 4 \quad \longrightarrow \quad x^2 + 3 = 4x \quad \longrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad (x - 3)(x - 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 1$

Se obtiene los valores de y:

$x + y = 4 \quad \longrightarrow \quad 3 + y = 4 \quad \longrightarrow \quad y_1 = 1$

$x + y = 4 \quad \longrightarrow \quad 1 + y = 4 \quad \longrightarrow \quad y_2 = 3$

Los pares ordenados que cumplen las condiciones son: (4,1); (1,3). Que es la respuesta del ejercicio.

8. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x(x+1)(3x^2+5y) &= 144 \\ 4x^2+x+5y &= 24 \end{cases}$$

Se transforma la segunda ecuación:

$$4x^2+x+5y=3 \longrightarrow 3x^2+x^2+x+5y=(3x^2+5y)+(x^2+x)=(3x^2+5y)+x(x+1)=24$$

Cambio de variable: x(x + 1) = t y $3x^2+5y=k$

El sistema queda:

$$\begin{cases} t\cdot k &= 144 \\ t+k &= 24 \end{cases}$$

De la primera ecuación se despeja una de las variables y se la reemplaza en la segunda:

$$t\cdot k=144 \longrightarrow t=\frac{144}{k}$$

$$t+k=24 \longrightarrow \frac{144}{k}+k=24 \longrightarrow 144+k^2=24k \longrightarrow k^2-24k+144=0$$

Se encuentra las raíces del polinomio de segundo orden:

$$k^2-24k+144=0 \longrightarrow (k-12)(k-12)=0 \longrightarrow k=12$$

Se obtiene el valor de t, que es igual a 12.

Se escribe el sistema:

$$\begin{cases} x(x+1) &= 12 \\ 3x^2+5y &= 12 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene:

$$x(x+1)=12 \longrightarrow x^2+x-12=0 \longrightarrow (x+4)(x-3)=0$$

$$x_1=-4 \quad y \quad x_2=3$$

Se reemplaza en la segunda ecuación:

$$3x^2+5y=12 \longrightarrow 3(-4)^2+5y=12 \longrightarrow 48+5y=12 \longrightarrow y=\frac{-36}{5}$$

$3x^2 + 5y = 12 \quad \longrightarrow \quad 3(3)^2 + 5y = 12 \quad \longrightarrow \quad 27 + 5y = 12 \quad \longrightarrow \quad y = \dfrac{-25}{5} = -5$

Los pares ordenados: $\left(-4, \dfrac{-36}{5}\right)$; $(3, -5)$. Son las respuestas al ejercicio.

9. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\[2ex] \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\[2ex] xz + xy + yz = 27 \end{cases}$$

A la segunda ecuación se multiplica por xyz:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad \longrightarrow \quad xyz \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = xyz \quad \longrightarrow \quad yz + xz + xy = xyz$$

De la tercera ecuación se tiene que: xyz = 27

Se trabaja con la tercera ecuación:

$$xz + xy + yz = 27 \quad \longrightarrow \quad x \cdot (xz + xy + yz) = 27x \quad \longrightarrow \quad x^2z + x^2y + xyz = 27x$$

$$x^2z + x^2y + xyz = 27x \quad \longrightarrow \quad x^2(z + y) + 27 = 27x$$

De la primera ecuación de despeja z + y = 9 - x y se remplaza en la ultima ecuación:

$$x^2(z + y) + 27 = 27x \quad \longrightarrow \quad x^2(9 - x) + 27 = 27x \quad \longrightarrow \quad 9x^2 - x^3 + 27 - 27x = 0$$

Se ordena el polinomio y se multiplica por (-1):

$$9x^2 - x^3 + 27 - 27x = 0 \quad \longrightarrow \quad x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \quad \longrightarrow \quad (x - 3)^3 = 0$$

x = 3

Se reemplaza este valor en:

xyz = 27, co lo cual se obtiene yz = 9. Ademas, se tiene que: y + z = 9 - x, lo cual da: y +z = 6. Esto permite obtener un nuevo sistema:

$$\begin{cases} yz = 19 \\ y + z = 6 \end{cases}$$

De la primera se despeja cualquiera de las variables y se reemplaza en la segunda:

$$yz = 9 \quad \longrightarrow \quad z = \frac{9}{y}$$

$$y + z = 6 \quad \longrightarrow \quad y + \frac{9}{y} = 6 \quad \longrightarrow \quad y^2 + 9 = 6y \quad \longrightarrow \quad y^2 - 6y + 9 = 0$$

$y^2 - 6y + 9 = 0 \quad \longrightarrow \quad (y-3)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 3;$
Con el valor de y se obtiene el valor de z:

$$\mathrm{z} = \frac{9}{y} \quad \longrightarrow \quad z = \frac{9}{3} \quad \longrightarrow \quad z = 3$$

La respuesta del ejercicio es: (3,3,3).

10. Resolver el sistema de ecuaciones no-lineales:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y^2} + x &= 6 \\ \\ \dfrac{1}{2y^2-2x} + \dfrac{x^2}{2} &= 12 \end{cases}$$

Se puede observar que en la primera y segunda ecuación, se tiene un elemento en común; gracias a lo cual, se puede reemplazar con un cambio de variable: $\dfrac{1}{x-y^2} = t$. Por lo cual ,se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} t + x &= 6 \\ \\ -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{x^2}{2} &= 12 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t + x &= 6 \\ \\ -t + x^2 &= 24 \end{cases}$$

Se suma las dos ecuaciones del sistema:

$$x + x^2 = 30 \quad \longrightarrow \quad x^2 + x - 30 = 0 \quad \longrightarrow \quad (x+6)(x-5) = 0$$

De donde se obtiene: $x_1 = -6$ y $x_2 = 5$. Se reemplaza en el segundo sistema el valor de x y se obtiene:

$$t + x_1 = 6 \quad \longrightarrow \quad t - 6 = 6 \quad \longrightarrow \quad t_1 = 12$$
$$t + x_2 = 6 \quad \longrightarrow \quad t + 5 = 6 \quad \longrightarrow \quad t_2 = 1$$

Se regresa al cambio de variable y se obtiene dos casos:

$$a) \quad \frac{1}{x-y^2} = 12 \quad y \quad x = -6 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{-6-y^2} = 12 \quad \longrightarrow \quad 1 = -72 - 12y^2$$

$12y^2 = -71 \quad \longrightarrow \quad y = \sqrt{-71}$

Con x = -6, y pertenece a los números imaginarios; por lo tanto, no es parte de la solución.

b) $\dfrac{1}{x-y^2} = 1 \quad y \quad x = 5 \quad \longrightarrow \quad \dfrac{1}{5-y^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad 1 = 5 - y^2 \quad \longrightarrow \quad y = \pm 2$

La solución seria los pares ordenados: (5,2), (5,-2).

11. Resolver el sistema de ecuaciones no-lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - y^3 & = & 19(x-y) \\ x^3 + y^3 & = & 7(x+y) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (x-y)(x^2+xy+y^2) & = & 19(x-y) \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) & = & 7(x+y) \end{array} \right.$$

El sistema tendría cuatro condiciones:

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+xy+y^2 & = & 19 \\ x^2-xy+y^2 & = & 7 \end{array} \right.$

Se suma las ecuaciones del sistema y se obtiene: $x^2 + y^2 = 13$
Se resta las ecuaciones del sistema y se obtiene: 2xy =12
Se suma las dos ultimas ecuaciones y se obtiene:
$x^2 + y^2 + 2xy = 25 \quad \longrightarrow \quad (x+y)^2 = 25 \quad \longrightarrow \quad x + y = \pm 5$
Ahora se resta las mismas ecuaciones y se obtiene:
$x^2 + y^2 - 2xy = 1 \quad \longrightarrow \quad (x-y)^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad x - y = \pm 5 \quad \longrightarrow \quad x - y = \pm 1$
Se ha obtenido los sistemas:

1) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 5 \\ x-y & = & 1 \end{array} \right.$ Su solución: $x_1 = 3; \quad y_1 = 2$

2) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 5 \\ x-y & = & -1 \end{array} \right.$ Su solución: $x_2 = 2; \quad y_2 = 3$

3) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & -5 \\ x-y & = & 1 \end{array} \right.$ Su solución: $x_3 = -2; \quad y_3 = -3$

4) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & -5 \\ x-y & = & -1 \end{array} \right.$ Su solución: $x_4 = -3; \quad y_4 = -2$

b) La condición :

$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array} \right.$ Su solución: $x_5 = 0; \quad y_5 = 0$

c) La condición:

$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x^2+xy+y^2 & = & 19 \end{array} \right.$ Su solución: $x_6 = \pm\sqrt{19}; \quad y_6 = \mp\sqrt{19}$

d) la condición:

$\left\{ \begin{array}{rcl} x-y & = & 0 \\ x^2-xy+y^2 & = & 7 \end{array} \right.$ Su solución: $x_7 = \pm\sqrt{7}; \quad y_7 = \mp\sqrt{7}$

La solución del sistema consta de siete pares ordenados.

1.5.2. Ejercicios Propuestos de Sistema de ecuaciones

1. Resolver los siguientes ejercicios de matrices:

   1. Dada las matrices $A_{2x2}; B_{2x2}; C_{2x3}; D_{3x3}$. Realizar las siguientes operaciones:

      $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$; $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $C_{2x3} == \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

      $D_{2x3} == \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

      1) A + 3B
      2) 3A + 2C
      3) $A \cdot C$
      4) $C \cdot D$
      5) $C \cdot B$
      6) B - A

      1) $A^T - B$
      2) $B^T \cdot C$
      3) $D \cdot C^T$
      4) $(D \cdot C)^T$
      5) $A + C \cdot C^T$
      6) $D - C^T$

   2. Dada las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. y la matriz unitaria $\mathbb{E}$.

      Encontrar la matriz C, si:

      1) C = 2A
      2) $C = A + \mathbb{E}$
      3) $(C = B - \mathbb{E})^T$
      4) $C = (A \cdot B)^T$

      1) $C = 3B - 5A$
      2) $C = B^T - A^T$
      3) $C = (2A - 7B) \cdot 4\mathbb{E}$
      4) $C = A - 5\mathbb{E} + 6B$

   3. Verifique, si la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$, es una identidad si:

      $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   4. Dada es la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ Calcular valor de la expresión:

      $W = Det.(A \cdot A^T) – Det.(A^T \cdot A)$.

   5. Demostrar que existen las matrices A y B que cumplen la identidad:

      $A \cdot B - B \cdot A = \mathbb{E}$.

6. Determinar la matriz $C = A \cdot B$, cuando:

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Dada las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.Encontrar matriz C , si:

   1) $C = 2A \cdot B$
   2) $C = B^T \cdot A$
   3) $(C = A \cdot A^T$

   1) $C = A^T \cdot A^2$
   2) $C = B^T \cdot A^T$
   3) $C = B \cdot B^T$

8. 12. Para cuales valores del parámetro a, la matriz A es no-singular:

   1) $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}$
   2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & a \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$
   3) $\begin{bmatrix} a-2 & a+2 \\ a+2 & a-2 \end{bmatrix}$

   1) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$
   2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & a & -3 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}$
   3) $\begin{bmatrix} x+3 & x-3 \\ x-3 & x+3 \end{bmatrix}$

9. Resolver la inecuación:

   1) $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} > 0$
   2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2x & x \end{bmatrix}$
   3) $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 2x & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & x & x \end{bmatrix} \geq x^2$

   1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$
   2) $\begin{bmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{bmatrix} > 0$
   3) $Det.\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \leq 0$

10. Demostrar, que la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es el resultado de elevar a la n la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. Encontrar todas las matrices X que cumplen con la ecuación $X^2 = \mathbb{E}$, si $\mathbb{E}$ es la matriz unitaria de segundo grado, y la matriz X es matriz de triangulo superior.

12. Dada las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Encontrar la matriz C si:

    1) $C = A^T + B$
    2) $C = 2A - B^T$
    3) $C = (B^T - A)^T)$
    1) $C = (3A + 2B)^T$
    2) $C = A^T - B^T$
    3) $C = B \cdot A^T$

13. Dada las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Determinar la matriz D cuando:

    1) $D = 2A + C,$
    2) $D = A - 3C,$
    3) $D = A \cdot B,$
    1) $D = B \cdot A,$
    2) $D = A \cdot B^T$
    3) $D = B \cdot A^T$

14. Encontrar la matriz inversa de la matriz A:

    1) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
    2) $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
    3) $E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
    4) $H = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
    5) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
    6) $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
    7) $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
    1) $F = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
    2) $G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
    3) $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
    4) $N = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
    5) $G = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
    6) $R = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
    7) $R = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

15. Determinar la matriz de complementos algebraicos (cofactores) de la matriz A ,si:

1) $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ 1) $E = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ 2) $F = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 3) $G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 4) $H = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 9 & -5 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

16. Aplicando leyes de operaciones con matrices, determinar de las expresiones dadas, la matriz X, si se conoce que las matrices A y B son no-singulares y de mismo grado:

1) $A^{-1} \cdot X \cdot A = \mathbb{E}$ 1) $B \cdot X \cdot (A^T)^{-1} = B + (A^{-1})^T$

2) $A^{-1} \cdot (\mathbb{E} - x^T)$ 2) $((A^{-1})X^T - A) \cdot B^{-1} = \mathbb{E}$

3) $A.X^T – \mathbb{E} = A^2.$ 3) $(A^{-1})^T \cdot \mathbb{E} = X$

17. La matriz A cumple con la condición: $A + A^{-1} = B$, donde: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

Calcular $C = A^2 + A^{-1}$.

18. Determinar w $W = Det.(A^{-3})$, sabiendo que la matriz A es matriz cuadrada de segundo orden, con elementos reales y cumplen con las ecuaciones:
    1) $Det.(2A^T) = Det.A^2 + 4.$
    2) $Det.(2A^T) = 8Det.A^2,$
    3) $A^{-2} - A^T = O.$

19. Determinar $W = Det.A^2$ sabiendo que la matriz A es matriz cuadrada de segundo orden, con elementos reales y que cumplen la ecuación:
    1) $Det(A^{-3}) = det(4 \cdot A^T),$
    2) $(A^T)^2 = A^{-1}.$
    3) $A \cdot A^T = 2A^{-2}.$

20. Determinar $Det.(A \cdot A^T), si : B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

21. Determinar la matriz $B = 6(A + A^{-1})$, si se sabe ,que: $(-3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$,

22. Para que valores del parámetro t, la suma de los complementos algebraicos (cofactores) de los elementos de la segunda columna de la matriz:

$B = \begin{bmatrix} 1 & t^2 & 0 \\ t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, Es igual al determinante de la matriz A.

23. Demostrar que si A, es igual a $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^n = 2^{n-1}$.

24. Para que valores del parámetro λ, existe la matriz transpuesta de la matriz:

$A = B \cdot B^T . Donde : B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

25. Determinar el Determinante de X, si se sabe que $(X + B.B^T)^{-1} = A$, donde:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. Encontrar la condición para el cual $(E - A)^{-1} = E + A + A^2$.

27. Determinar la matriz A , si se sabe, que: $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

28. Para que valores del parámetro t existe la igualdad: $|Det.A| = 2|A_{11} + A_{21}|$, si $A_{11} \;\; y \;\; A_{21}$ significan los correspondientes complementos algebraicos (cofactores) de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

29. Dadas son: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \;\; i \;\; B = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ Determinar la matriz $C = (E - X.X^T)^{-1}$, si $A \cdot X = B$.

30. Resolver la ecuación: $\lambda \cdot Det.(A^{-1}) - Det.(\lambda \cdot A) = \frac{3}{2}, \;\; si \;\; A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

31. Determinar la condición para que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, cumpla :$ $A^{-1} = A$.

32. Resolver la ecuación: $(X^T - E) \cdot A = A_{12} + A^2$, si $A == \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, y A_{12} significa el complemento algebraico (cofactores) de la matriz A.

33. Encontrar (si existen) todas las matrices cuadradas A de segundo orden que cumplen con las condiciones:
   1) $A^T = A^{-1}$ si $a_{12} = 1$,

2) $A^T = A^{-1}$ si $a_{12} = 0$.

34. Encontrar la matriz X, para que cumple la ecuación matricial:

1) $X \cdot A = B$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

2) $X^{-1} = A \cdot A^T - 2 \cdot \mathbb{E}$, donde: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3) $A \cdot X = A^T \cdot X - B \cdot Det.A$, donde: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

4) $B^{-1} \cdot X \cdot A = \mathbb{E}$, donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5) $X \cdot A = C + 2B$, donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

6) $A \cdot X = A + A^2$, donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

7) $(A^2 \cdot DetA + A \cdot DetA^2)X - \mathbb{E} = O$, donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

8) $(A \cdot DetA + X) \cdot A = \mathbb{E}$, donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

9) $A \cdot X \cdot B = \mathbb{E}$, donde: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$,

10) $A \cdot A^T \cdot X = B$, donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

11) $X \cdot (A^T \cdot A + \mathbb{E}) = \mathbb{E}$, Donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

12) $A \cdot (X + E) \cdot B = \mathbb{E}$, Donde: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$,

13) $A \cdot X = \mathbb{E} \cdot X + \mathbb{E}$, Donde: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,

14) $A \cdot X = 4B$, Donde: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

15) $A \cdot X = B$. Donde: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$

16) 2X - 3A = B, Donde: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

17) $A \cdot X + 2X = B$, Donde: $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$

18) $X \cdot A = 3B$, Donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$

19) $A \cdot X \cdot B = C$, donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$

20) $A \cdot X \cdot B = C$, Donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

21) $A^T \cdot X \cdot A^{-1} = B$, Donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$

22) $\left(2X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},\right)^2 - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix},$

23) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^T = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

24) $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} - 6\mathbb{E} = 0$

25) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^2 + 3 \cdot \mathbb{E} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 0$

26) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{10} \cdot X\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

35. Determinar el rango de las siguientes matrices: si:

1) $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2) $D = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3) $E = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4) $H = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5) $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

6) $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7) $K = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 & -3 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 9 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

8) $A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

9) $A = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 8 & 2 & -6 \end{vmatrix}$

10) $A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 & -12 \\ 2 & 1 & 6 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 3 & 3 & 12 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & -16 \end{vmatrix}$

1) $F = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 12 \\ 5 & -3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

2) $G = \begin{bmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 10 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

3) $M = \begin{bmatrix} -14 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -10 & 15 & 20 \\ 5 & -0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4) $N = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5) $G = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 12 & 2 \end{bmatrix}$

6) $R = \begin{bmatrix} -3 & 21 & 6 \\ 12 & -2 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

7) $R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

8) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

9) $G = \begin{bmatrix} -12 & 16 & 6 \\ 5 & -15 & 25 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10) $G = \begin{bmatrix} -22 & 11 & 0 \\ 3 & -12 & 15 \\ 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

11) $G = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 14 & 2 \end{bmatrix}$

36. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Se solicita al estudiante que, aplique todos los métodos que en este libro fueron explicados.

$$1)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -19 \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -5 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -17 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$7)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 35x_4 = -3 \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 8x_1 + 1x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$10)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

$$11)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2_4 = 4 \\ x_1 - 1x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 16 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 13 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 21 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -12 \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 = -43 \\ 5x_1 - 3x_2 - 10x_3 = -76 \\ 4x_1 - 17x_2 + 2x_3 = 23 \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$7)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 6 \\ 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -3 \\ 5x_1 + 1x_2 - 7x_3 = 1 \end{cases}$$

$$10)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -7 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$11)\ \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 5 \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

37. En los siguientes ejercicios se presenta sistemas de ecuaciones con exponentes y funciones logarítmicas.

1) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y)\cdot 2^{y-x} = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^y\cdot 4^x = 18 \\ 4^y\cdot 9^x = 48 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y^{x^2+x+2} = 1 \\ x+y = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^{x^2} = y \\ x^{4x-1} = y^4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 8^{x-2}\cdot 4^{y+1} = 16 \\ 2^{2(x-1)}\cdot 8^y = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32\cdot 2^{4y-1} \\ 5\cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$

8) $\begin{cases} y^{x^2+7x12} = 1 \\ x+y = 6 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3^{\frac{2}{y}} = x \\ y = 1+\log_3(x) \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2\cdot y = 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2^{x-y} = 4 \\ \log_2(y+3) = 2+\log_2(x) \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y = 576 \\ \log_2(y-x) = 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2^x = 4\cdot 8^y \\ \log_3(x)+\log_3(y) = 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 9^{-1}\sqrt[y]{9^x}-27\cdot\sqrt[x]{27^y} = 0 \\ \log(x-1)-\log(1-y) = 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x\cdot y = 2 \\ \log_x(y)-4\log_y(x) = 3 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2+xy+y^2\cdot y = a^2 \\ \log_{\sqrt[x]{a}}(\sqrt{a})+\log_{\sqrt[y]{b}}(\sqrt{b}) = a\cdot\sqrt{3} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log(y)} = 16 \\ x\cdot y = 400 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x(10)+\log_y(10) = 5 \\ \log_{10}(x)+\log_{10}(y) = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\log(x)-\log(y) = \log(9) \\ 10^{y-x} = \dfrac{1}{100} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^{\log(y)} = 100 \\ \log_y(x) = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^x = 3^y \\ x^2+xy = 10 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^y = 9 \\ y = \log_3(3) \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_y(x)+\log_x(y) = \dfrac{5}{2} \\ x+y = a+a^2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 = y^5 \\ \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log(x)}{\log(y)} \end{cases}$

10) $\begin{cases} \log_x(y)-2\log(x) = 1 \\ \log(x+y)-\log(x-y) = 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x\cdot y = a^2 \\ 2(\log^2(x)+\log^2(y)) = 5(\log^2(a^2)) \end{cases}$

12) $\begin{cases} \log_2(x)+\log_4(y)+\log_4(z) = 2 \\ \log_9(x)+\log_3(y)+\log_9(z) = 2 \\ \log_{16}(x)+\log_{16}(y)+\log_4(z) = 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} (x+y)^{x-y} = \dfrac{1}{64} \\ (x+y)\cdot 2^{y-x} = 32 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \log(4y+16) = 1-2\log(2)+\log(x) \\ 2^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 4 \end{cases}$

38. Obtenga el valor del determinante:

1) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

2) $B = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

3) $C = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

4) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix}$

5) $E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$

6) $F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ x^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ x^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$

7) $G = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

8) $H = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 10 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

9) $I = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 15 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

1) $J = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

2) $K = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

3) $L = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4) $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 16 \\ 1 & 8 & -9 & 32 \end{vmatrix}$

5) $N = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$

6) $O = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

7) $P = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & x^2 & 0 \\ -2 & x^2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

8) $Q = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -16 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{4} & x^2 & 0 \\ -2 & x^2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

39. Obtenga el valor del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log(2) & \log(20) & \log(200) & \log(2000) \\ \log^2(2) & \log^2 20 & \log^2(200) & \log^2(2000) \\ \log^3(2) & \log^3(20) & \log^3(200) & \log^3(2000) \end{vmatrix}$$

40. Obtenga el valor del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & \cdots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \cdots & \cdots & (n+2)^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & \cdots & \cdots & (n+3)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \cdots & \cdots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$$

41. Obtenga el valor del determinante:

$$O = \begin{vmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+c} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & -\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

42. Obtenga el valor del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$$

43. Obtenga el valor del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log(3) & \log(30) & \log(300) & \log(3000) & \log(30000) \\ \log^2(3) & \log^2 30 & \log^2(300) & \log^2(3000) & \log^2(30000) \\ \log^3(3) & \log^3(30) & \log^3(300) & \log^3(3000) & \log^3(30000) \\ \log^4(3) & \log^4(30) & \log^4(300) & \log^4(3000) & \log^4(30000) \end{vmatrix}$$

44. Obtenga el valor del determinante:

$$Q = \begin{vmatrix} -2 & 8 & -32 & 1 \\ \\ 1 & -1 & -10 & 1 \\ \\ 3 & -\frac{1}{8} & x^2 & -1 \\ \\ -2 & x^2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

45. Obtenga el valor del determinante:

$$Q = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \\ \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) & 2\cos(2\varphi) & 2\sin(2\varphi) \\ \\ \cos(3\varphi) & \sin(3\varphi) & 3\cos(3\varphi) & 3\sin(3\varphi) \\ \\ \cos(4\varphi) & \sin(4\varphi) & 4\cos(4\varphi) & 4\sin(4\varphi) \end{vmatrix}$$

46. Obtenga el valor del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

47. Obtenga el valor del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & x & \cdots & \cdots & x \\ x & a_2 & x & x & \cdots & \cdots & x \\ x & x & a_3 & x & \cdots & \cdots & x \\ x & x & x & a_4 & \cdots & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x \\ x & x & x & x & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$$

48. Obtenga el valor del determinante:

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

49. Resolver los siguientes sistemas no-lineales.

1 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y &= 62 \\ x^2-y^2+x-y &= 50 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x^2+2y^2-3 &= 0 \\ 2x^2-3xy-y^2 &= 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x^2-xy+2y^2 &= 16 \\ 2x^2-3xy-y^2 &= 4 \end{cases}$

4 $\begin{cases} (x+y)^2(y+1)^2 &= 27xy \\ (x^2+1)(y^2+1)2x^2 &= 10xy \end{cases}$

5 $\begin{cases} xy &= 2 \\ yz &= 6 \\ xz &= 3 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x^2+xy+y^2 &= 6 \\ x+xy+y &= 29 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x^2+y^2 &= 58 \\ xy &= 21 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2y-x-3 &= 0 \\ xy &= 5 \end{cases}$

9 $\begin{cases} x^2+xy+y^2-3x-3y &= 6 \\ 4x+xy+4y &= 0 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x^2+y^2 &= 13 \\ x^4+y^4 &= 97 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x^2+3xy &= 7 \\ xy+3y^2 &= 14 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x^3+y^3 &= 9 \\ x^2+y^2-xy &= 3 \end{cases}$

13 $\begin{cases} x^2-xy-3(x-y) &= 0 \\ x^2-3x+5y-y^2 &= 4 \end{cases}$

14 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y} &= \dfrac{10}{3} \\ x^2+18+y^2 &= 9x+9y-2xy \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2xy-5y-5 &= 0 \\ y^2-4xy+15 &= 0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} 2xy-3y-3 &= 0 \\ y^2-4xy+15 &= 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy(x+y) &= 30 \\ x^3+y^3 &= 35 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z &= 14 \\ xyz &= 70 \\ y^2-xz &= 11 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y^4-x^4 &= 15 \\ y-x &= 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} &= 4 \\ xy &= 9 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x+2)^2(y-1)^2 &= 25 \\ (x+2)(y-1) &= 12 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+xy+y^2 &= 7 \\ 2x^2-xy-y^2 &= 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+xy+y^2 &= 13 \\ 2(x+y)^2+x^2y+xy^2+30 &= 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^3+y^3 &= 28 \\ x+y &= 4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2-xy-y^2 &= 5 \\ 2x^2-5xy+6y^2 &= 9 \end{cases}$

11) $\begin{cases} xy &= x+y \\ xz &= x+z \\ yz &= z+y \end{cases}$

12) $\begin{cases} (x^2+y^2)(x^3+y^3) &= 280 \\ x+y &= 4 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{2}{3x-y^2}-y &= 2 \\ \dfrac{1}{6x-2y^2}+2y^2 &= 8 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2+y^2 &= 13 \\ x+y+xy &= 11 \end{cases}$

Capítulo 2

Programación Lineal

1. Definición de programación lineal,
2. Características de la programación lineal,
3. Objetivos de programación lineal,
4. Aplicaciones de programación lineal,
5. Conceptos básicos de programación lineal
6. El problema de programación lineal
7. Métodos de solución de programación lineal, entre los cuales se analiza:
   a) Método gráfico
   b) Método simplex
8. El Problema del Dual en la Programación Lineal

2.1. Definición de Programación Lineal

La programación lineal es una capitulo de las matemáticas, que se la define como, un tipo de los modelos de programación matemática destinados a la asignación eficiente de los recursos limitados en actividades conocidas, con el objetivo de satisfacer las metas deseadas; tal como, maximizar beneficios o minimizar costos.

2.2. Características de la Programación Lineal

La característica distintiva y principal de los modelos de programación lineal es que, las funciones que representan el objetivo y las restricciones son lineales y estas pueden ser: inecuaciones o ecuaciones de primer grado. La Programación Lineal tuvo sus orígenes a raíz de la Segunda Guerra Mundial, cuando George Dentzin, quien realizó investigaciones y aplicaciones en distintos casos de operación aero-militar. Leonfiel aportó principalmente en procesos relaciones con la industria a través de su Matriz de Insumo-Producto. Koopmans, incursionó profundamente en aplicaciones macro-económicas resolviendo casos de producción, asignación de recursos, maximización de beneficios y minimización de costos.
En toda producción industrial deben ser aplicados los diferentes principios de economía racional. Entre estos principios, uno de ellos dice: **Se debe aprovechar de todos los recursos disponibles para el desarrollo de cualquier proyecto y deben ser utilizados para garantizar una máxima realización del mismo**.
Este principio puede ser aplicado, cuando el o los objetivos; así como, los recursos pueden ser considerados de modo cuantitativo.
La aplicación de los principios de economía racional en la práctica se reduce a solucionar los problemas de optimización. Lo que significa, tomar decisiones con un determinado criterio de optimización. Se puede tener en consideración, en el momento de realización del proyecto, con el principio de máxima efectividad; es decir, con un determinado nivel de recursos se obtiene un máximo grado del objetivo fijado. Otra variante de este principio de economía racional, es el principio de mínima utilización de recursos. Tenemos con ella contacto cuando: **fijadas las tareas de producción las conseguimos con un mínimo de recursos.** El plan que, de acuerdo, con el principio de economía racional que estemos aplicando, llamamos plan óptimal. Esto es un plan, donde las tareas de producción se consiguen con mínimo gasto de recursos, o de los recursos dados, se consigue un máximo efecto de producción.
Para construir un plan óptimal, es necesario el conocimiento de métodos de programación matemática. La más conocida de los métodos de programación matemática es lo que llamamos, programación lineal. Desde el punto de vista de su efectividad, se encuentra múltiples aplicaciones en la práctica. Con su ayuda se fija, por ejemplo: el programa de asignación de producción de m plantas industriales para n mercados mayoristas con minimización de costos de transporte. Se puede determinar también, la dieta optima con m recursos alimenticios y n componentes nutritivos.

Una de las principales hipótesis en los principios de programación lineal es: **la proporcionalidad de los resultados con relación a los gastos.**

2.3. Objetivos de la Programación Lineal

Después de que el estudiante finalice satisfactoriamente este capítulo, debe estar en capacidad de:

a) Determinar las soluciones óptimas para problemas de programación lineal utilizando el criterio pesimista, el criterio optimista y el criterio del valor esperado.

b) Utilizar técnicas de asignación de cantidades fijas de recursos para la satisfacción6n de diferentes tipos de demandas.

La programación lineal es un modelo matemático y sistemático para enfocar, analizar un determinado problema, técnico o tecnológico, para lograr una solución óptima o la mejor posible, empleando una ecuación, denominada, ecuación objetivo (propósito del problema), un conjunto de restricciones lineales y una condición de eliminar valores negativos (condición de no negatividad).

2.4. Aplicaciones de la Programación Lineal

El objetivo principal de la programación lineal es encontrar soluciones mediante métodos matemáticos, utilizando sistemas lineales, a problemas de carácter técnico-económico que se presentan en la industria en general, por la limitación de recursos. A través de la programación lineal se pueden resolver interesantes casos tales como:

a) Combinación óptima de mezclas de producción,

b) Disposición interna de recursos en los procesos,

c) Maximización de beneficios,

d) Localización de productos,

e) Asignación de recursos,

f) Minimización de costos,

g) Transporte,

En cuanto al área de aplicación se resuelven casos en la industria en general y dentro de esta con mejores opciones:

a) En la industria química,

b) En la industria hierro y acero,

c) En la industria papel y cartón,

d) En la industria petrólera,

e) En la industria farmacéutica,

f) En la industria de alimentos y,

g) En la industria textil.

Se han realizado aplicaciones también:

a) En la agricultura,

b) En la construcción,

c) Aviación,

d) Sistemas hidroeléctricos,

e) Transporte.

2.5. Conceptos Básicos de Programación Lineal

Linealidad Todo proceso consta de diferentes actividades y tienen una relación lineal utilizada para identificar con la cantidad unitaria de cada uno de los factores con respecto a los demás y a las cantidades de cada uno de los productos.
Divisibilidad Los procesos pueden utilizarse en extensiones positivas divisibles mientras se dispongan de recursos.
Finitud Tanto el numero de procesos identificados cuanto los recursos disponibles, deberán corresponder a cantidades finitas, esto es, conocidas y cuantificadas en forma determinística.
Algoritmos o Iteraciones Como se indico anteriormente, en lo que se refiere a la programación lineal se utiliza métodos mediante aproximaciones sucesivas, ensayos, intentos que reciben el nombre de algoritmos o iteraciones y, según los cuales, se determina pasos o etapas hasta obtener el objetivo planteado.

2.6. El Problema de la Programación Lineal

Los problemas de la programación lineal se presentan por la limitación de recursos, que se tratan de distribuir en la mejor forma. Los recursos a la vez que son limitados en términos ”per se”(por si mismo), pueden ser distribuidos en tantas formas, como combinaciones matemáticas permitan relacionarlos a un mismo objetivo. De allí que, es necesario distribuirlos adecuadamente en forma equilibrada y armónica entre los factores que intervienen en el problema, a fin de encontrar las mejores alterativas de uso, cumpliendo con el propósito fijado. Un problema de programación lineal trae implícitamente el sentido de función, propósito o meta de los recursos disponibles y la habilidad o forma para seleccionar, comparar y decidir la mejor alternativa (decisión). Los problemas de programación lineal planteados y resueltos por cualquiera de los métodos deberán cumplir las condiciones necesarias y suficientes:

a) **Función Objetivo** Es la ecuación, que expresa la cantidad que va a ser maximizada o minimizada según el objetivo planteado y es de la forma: $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \cdots + C_nX_n$,

Donde:
Z(MAX): para los casos de maximización
Z(MIN): para los casos de minimización.
$C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$ son coeficientes de la función objetivo, pueden ser márgenes de beneficios, precios, costos unitarios,
$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ Variables del problema, lo que se quiere lograr.

b) **Limitaciones y Restricciones**
Es el conjunto de inecuaciones o ecuaciones, que expresan las condiciones finitas del problema, denominados también, COEFICIENTES TÉCNICOS de producción, tecnológicos, de transporte, etc., según sea el caso de estudio; lo cual, se representa:

$$\begin{cases} A_{11}X_1 & + & A_{12}X_2 & + & A_{13}X_3 & \cdots & A_{1n}X_n & T_1 & b_1 \\ A_{21}X_1 & + & {}_{22}X_2 & + & A_{23}X_3 & \cdots & A_{2n}X_n & T_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}X_1 & + & A_{n2}X_2 & + & A_{n3}X_3 & \cdots & A_{nn}X_n & T_n & b_n \end{cases}$$

En donde:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad \text{Coeficientes técnicos}$$

$X_1, X_2, X_3 \cdots X_n$ Variables o incógnitas del problema.

$T_1, T_2, T_3 \cdots T_n$ Signos o limites del sistema.($\leqslant$; $\geqslant$; $<$; $>$; $=$)

c) **No Negatividad**
En la resolución de los Problemas de programación lineal, en ningún caso, se aceptaran resultados negativos en las respuestas; pues, no se concibe producción negativa, gastos negativos, tendrán que ser por lo menos igual o mayor que cero.

d) **Condiciones de Optimización**
Se van obteniendo por aproximaciones sucesivas.
Solución factible: Aquella que satisface las limitaciones y restricciones del problema.
Solución básica factible: Es aquella que satisface tanto las limitaciones o restricciones como la función objetivo del problema (optimización).

2.7. Métodos de Solución de Programación Lineal

De la teoría de conjuntos y de la solución de un sistema de inecuaciones, resulta que: cada una de las inecuaciones que aparecen en el sistema mostrado representa una hipótesis:

$(a_{i1})^2 + (a_{i2})^2 + ... + (a_{in})^2 > 0$ Donde: $i = l, 2, \cdots, m,$

Es un conjunto y se conoce que, la parte común de un conjunto es también un conjunto. Por lo tanto, el conjunto de soluciones permitidas, es un conjunto y específicamente es un conjunto poliédrico con finito número de vértices. La función objetivo toma su valor extremo en uno de esos vértices. Aprovechamos de esta condición para definir dos métodos:

a) El método gráfico, se lo aplica cuando el número de variables es hasta tres.

b) El método simplex, se lo aplica cuando el número de variables es igual o mas de tres.

2.8. Método Gráfico en Programación Lineal

El problema de programación lineal, en el caso cuando tenemos dos variables de decisión, se resuelve fácilmente con en el método gráfico. Supongace, que la función objetivo de las variables x_1 y x_2 es: $z = c_1x_1 + c_2x_2$ donde: $c_1 > 0, c_2 > 0$, Y el sistema de condiciones tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \leq & b_2 \end{cases}$$

Dónde: $a_{ik} > 0 \quad (i,k = 1,2) \quad$ y $\quad b_1, b_2 > 0 \quad$ y $\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

llamadas, condiciones de frontera. Se desea encontrar los valores de las variables de decisión x_1, x_2 para que, cumplan con el sistema de condiciones y que cumplan con la función objetivo:

$z = c_1x_1 + c_2x_2,$ y tome su valor máximo.

Si se designa con l_1 y l_2 las rectas de las ecuaciones:

$$l_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \qquad l_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Entonces, en el plano Ox_1x_2, la inecuación $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ toma los puntos del plano, que pueden estar sobre o debajo de recta l_1, pero deben cumplir con las condiciones del problema.
Analógicamente, para la inecuación $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ todos los puntos del plano que estén sobre o debajo de recta l_2.
Se define también las condiciones de frontera $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, se obtiene que, el espacio de soluciones admisibles forman puntos en el primer cuadrante del sistema de coordenadas, que se encuentran al mismo tiempo por bajo o por encima de las rectas l_1 y l_2; es decir, las coordenadas de todos los puntos de cuadrángulo OABC (ver figura 2.1).

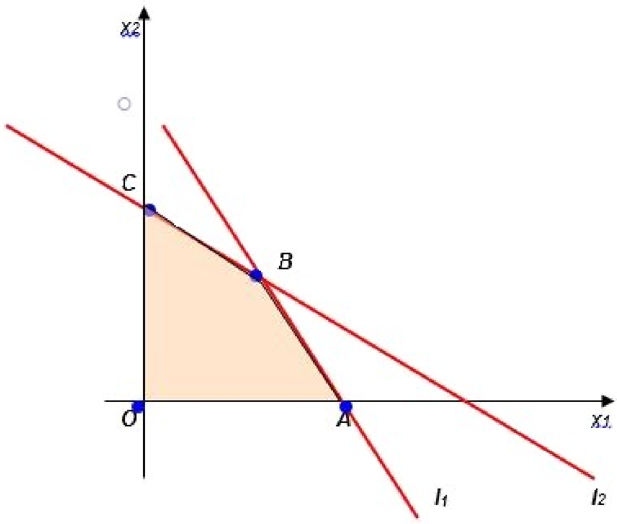

Figura 2.1 Posición l_1 y l_2

Si la función objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ cambia los valores de z; entonces, las ecuaciones muestran un haz de rectas paralelas, que se representan en la forma direccional, es decir:

$$x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{z}{c_2}$$

Si más alto es el valor de z; es decir, más alto será el grado de realización de la función objetivo y más alto será la posición de la recta correspondiente al haz de rectas paralelas. La recta más alta en posición, entre las rectas, que tiene por lo menos un punto común con el cuadrángulo OABC, representa la solución óptima.

2.8.1. Ejercicios Resueltos Método Gráfico

Es necesario realizar la formulación algebraica; ya que, la multiplicidad de datos en interpelaciones hace difícil el planteamiento de los problemas de programación lineal. Una forma de resumir la información, consiste en elaborar una matriz de recursos y productos con sus respectivos coeficientes de consumo; con la oferta disponible de los insumos y con la utilidad generada por cada producto. Previo a ello, conviene definir con claridad el significado de las variables utilizadas. Analice detenidamente la formulación de los ejemplos.

SOLUCIÓN GRÁFICA:

El método gráfico permite una comprensión visual de la resolución de un problema. De acuerdo a las condiciones deberá cumplir con los requisitos básicos.

a) Función Objetivo,

b) Conjunto de limitaciones o restricciones,

c) Condición de no negatividad,

d) Condiciones u optimización,

e) Solución factible,

f) Solución básica factible,

g) Solución óptima factible,

Mediante el método gráfico se trata de resolver por aproximaciones o interacciones gráficas, las posibilidades de mejorar las soluciones de conformidad a la función objetivo determinada.

$Z(MAX) = C_1X_1 + C_2X_2$

Las restricciones o limitaciones serán:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & \leq & b_1 \\ A_{21}x_1x & + & A_{22}x_2 & \leq & b_2 \\ A_{31}x_1x & + & A_{32}x_2 & \leq & b_3 \\ & & x_1 & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

La función objetivo puede representarse mediante un conjunto de rectas paralelas con pendiente:

$$M = \frac{C_1}{C_2}$$

Donde C_1 es el coeficiente de X_1 y C_2 el coeficiente de X_2. Cada recta indica un conjunto de puntos que proporcionan un beneficio idéntico.

Cuando se trata de problemas de maximización, la solución esta determinada por la región interior, formada por el polígono convexo.
Para este caso, se utilizara las expresiones $\leq$ (menor o igual), lo que indica que, la empresa no podrá utilizar mas recursos de los que dispone (finitud) y los coeficientes de X_1 y X_2 corresponden a las necesidades técnicas de producción.

2.8.2. Ejercicios de Maximización Método Gráfico

1. Una empresa elabora los productos I y II por medio de tres tipos de máquinas M_1, M_2, M_3. Capacidad de producción en miles de ejemplares por año (CPA) de cada una de las maquinas es el siguiente:

Producto	CPA		
	M_1	M_2	M_3
I	6	–	5
II	6	4	10

La ganancia por unidad del producto I es de 2 unidades monetarias, por unidad del producto II es de 4 unidades monetarias. Determinar la cantidad de producción de los productos I y II; tal manera que, la ganancia de la empresa sea máxima.

De las condiciones del ejercicio se debe transforma a inecuaciones y funciones. Se designa a la producción anual de producto I con x_1, al producto II con x_2. De acuerdo a las condiciones del ejercicio la ganancia anual de esta

producción, es decir, la función de objetivo es:
$z = 2x_1 + 4x_2$. Dónde: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.
Como las capacidades productivas de las maquinas son limitadas durante el año, se puede escribir:
$x_1 + x_2 \leq 6$
Por lo que, la producción no puede ser mayor a la que capacidad productiva de la maquina M_1.
$x_2 \leq 4$
Por lo que, la producción del producto II no puede ser mayor que capacidad productiva de la maquina M_2
$2x_1 + x_2 \leq 10$ Por lo que, la producción de dos productos no puede ser mayor que la capacidad productiva de la maquina M_3.
La solución a este ejercicio, es encontrar lo óptimo desde el punto de vista de la función objetivo: $z = 2x_1 + 4x_2$ un punto en el espacio definido por las inecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1x & + & x_2 & \leq & 10 \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1 & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \end{cases}$$

Para esto se gráfica las rectas en el plano cartesiano:
$l_1 : x_1 + x_2 = 6;\quad l_2 : x_2 = 4;\quad l_3 : 2x_1 + x_2 = 10$.
El espacio de soluciones permitidas, están en el primer cuadrante, ver figura 2.2; lo cual, es un pentágono OABCD.

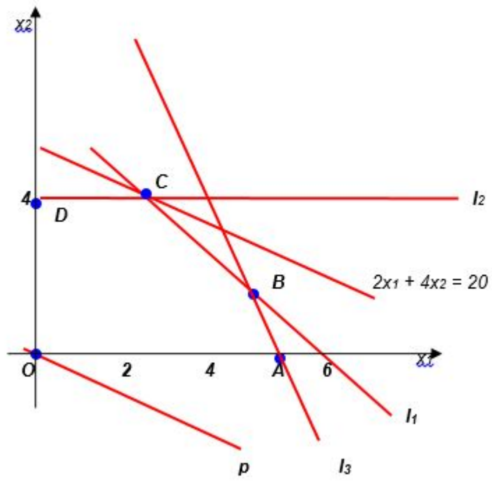

Figura 2.2 Ejercicio 1

Se considera ahora la función objetivo: $z = 2x_1 + 4x_2$, para z = 0, se obtiene la recta $p : 2x_1 + 4x_2 = 0$. Esta recta es singular y pasa por los puntos (2, -1) y (0, 0). Las rectas que corresponden a la función objetivo para diferentes valores son paralelas a la recta $p(2x_1 + 4x_2 = 0)$.
Cuando más alto es valor de z, más arriba (“y” más a la derecha), está la correspondiente recta. Por lo tanto, la ganancia más alta le corresponde la recta paralela a la recta p, que pasa por zona de soluciones permitidas y localizada lo más alto posible.

De la figura 2.2 se logra observar, que el punto de resolución correspondiente a la más alta ganancia es el punto C (2, 4).
Por lo tanto, cuando la empresa produzca 2000 ejemplares por año del producto I y 4000 ejemplares de producto II, se obtendrá las máximas ganancias.

2. La dieta de un soldado se compone de dos componentes alimenticios; de pan y de carne, que contienen dos elementos nutritivos, por ejemplo; calorías y proteínas. A cada unidad de peso de pan contiene: 1 unidad de proteínas y 5 unidades de calorías, A cada unidad de peso de carne contiene: 5 unidades de proteínas y 1 unidad de calorías. Un soldado cada día necesita por lo menos de 15 unidades de calorías y 15 unidades de proteínas. ¿Cuál es el costo mínimo de la dieta, si el precio de pan es 1 y el precio de carne es de 3 unidades monetarias?
De las condiciones del ejercicio se traduce a la lengua de inecuaciones y funciones. Supongace, que un soldado reciba diariamente x_1 unidades de pan y x_2 unidades de carne. El costo diario de alimentación de un soldado la función objetivo es:
$z = x_1 + 3x_2$.
La zona de soluciones permitidas está definida con las siguientes inecuaciones, vea figura 2.3.
$x_1 + 5x_2 \geq 15$
La cantidad de unidades de proteínas obtenidas en el pan y carne no puede ser menor a 15 unidades: $5x_1 + x_2 \geq 15$

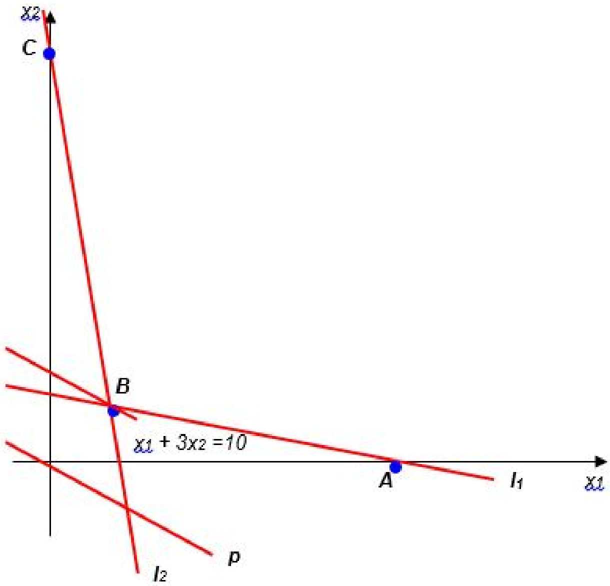

Figura 2.3 Ejercicio 2

La cantidad de unidades de calorías obtenidas en el pan y en la carne no puede ser menor a 15 unidades y además debe ubicarse en el primer cuadrante ($x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$).
Se dibuja las rectas:
$l_1 : x_1 + 5x_2 = 15; \qquad l_2 : 5x_1 + x_2 = 15.$
La zona de soluciones permitidas esta en y sobre de las rectas l_1 y l_2; por lo tanto, es la zona convexa infinita limitada por los segmentos, y correspon-

dientes a los fragmentos de el eje Ox_1 y Ox_2.
Teniendo en consideración la función objetivo: $z = x_1 + 3x_2$ y tomando el valor de z = 0 obtenemos la recta: $p : x_1 + 3x_2 = 0$; la cual, en el caso particular pasa por los puntos (-3.1) y el punto (0,0).
Las rectas correspondientes a la función objetivo:
$z = x_1 + 3x_2$
para diferentes valores de z son paralelas a la recta $p(x_1 + 3x_2 = 0)$. Cuan menor es el valor de z, cuan más abajo y más a la izquierda está la recta correspondiente. Por lo tanto, el costo mínimo corresponde la recta paralela a la recta p que pasa por la zona de soluciones permitidas y localizadas lo más abajo posible. De la figura 2.3 se aprecia que el punto correspondiente al mínimo costo es el punto B (5/2, 5/2). Lo que significa, que la dieta permitida más barata es de dos y media unidades de peso de pan y dos y media unidades de peso de carne.

3. Un taller fabrica dos clases de maletas de piel. En cada maleta A de alta calidad, gana 40 dolares, y en cada maleta B de baja calidad, gana 30 dolares. El taller puede producir diariamente 500 maletas de tipo B o 250 maletas de tipo A. Sólo se dispone de piel para 400 maletas diarios A y B combinados y de 200 sierres elegantes para el maletas A y de 350 sierres diarias para el cinturón B ¿Qué producción maximiza la ganancia?

Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & = & Productos \\ x_1 & x_2 & = & Numero \quad producido \\ 40 & 30 & = & Utilidad \end{cases}$$

$$\begin{cases} Recursos & Consumo & & Disponibilidad \\ Piel & 1 & 1 & 400 \\ Sieres \quad A & 1 & 0 & 200 \\ Sieres \quad B & 0 & 0 & 350 \\ Capasidad & 2 & 1 & 500 \end{cases}$$

Función objetivo: Maximizar la utilidad total.
$Z(MAX) = 40X_1 + 30X_2$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 400 & Consumo \quad de \quad piel \\ x_1 & \leq & 200 & Consumo \quad de \quad sierres \quad A \\ x_2 & \leq & 350 & Consumo \quad de \quad sierres \quad B \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 500 & Productividad \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No - negatividad \end{cases}$$

Se Gráfica Las Ecuaciones:

1) Se gráfica todas las ecuaciones,
2) Se define el campo para el cual cumple la desigualdad,
3) Se obtiene los puntos comunes entre las rectas; para lo cual, se resuelve

el sistema, que se forma de las rectas que se cruzan (punto de intersección),

4) Se calcula la función objetivo con cada uno de estos puntos,
5) Se escoje el valor máximo, si se desea maximizar, o el valor mínimo, se se desea minimizar, según sea el caso.

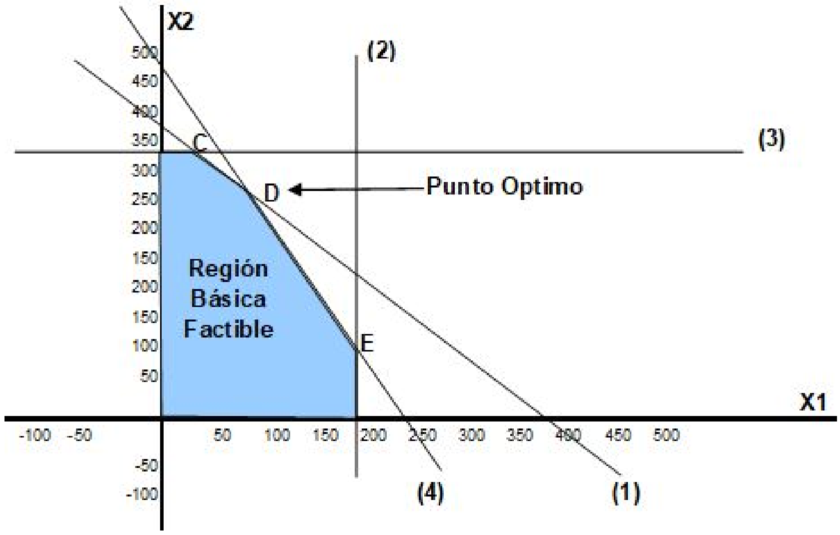

Figura 2.4 Ejercicio 3

Se ha determinado la región básica factible, que debe ser positiva y satisfaga las condiciones o restricciones del problema. Cualquier punto por fuera de esta región no satisface los requerimientos técnicos y nos interpreta, que estamos utilizando recursos por encima de los existentes.
Conocida la región básica factible, se procede a ensayar puntos combinados que nos den respuesta; es decir, que cumplan con las restricciones del problema y con el propósito de la función objetivo (maximizar) para lo cual, se resuelve las ecuaciones.

Resolución de las sistemas:

Se resuelve los sistemas, para obtener los puntos de intersección:
C(Ecuaciones 1 y 3)

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 400 \\ & & x_2 & = & 350 \end{array}\right. \longrightarrow \text{C(50,350)}$$

D(Ecuaciones 1 y 4):

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 400 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 500 \end{array}\right. \longrightarrow \text{D(100,300)}$$

E(Ecuaciones 2 y 4):

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 200 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 500 \end{array}\right. \longrightarrow \text{E(200,100)}$$

Los puntos C, D y E se reemplazan en la función objetivo:
$p(X_1,X_2) : Z(MAX) = 40X_1 + 30X_2$,
para determinar la solución óptima:

1) Punto C(50, 350) = 40(50) + 30(350) = 12.500,
2) Punto D(100,300) = 40(100) + 30(300) = 13.000. Punto Optimo,
3) E(200,100) = 40(200) + 30(100) = 11.000.

La mejor alternativa se presenta cuando $x_1 = 100$ y $x_2 = 300$; es decir, cuando se fabrique 100 maletas de clase A y 300 maletas de la clase B. En efecto, si reemplazamos en la función objetivo, tenemos.
$Z(MAX) = 40x_1 + 30x_2$
Z(MAX) = 40(100) + 30(300)
Z(MAX) = 4.000 + 9.000
Z = 13.000 Máxima utilidad.
Siempre el punto de maximización estará en uno de los vértices del área factible de solución. Que es un conjunto convexo de puntos, hacia adentro y habrá una curva de isobeneficio, que sera tangente al punto encontrado y ésta es la función objetivo.

4. La Compañía ECASA está produciendo dos clases de refrigeradoras, tipo A y tipo B. De estudios hechos sobre las necesidades del país, se estima que en el próximo año los requerimientos de estos dos tipos de refrigeradoras serán:

   1) Un máximo de 80.000 unidades de A,
   2) Un máximo de 120.000 unidades de B.

   La utilidad que, cada refrigeradora le deja a la empresa es: 150 dólares por unidad de A y 300 dólares por unidad de B. Cuantas unidades de A y Cuantas de B deben producirse para que ECASA alcance la máxima utilidad anual, si solo se dispone de:

   1) 10.000 unidades de hierro,
   2) 16.000 unidades de fibra de vidrio,
   3) 14.000 unidades de aluminio.

   Considerando que la composición de estas refrigeradoras debe ser la siguiente para A:

   1) 10 por ciento de hierro,
   2) 12 por ciento de fibra de vidrio,
   3) 7 por ciento de aluminio.

   para B:

   1) 5 por ciento de hierro,
   2) 10 por ciento de fibra de vidrio,
   3) 10 por ciento de aluminio.

   Formulación del Problema

$$\begin{cases} A & B & = & Productos \\ x_1 & x_2 & = & Numero \quad producido \\ 150 & 300 & = & Utilidad \end{cases}$$

$$\begin{cases} Recursos & Consumo & & Disponibilidad \\ Hierro & 0.10 & 0.05 & 10000 \\ Fibra\ \ de\ \ vidrio & 0.12 & 0.10 & 16000 \\ Aluminio & 0.07 & 0.10 & 14.500 \\ DemandaA & 1 & 0 & 80.000 \\ DemandaB & 0 & 1 & 120.000 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MAX) = 150X_1 + 300X_2$

Restricciones

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.05x_2 & \leq & 10.000 & Consumo\ \ de\ \ hierro \\ 0.12x_1 + 0.10x_2 & \leq & 16.000 & Consumo\ \ de\ \ Fibra\ \ de\ \ vidrio \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 & \leq & 14.000 & Consumo\ \ de\ \ aluminio \\ x_2 & \leq & 120.000 & Demanda\ \ B \\ x_1 & \leq & 80.000 & Demanda\ \ A \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Se gráfica las ecuaciones (abstracción):

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.05x_2 & = & 10.000 \\ 0.12x_1 + 0.10x_2 & = & 16.000 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 & = & 14.000 \\ x_2 & = & 120.000 \\ x_1 & = & 80.000 \\ x_1, x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Solución de las sistemas:

C(Ecuaciones 3 y 5)

$$\begin{cases} 0.07x_1 + 0.1x_2 = 14000 \\ x_2 = 120000 \end{cases} \longrightarrow \text{C(28.571,120.000)}$$

D(Ecuaciones 2 y 3)

$$\begin{cases} 0.12x_1 + 0.1x_2 = 16.000 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 = 14.000 \end{cases} \longrightarrow \text{D(40,112.000)}$$

E(Ecuaciones 1 y 2):

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.05x_2 = 10.000 \\ 0.12x_1 + 0.10x_2 = 16.000 \end{cases} \longrightarrow \text{E(50.000,100.000)}$$

F(Ecuaciones 1 y 4):

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.05x_2 = 10.000 \\ x_1 = 80.000 \end{cases} \longrightarrow \text{F80.000,40.000)}$$

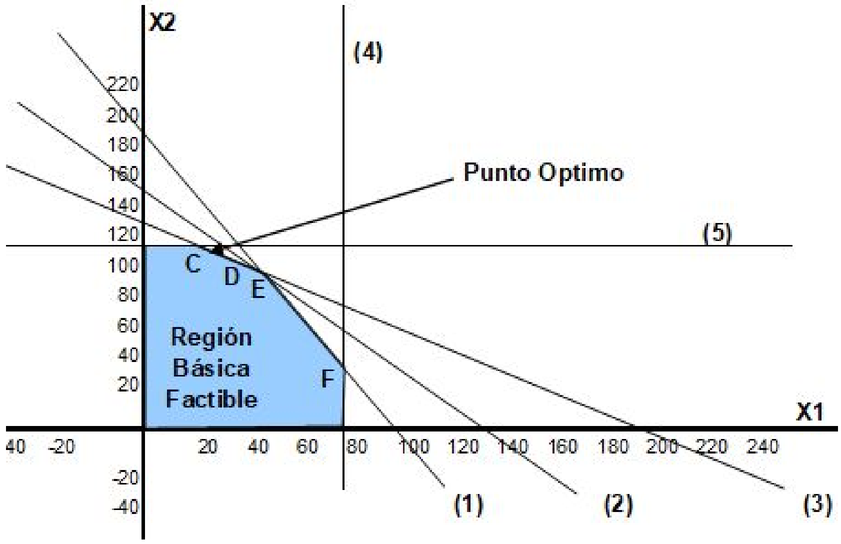

Figura 2.5 Ejercicio 4 Cantidades en Miles

$P(X_1, X_2) \longrightarrow Z(MAX) = 150X_1 + 300X_2$

$C(28572,43; 120.000) \longrightarrow Z = 150(28571){+}300(120,000) = 40.285.650 Puntooptimo.$

$D(40.000, 112000) \longrightarrow Z = 150(40.000) + 300(112.000) = 39.600.000$

$E(50.000, 100.000) \longrightarrow Z = 150(50.000) + 300(100.000) = 30.000.000$

$F(80.000, 40.000) \longrightarrow Z = 150(80.000) + 300(40.000) = 24.000.000$

La solución óptima será, cuando se produzca 28.571,43 unidades de A y 120.000 unidades de B.

P(28.571; 120.000)

X_1 = 28.571 Refrigeradoras tipo A;

X_2 = 120.000 Refrigeradoras tipo B.

Z(MÁX) = 40.285.650 dólares

5. Una fabrica produce dos tipos de muebles A y B, dispone del taller de torneado, el mismo que puede procesar 25 unidades/hora de A y 40 unidades/hora de B, siendo el costo por hora de 20 dolares, el taller de rectificación, puede procesar 28 un/h de A y 35 un/h de B y su costo es de 14 dolares. El taller de pintura puede atender a 35 un/h de A y 25 un/h de B y su costo es de 17,5 dolares. El precio de venta de A, es de 5 dolares y el de B, 4 dolares. ¿Cuantas unidades de A y B debe producir para obtener la máxima ganancia?

Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & \longrightarrow & tipo\ de\ muebles \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Numero\ producido \\ 4 & 3 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

$$\begin{cases} Taller & Consumo & & Capacidad & Costo \\ & A & B & & \\ Torneado & 1 & 1 & 1 & 20 \\ Rectificacion & 1 & 0 & 1 & 14 \\ Pintura & 0 & 0 & 1 & 17.5 \end{cases}$$

Cuando no hay información sobre la capacidad de cada departamento (taller), se habla de capacidad representada por 1 (100 por ciento), y cada ta-

ller ocupa tanto en A como en B, un porcentaje de esa capacidad en forma de fracción.
Para encontrar la utilidad, se halla el costo total de cada producto:

Costo:

$$\begin{cases} Costo & A & Costo\ \ unidad \\ Torneado & 20 \div 25 & 0.8 \\ Rectificacion & 14 \div 28 & 0.5 \\ Pintura & 17.5 \div 35 & 0.5 \\ Costo\ \ total & & 1.8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Costo & B & Costo\ \ unidad \\ Torneado & 20 \div 40 & 0.5 \\ Rectificacion & 14 \div 35 & 0.4 \\ Pintura & 17.5 \div 25 & 0.7 \\ Costo\ \ total & & 1.6 \end{cases}$$

Utilidad:

Se define, como la diferencia entre el precio del producto menos el costo por unidad del mismo.
Unidad de A = 5 - 1.8 = 3.2
Unidad de B = 4 - 1.6 = 2.4

Función objetivo:

$Z(MAX) = 3,2X_1 + 2,4X_2$

Restricciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{25}x_1 + \frac{1}{40}x_2 & \leq & 1 \\ \frac{1}{28}x_1 + \frac{1}{35}x_2 & \leq & 1 \\ \frac{1}{35}x_1 + \frac{1}{25}x_2 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \quad No-negatividad \end{cases}$$

Abstracción:

Trasformamos las desigualdades fraccionarias en igualdades enteras; para lo cual, buscamos el mínimo común denominador.

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 & = & 200 \\ 5x_1 + 4x_2 & = & 140 \\ 5x_1 + 7x_2 & = & 175 \end{cases}$$

Se Considera el punto C(Ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} 8x_1 & + & 5x_2 & = & 200 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & = & 175 \end{cases} \longrightarrow \text{C(16.93;12.91) = C(17;13)}$$

Z(MÁX) = 3,2(17) + 2,4(13) = 85,60

Solución óptima:

Z(MÁX) = 85,60

X_1 = 17 Muebles tipo A,

X_2 = 13 Muebles tipo B.

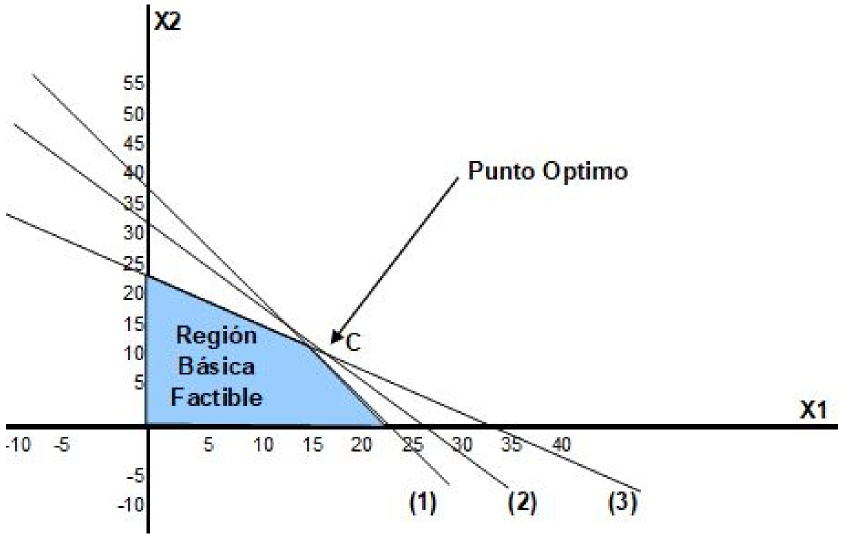

Figura 2.6 Ejercicio 5

2.8.3. Ejercicios de Minimización Método Gráfico

De igual manera, que en los casos, de maximización, por el método gráfico, se pueden resolver problemas de minimización, se utilizara la expresión $\geq$ (mayor o igual) para las desigualdades.
En estos casos el problema se ajusta a encontrar un conjunto de puntos convexos, hacia fuera, e identificar un punto extremo (vértice), que minimice la función objetivo.
Una vez determinada la región básica factible, área positiva y que satisface, las limitaciones o restricciones del problema. Un punto por debajo de esta región, no satisface los requerimientos técnicos y nos interpretará que no cumplimos con las necesidades mínimas del ejercicio.

6. Una compañía química, esta diseñando una planta para producir dos tipos de minerales M y N. La planta debe ser capaz de producir al menos 100 unidades de M y 420 unidades de N cada día. Existen dos posibles diseños para las cámaras principales de reacción que vienen incluidas en la planta. Cada cámara de tipo A cuesta 600 mil dólares y es capaz de producir 10 unidades de M y 20 unidades de N por día; el tipo B es un diseño mas económico, cuesta 300 mil dólares y es capaz de producir 4 unidades de M y 30 unidades de N por día. A causa de los costos de operación, es necesario tener al menos 4 cámaras de cada tipo en la planta. ¿Cuantas cámaras de cada tipo deben ser incluidas para minimizar el costo de construcción y satisfacer el programa de producción requerido?

   Función objetivo:

   x_1 = cámaras tipo A

   x_2 = cámaras tipo B

   $Z(MIN) = 600x_1 + 300x_2$

   Restricciones:

$$\begin{cases} 10x_1+4x_2 & \geq & 100 & Produccion \quad mineral \quad M \\ 20x_1+30x_2 & \geq & 420 & Produccion \quad mineral \quad N \\ x_1 & \geq & 4 & Camara \quad tipo \quad A \\ x_2 & \geq & 4 & Camara \quad tipo \quad B \\ x_1,x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} 10x_1+4x_2 & = & 100 \\ 20x_1+30x_2 & = & 420 \\ x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & 4 \end{cases}$$

C(Ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 = 100 \\ x_1 = 4 \end{cases} \longrightarrow \text{C(4;15)}$$

D(Ecuaciones 3 y 4):

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 = 100 \\ 20x_1 + 30x_2 = 420 \end{cases} \longrightarrow \text{D(6;10)}$$

E(Ecuaciones 2 y 4):

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 = 420 \\ 10x_2 = 420 \end{cases} \longrightarrow \text{E(15;4)}$$

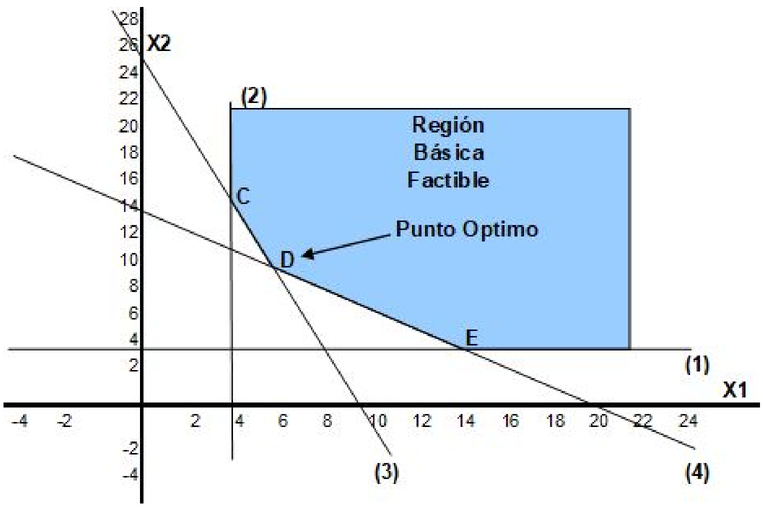

Figura 2.7 Ejercicio 6

$P(x_1,x_2)Z = 600x_1 + 300x_2$
$C(4,15) \longrightarrow Z = 600(4) + 300(15) = 6.900$
$D(6,10) \longrightarrow Z = 600(6) + 300(10) = 6.600 \quad Punto \quad optimo$
$E(15,4) \longrightarrow Z = 600(15) + 300(4) = 10.200$

Solución optima:

Z(MÍN) = 6.600 Mil unidades monetarias

$x_1 = 6$ Cámaras tipo A,

$x_2 = 10$ Cámaras tipo B.

7. Productora Cia. Ltda., fabrica 2 productos A y B a partir de tres componentes C_1, C_2 y C_3, cuyo costo unitario es de 3 dólares por tonelada, el producto A y 5 dólares por tonelada el producto B. El producto A contiene un 10 por

ciento de C_1, un 16 por ciento de C_2 y un 12 por ciento de C_3; mientras que el producto B contiene un 40 por ciento de C_1 y un 10 por ciento de C_3. Para satisfacer sus contratos requiere de al menos 600 toneladas de C_1, 400 toneladas de C_2 y 450 toneladas de C_3. ¿Que cantidades de los A y B se debe elaborar para minimizar el costo?

Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & \longrightarrow & Productos \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Cantidades \\ 3 & 5 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

$$\begin{cases} Componentes & Cantidades & & Toneladas \\ & A & B & \\ C_1 & 0.10 & 0.40 & 600 \\ C_2 & 0.16 & 0 & 400 \\ C_3 & 0.12 & 0.10 & 450 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MIN) = 3X_1 + 5X_2$

Z(MÍN) = Minimizar los costos de los insumos

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.4x_2 & \geq & 600 \\ 0.16x_1 + 0x_2 & \geq & 400 \\ 0.12x_1 + 0.1x_2 & \geq & 450 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.4x_2 & = & 600 \\ 0.16x_1 & = & 400 \\ 0.12x_1 + 0.10x_2 & = & 450 \end{cases}$$

C(Ecuaciones 2 y 3):

$$\begin{cases} 0.12x_1 & + & 0.10x_2 & = & 450 \\ & & x_1 & = & 2500 \end{cases} \longrightarrow \text{C(2500;1500)}$$

D(Ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} 0.10x_1 & + & 0.40x_2 & = & 600 \\ 0.12x_1 & + & 0.10x_1 & = & 450 \end{cases} \longrightarrow \text{D(3157.89;710.53)}$$

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MIN) = 3x_1 + 5x_2$

$C(2.500, 1.500) \longrightarrow Z = 3(2.500) + 5(1.500) = 15.000$

$D(3157,89; 710,53) \longrightarrow Z = 3(3157,89)+5(710,53) = 13026,32$ *Punto Optimo*

Solución Óptima:

Z(MÍN) = 13.026,32 dolares,

$x_1 = 3157.89$ Toneladas del producto A,

$x_2 = 710.53$ Toneladas del producto B.

Se logrará un costo mínimo de (13.026,32 dólares) cuando se produzca 3157,89 toneladas del producto A y 710,53 toneladas del producto B.

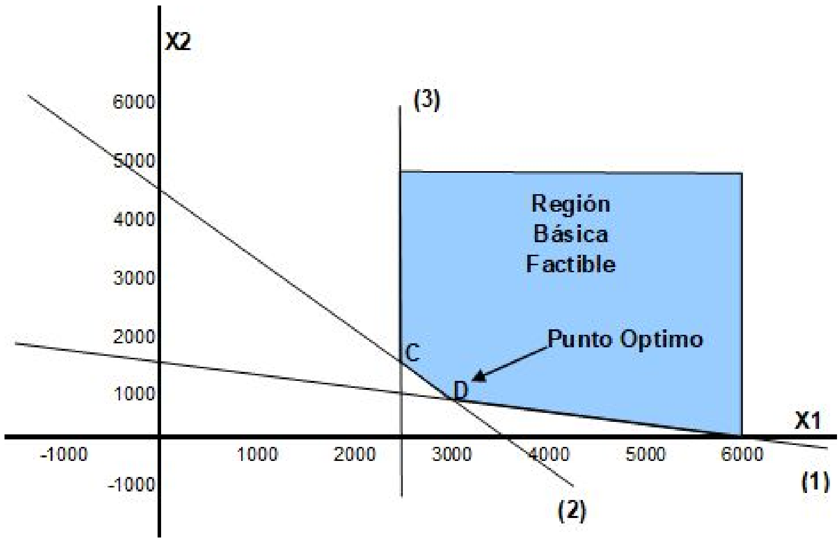

Figura 2.8 Ejercicio 7

2.8.4. Ejercicios Combinados Método Gráfico

8. La compañía Metales Ltda. fabrica dos metales A y B, a través de dos minerales: cobre y Zinc. El metal A contiene 90 por ciento de cobre y 10 por ciento de zinc y al venderlo deja una ganancia de 5 dolares por kilo. El metal B contiene 50 por ciento de cobre y 50 por ciento de zinc y da una ganancia de 7 dolares por kilo. Cada semana debe producir 150 kilos del metal A y 100 kilos del metal B, por lo menos. Su proveedor le puede suministrar cada semana 270 kilos de cobre y 100 de zinc. Calcular la cantidad de kilos de A y B que den la máxima ganancia ?

   Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & \longrightarrow & Productos \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Cantidades \\ 5 & 7 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

   Función Objetivo:

   $Z(MIN) = 5X_1 + 7X_2$

   Restricciones:

$$\begin{cases} 0.90x_1 + 0.5x_2 & \leq & 270 & Consumo\ de\ Cobre \\ 0.10x_1 + 0.5x_2 & \leq & 100 & Consumo\ de\ Zinc \\ x_1 & \geq & 150 & Demanda\ de\ A \\ x_2 & \geq & 100 & Demanda\ de\ B \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

   Abstracción:

$$\begin{cases} 0.90x_1 + 0.5x_2 & = & 270 \\ 0.10x_1 + 0.5x_2 & = & 100 \\ x_1 & = & 150 \\ x_2 & = & 100 \end{cases}$$

   C(Ecuaciones 2 y 3):

$$\begin{cases} 0.10x_1 & + & 0.50x_2 & = & 100 \\ & & 0.10x_1 & = & 150 \end{cases} \longrightarrow \text{C(150;170)}$$

D(Ecuaciones 1 y 2):

$$\begin{cases} 0.90x_1 + 0.50x_2 = 270 \\ 0.10x_1 + 0.50x_1 = 100 \end{cases} \longrightarrow \text{D(212.5;157.5)}$$

E(Ecuaciones 3 y 4):

$$\begin{cases} x_1 = 150 \\ x_2 = 100 \end{cases} \longrightarrow \text{E(150;100)}$$

F(Ecuaciones 1 y 4):

$$\begin{cases} 0.90x_1 + 0.50x_2 = 270 \\ x_2 = 100 \end{cases} \longrightarrow \text{F(244.44;100)}$$

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 5x_1 + 7x_2$

$C(150, 170) \longrightarrow Z = 5(150) + 7(170) = 1.940$

$D(212,5; 157,5) \longrightarrow Z = 5(212,5) + 7(157,5) = 2.165$ *Punto Optimo*

$E(150, 100) \longrightarrow Z = 5(150) + 7(100) = 1.450$

$F(244, 44, 100) \longrightarrow Z = 5(244, 4) + 7(100) = 1.922, 2$

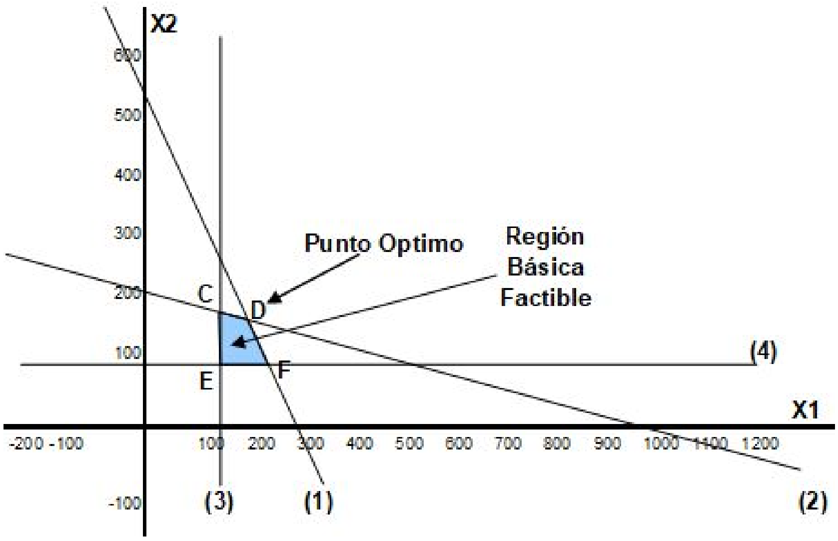

Figura 2.9 Ejercicio 8

9. Un agricultor quiere cultivar maíz y trigo en un terreno de 200 hectáreas. Sabe que, una hectárea puede rendir 4 quintales de maíz o 2 de trigo. Cada hectárea requiere un capital de 6 dólares, si se cultiva con maíz y de 2 dólares si se cultiva con trigo. El capital disponible es al menos de 600 d6lares. Las necesidades de agua de riego son de 50 m^2 por hectárea de maíz y 50 m^2 por hectárea de trigo, en octubre. De 200 m^2 por hectárea de maíz y 100 m^2 por hectárea de trigo, en el mes de noviembre. La disponibilidad de agua en octubre es al menos de 6.250 m^3 y en noviembre, cuando mucho de 25.000 m^3. Si los precios de venta del maíz y el trigo son 6 dólares y 10 dólares por quintal métrico, respectivamente. Determinar la cantidad de maíz y trigo que debe producirse para obtener el beneficio máximo?.

   Función Objetivo:

   $Z(MAX) = 6x_1 + 10x_2$

   Restricciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & \geq & 200 & Hectarias\ de\ Maiz\ y\ trigo \\ \frac{6}{4}x_1 + \frac{2}{2}x_2 & \leq & 600 & Capital\ para\ Maiz\ y\ trigo \\ \frac{50}{4}x_1 + \frac{50}{2}x_2 & \geq & 6.250 & Agua\ octubre\ para\ maiz\ y\ trigo \\ \frac{200}{4}x_1 + \frac{100}{2}x_2 & \leq & 25.000 & Agua\ noviembre\ para\ maiz\ y\ trigo \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 400 \\ 3x_1 + 2x_2 & = & 1.200 \\ x_1 + 2x_2 & = & 500 \\ x_1 + x_2 & = & 500 \end{cases}$$

C(Ecuaciones 2 y 4):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1.200 \\ x_1 + x_2 = 500 \end{cases} \longrightarrow \text{C(200;300)}$$

D(Ecuaciones 2 y 3):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1.200 \\ x_1 + 2x_2 = 500 \end{cases} \longrightarrow \text{D(350;75)}$$

F(Ecuaciones 3 y 4):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 500 \\ x_1 + x_2 = 500 \end{cases} \longrightarrow \text{F(500;0)}$$

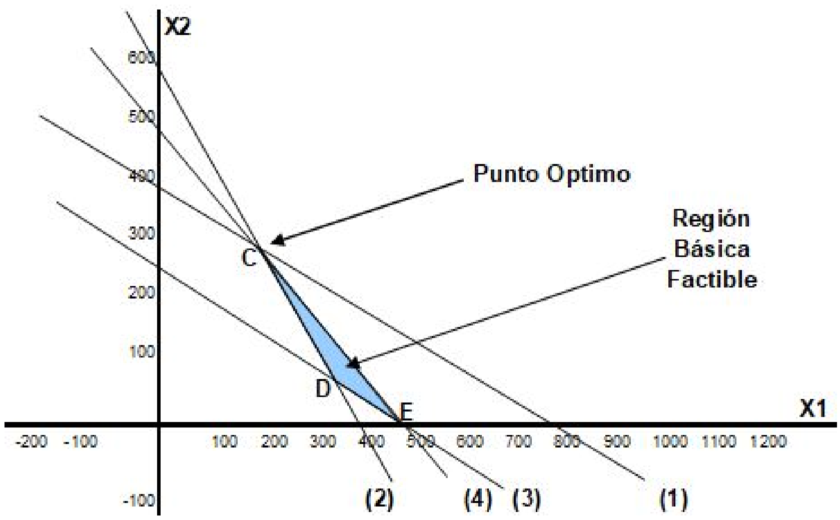

Figura 2.10 Ejercicio 9

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 6x_1 + 10x_2$

$C(200, 300) \longrightarrow Z = 6(200) + 10(300) = 4.200$ *Punto Optimo*

$D(350, 75) \longrightarrow Z = 6(350) + 10(75) = 2.850$

$E(500, 0) \longrightarrow Z = 6(500) + 10(0) = 3.000$

Solución óptima:

Z(MÁX)= 4.200 dólares,

$x_1 = 200$ Unidades de maíz,

$x_2 = 300$ Unidades de trigo.

10. Un taller de calzado confecciona zapatos para hombre y mujer. El producir un par de zapatos de hombre, requiere el doble de tiempo que para producir un par de zapatos de mujer. El taller esta en capacidad de producir al menos 14 pares de zapatos. En el mercado solo se puede conseguir diariamente la cantidad de cuero y suela para 12 pares de zapatos. Los zapatos de mujer requieren de una fibra, la cual solo existe para 7 pares de zapatos diariamente. Para la confección de los zapatos de hombre, se puede conseguir exactamente 6 pares de tacos de caucho diariamente. ¿Que cantidad de zapatos de hombre y mujer debe producir diariamente dicho taller para maximizar el beneficio, si se sabe, que al vender un par de zapatos de hombre se obtiene 25 dólares de utilidad y 30 dólares al vender un par de zapatos de mujer?

Formulación del problema:

$$\begin{cases} Hombre & Mujer & \longrightarrow & Zapatos \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Cantidades \\ 25 & 30 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MAX) = 25x_1 + 30x_2$

Restricciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \geq & 14 & Capacidad \\ x_1 + x_2 & \leq & 12 & Materiales \\ x_2 & \leq & 7 & Fibra \\ x_1 & = & 6 & Tacos \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = & 14 \\ x_1 + x_2 & = & 12 \\ x_2 & = & 7 \\ x_1 & = & 6 \end{cases}$$

C(Ecuaciones 2 y 4):

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \\ & & x_1 & = & 6 \end{cases} \longrightarrow \text{C(6;6)}$$

D(Ecuaciones 1 y 4):

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & 14 \\ & & x_1 & = & 6 \end{cases} \longrightarrow \text{D(6;2)}$$

Como la restricción $x_1 = 6$, lleva el signo de igualdad, en consecuencia la región básica factible, esta formada por la recta comprendida entre los puntos C y D.

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 25x_1 + 30x_2$

$C(6,6) \longrightarrow Z = 25(6) + 30(6) = 330 Puntooptimo$

$D(6,2) \longrightarrow Z = 25(6) + 30(2) = 210$

Solución óptima:

Z(MÁX) = 330

x_1 = 6 zapatos de hombre,

x_2= 6 zapatos de mujer.

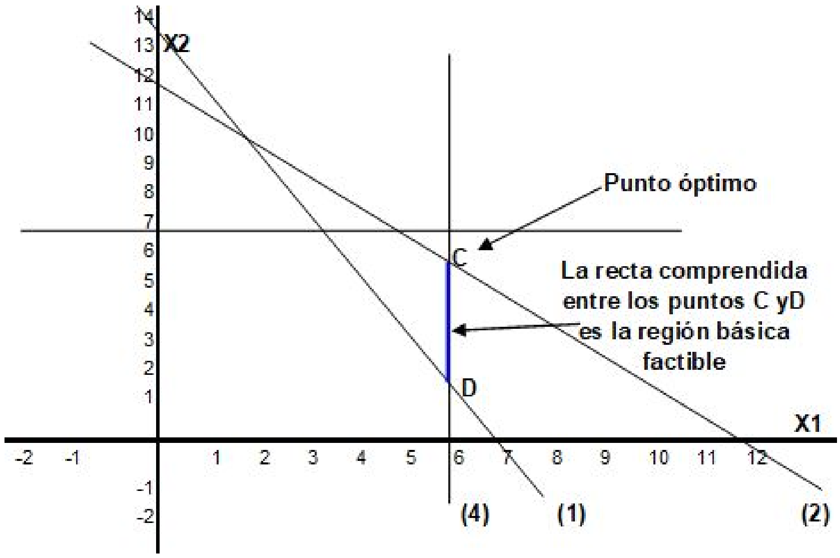

Figura 2.11 Ejercicio 10

11. El Ministerio de Obras Publicas ha decidido añadir exactamente 200 kilómetros de carretera y exactamente 100 de autopista, en el sector de la costa. El precio estándar para construcción de carretera es de un millón de d6lares por Km. y de 5 millones por Km. de autopista. Solo dos contratistas, la compañía Prefabricados y la compañía Erazo Ltda. Pueden realizar este tipo de construcciones. Así que, los 300 Km. de camino deben ser construidos por estas compañías. Sin embargo, la compañía Prefabricados puede construir a lo mas 200 Km. de carretera y autopista y la segunda compañía puede construir a lo mas 150 Km. Por razones políticas, a cada compañía debe adjudicársela un contrato de al menos 250 millones (antes del descuento). La primera compañía ofrece un descuento de 1.000 dólares por Km. de carretera y 6.000 dólares por Km. de autopista, la segunda compañía ofrece un descuento de 2.000 dólares por Km. de carretera y 5.000 dólares por Km. de autopista.

1) Six_1 y x_2 representan el numero de Km. de carretera y autopista, respectivamente adjudicados a la compañía Prefabricados, demuestre que el descuento total D recibido de ambas compañías (en miles) este dado por: $D = 900 - x_1 + x_2$
   Solución:
   $D = 1 \cdot x_1 + 6x_2 + 2(200 - x_1 + 5(100 - x_2)$
   $D = 1 \cdot x_1 + 6x_2 + 400 - 2x_1 + 500 - 5x_2$
   $D = 900 - x_1 + x_2$
2) El Ministerio de Obras y Comunicaciones desea maximizar el descuento total D, resuelva el problema mediante el método gráfico.
   Función objetivo:
   $Z(MAX) = D = 900 - x_1 + x_2$
   Restricciones:

$(200 - x_1) + (100 - x_2) \leq 150$
$300 - x_1 - x_2 \leq 150$
$-x_1 - x_2 \leq -150 \longrightarrow x_1 + x_2 \geq 150$
$1 \cdot (200 - x_1) + 5(100 - x_2) \geq -450 \longrightarrow x_1 + x_2 \leq 450$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 200 \\ x_1 + x_2 & \geq & 150 \\ x_1 + 5x_2 & \geq & 250 \\ x_1 + 5x_2 & \leq & 450 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \qquad No-negatividad \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 200 \\ x_1 + x_2 & = & 150 \\ x_1 + 5x_2 & = & 250 \\ x_1 + 5x_2 & = & 450 \end{cases}$$

C(Ecuaciones 2 y 4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 150 \\ x_1 + 5x_2 = 450 \end{cases} \longrightarrow \text{C(75;75)}$$

D(Ecuaciones 1 y 4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 200 \\ x_1 + 5x_2 = 250 \end{cases} \longrightarrow \text{D(137.5;62.5)}$$

E(Ecuaciones 2 y 3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 150 \\ x_1 + 5x_2 = 250 \end{cases} \longrightarrow \text{E(125;25)}$$

F(Ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 200 \\ x_1 + 5x_2 = 450 \end{cases} \longrightarrow \text{F(187.5;12.5)}$$

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = D = 900 - x_1 + x_2$
$C(75, 75) \longrightarrow D = 900 - 75 + 75 = 900$ Punto óptimo.
$D(137.5, 62.5) \longrightarrow D = 900 - 137.5 + 62.5 = 825$
$E(125, 25) \longrightarrow D = 900 - 125 + 25 = 800$
$F(187.5, 12.5) \longrightarrow D = 900 - 187.5 + 12.5 = 725$

Solución óptima:

Z(MÁX) = Descuento total = 900 MIL DOLARES
x_1 = 75 Kilómetros de carretera
x_2 = 75 Kilómetro de autopista

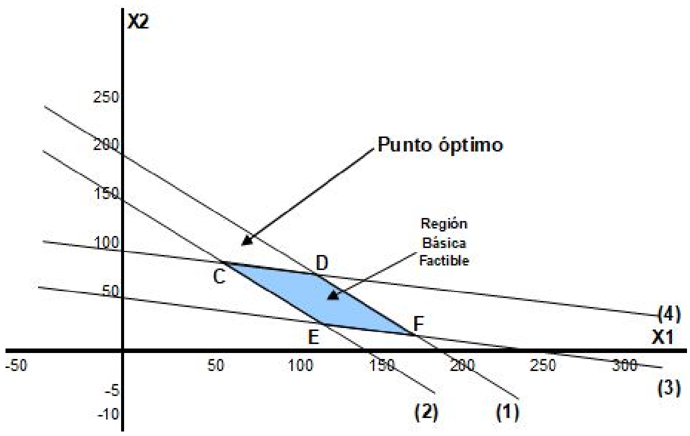

Figura 2.12 Ejercicio 11

2.9. Análisis de Sensibilidad de las Restricciones

La búsqueda de la solución de un modelo de decisión, es solo el primer paso del análisis. También es importante que, el gerente comprenda cuan sensible es la solución a los cambios en las suposiciones y a los factores exógenos. Esto también, se aplica a los modelos de programación lineal, y una de las características agradables de los modelos de programación lineal es que, gran parte de este análisis de sensibilidad proviene directamente de la solución del problema. Primero se vera estos conceptos en forma gráfica y después por medio de la interpretación de las salidas de los programas de computación que se usan para resolver problemas de programación lineal. Para entender mejor el análisis de sensibilidad, se partirá del siguiente ejemplo:
Una empresa fabrica dos productos A y B. Cada uno requiere tiempo en dos máquinas. La primera maquina tiene 24 horas disponibles y la segunda tiene 16. Cada unidad del producto A requiere 2 horas en ambas maquina y cada unidad del producto B necesita 3 horas en la primera máquina y una hora en la segunda. Los beneficios son de seis dólares por unidad de A y de 7 dólares por unidad de B, y la empresa puede vender todas las unidades que fabrique de ambos productos. El objetivo es maximizar el beneficio.

Función objetivo:

$Z(MAX) = 6x_1 + 7x_2$

Restricciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 24 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases}$$

El punto C es el óptimo, para encontrar sus coordenadas resolvemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 24 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases} \longrightarrow \text{C(6;4)}$$

Solución óptima:

Z(MÁX) = 6(6) + 7(4),

Z(MÁX) = 64

x_1 = 6 unidades del producto A,

x_2 = 4 unidades del producto B.

Para realizar su sensibilidad, primero se obtiene el gráfico que representa el ejercicio; es decir:

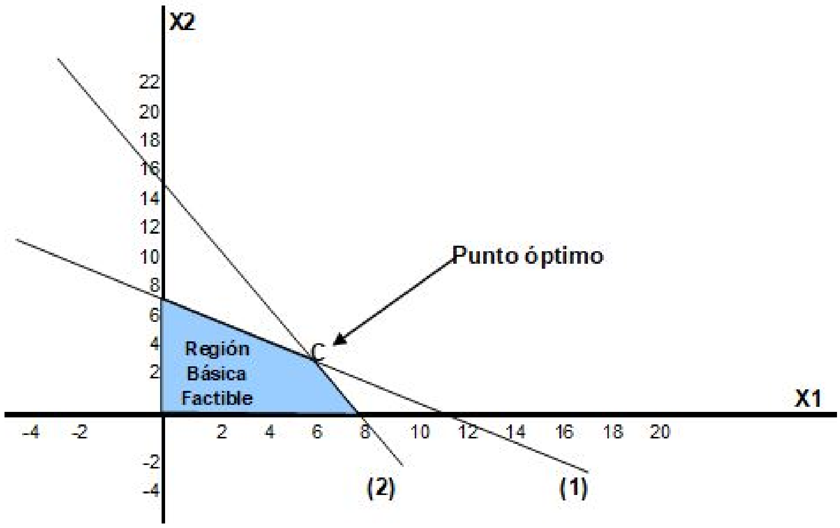

Figura 2.13 Análisis de Sensibilidad

Se Amplia el problema que, se ha usado como ejemplo. Suponga que el Límite del mercado es la venta de seis unidades del producto B. Ahora la formulación es:

$Z(MAX) = 6x_1 + 7x_2$

Restricciones:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\ & & x_2 & \leq & 6 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

El nuevo gráfico es:

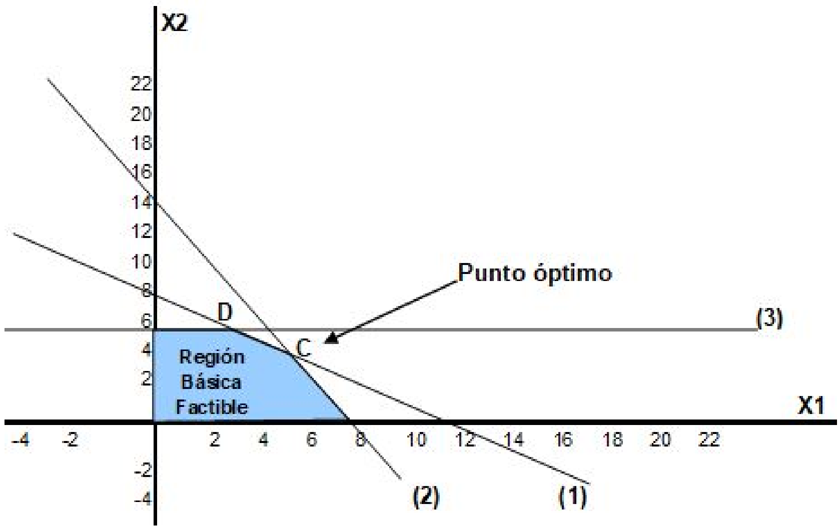

Figura 2.14 Análisis de Sensibilidad

La solución es la misma:

Z(MÁX.) = 64

x_1 = 6 unidades del producto A,

x_2 = 4 unidades del producto B

Precios duales:

Considere la ecuación de restricción para la maquina 1, que especifica un máximo de 24 horas disponibles. En términos de la programación lineal, este límite de la capacidad con frecuencia se denomina valor del término independiente o segundo miembro de la restricción (o sencillamente bj). Suponga que puede agregar una hora, para que, la restricción sea:

$2x_1 + 3x_2 \leq 25$

Su gráfico seria:

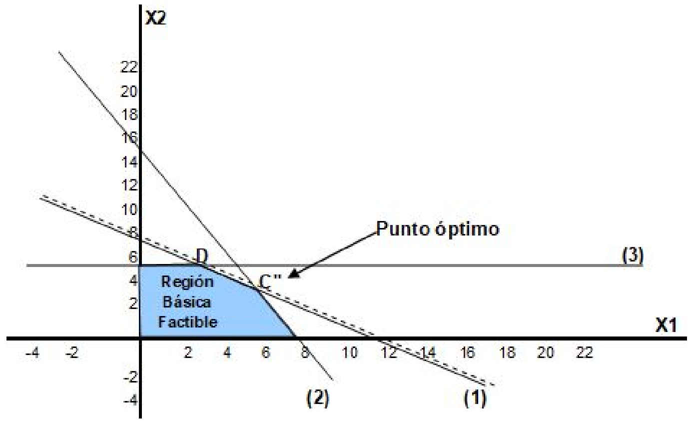

Figura 2.15 Análisis de Sensibilidad

La nueva solución optima se traslada al punto *C"*, con $x_1 = 5.75$ y $x_2 = 4.5$. Como la solución anterior requería $x_1 = 6$ y $x_2 = 4$, una hora adicional disponible en la maquina 1 da como resultado una reducción de 0.25 unidades de producto A y un aumento de 0.5 unidades en el producto B.. El cambio neto en la función objetivo es, entonces:

Z(MÁX.) = 6(5.75) + 7(4.5) = 66

Incremento neto = 6(-0.25) + 7(0.5) = 2.

Lo cual, representa un incremento de dos dólares en el beneficio de A, esto se le conoce, como precio dual, valor marginal o precio sombra y es el aumento en los beneficios por cambio unitario en el término independiente de una restricción.

Observe que, el precio dual se mantiene para una reducción en el valor del término independiente. Por ejemplo, si sólo hubiera 23 horas disponibles en la maquina 1, el punto C"sería la solución óptima ($x_1 = 6.25$ y $x_2 = 3.5$), Gráfico con reducción de una hora en el termino independiente (23)

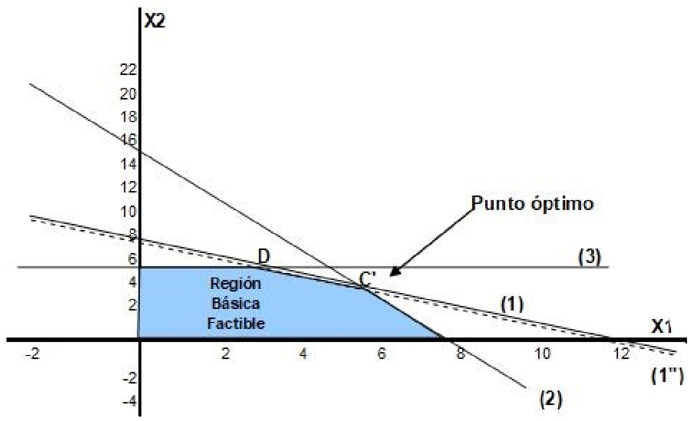

Figura 2.16 Análisis de Sensibilidad

Z(MÁX.) = 6(6.25) + 7(3.5) = 62

Reducción neta = 6(0.25) + 7(-0.5) = -2

con una reducción de dos dólares en el beneficio. Entonces, el precio dual o valor marginal representa el aumento en el beneficio, cuando una restricción, se amplio en una unidad y una reducción en el beneficio cuando la restricción se estrecha en una unidad.
Se puede aplicar el mismo análisis a la restricción de la máquina 2. Cuando la segunda restricción se amplia agregando una hora, se convierte en:

$2x_1 + x_2 \leq 17$

y el punto óptimo es C' con $x_1 = 6.75$ y $x_2 = 3.5$. Esto representa un aumento de 0.75 en el número de unidades del producto A y una reducción de 0.5 unidades del producto B. El efecto neto en el beneficio:

Z(MÁX.) = 6(6.75) + 7(3.5) = 65

Incremento neto = 6(0.75) + 7(-0.5) = 1

Una reducción similar en el término independiente (es decir, en el numero de horas disponibles) de la restricción 2 da como resultado una solución de $x_1 = 5.25$ y $x_2 = 4.5$, y una reducción de un dólar en el beneficio. Por lo tanto, el precio dual asociado a la restricción de la maquina 2 es un dólar.

Z(MÁX) = 6(5.25) + 7(4.5) = 63

Reducción neta= 6(-0.75) + 7(0.5) = -1

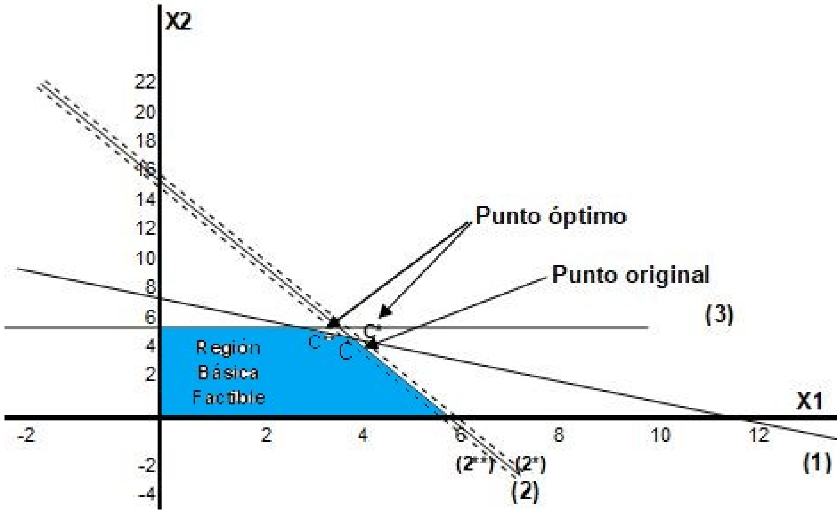

Figura 2.17 Análisis de Sensibilidad

Ahora consideremos la tercera restricción:

$x_2 \leq 6$

El aumento de una unidad en este limite, a $x_2 \leq 7$, y la reducción de una unidad, a $x_2 \leq 5$, se muestran gráficamente en el figura 2.18. Se observa que, ninguno de los cambios afecta a la solución, ya que la restricción $x_2 \leq 6$ no es efectiva. La solución óptima requería sólo cuatro unidades del producto B, por lo cual no importa el límite de seis unidades que impone el mercado. Por lo tanto, el precio dual es cero. De hecho, el precio dual de cualquier restricción no efectiva siempre es cero.

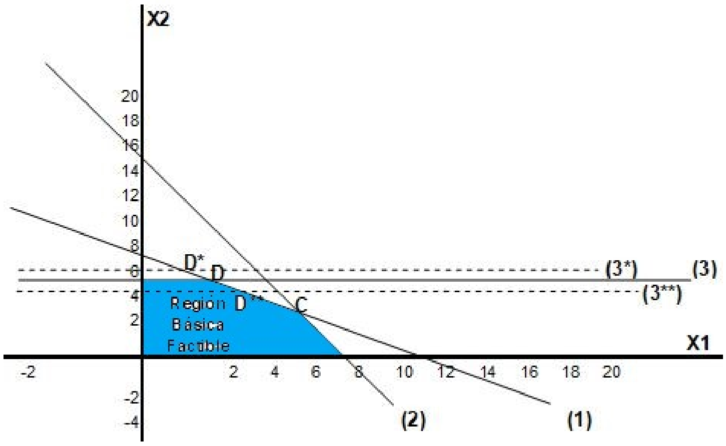

Figura 2.18 Análisis de Sensibilidad

Costos Reducidos:

Precios duales, para las restricciones de no negatividad. También, es posible determinar los valores marginales asociados a introducir al menos una unidad de una variable de decisión en la solución. Recuerde que las restricciones de no negatividad son $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. El incluir una unidad en la solución, implica modificar una restricción de no negatividad a $x_1 \geq 1$ o $x_2 \geq 1$. Los valores marginales de hacer esto, se denominan costos reducidos. Se considera de nuevo el problema básico que se presenta en el figura 2.18. La solución optima requiere $x_1 = 6$ y $x_2 = 4$. Los dos son valores positivos y, por lo tanto, ninguna de las restricciones de no negatividad es efectiva. Entonces, el valor marginal (es decir, el costo reducido) asociado a su modificación es cero, al igual que para las demás restricciones no efectivas.

Suponga ahora que, la función objetivo es $Z(MAX) = 10x_1 + 8x_2$, como se muestra en la figura 2.19 El punto extremo E, es la solución optima, con $x_1 = 8$ y $x_2 = 0$ y beneficio es:

Z(MÁX) = 10(8) + 3(0) = 80

Observe que $x_2 = 0$, por lo cual, la restricción de no negatividad $x_2 \geq 0$ es efectiva. Suponga ahora que, debe producirse por lo menos una unidad del producto B, debido a un compromiso con un cliente, por lo cual, se cambia la restricción de no negatividad a $x_2 \geq 1$. Con esto cambia la solución optima de la figura 2.20, a E'.

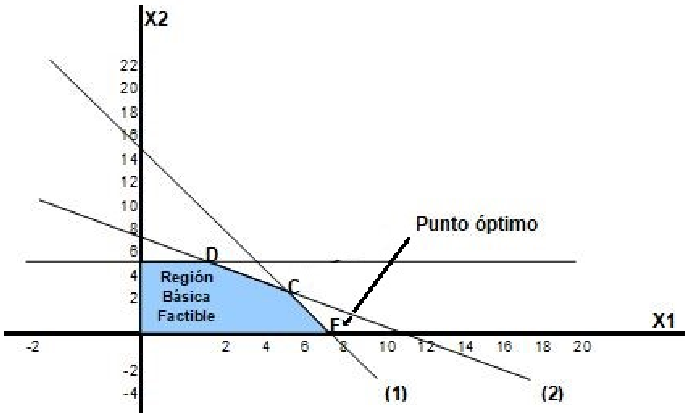

Figura 2.19 Análisis de Sensibilidad

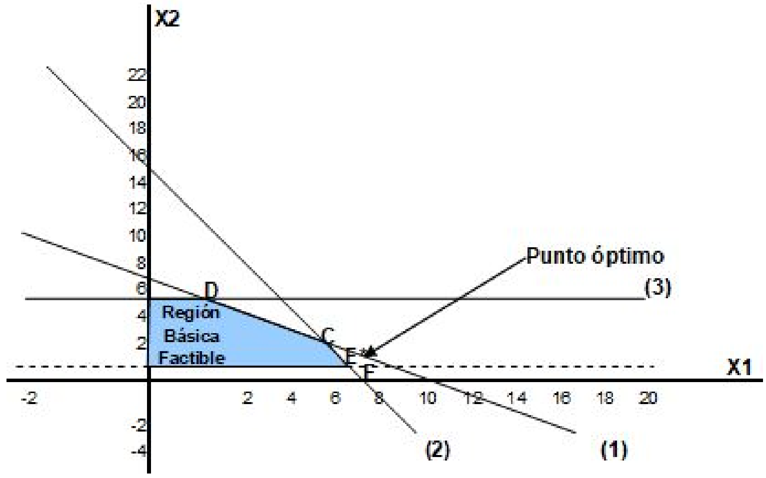

Figura 2.20 Análisis de Sensibilidad

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 16 \\ x_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow E'(7.5;1)$$

Z(MÁX.) = 10(7.5)+ 3(1) = 78

Una reducción de dos d6lares con respecto al nivel anterior. En este caso el costo reducido o valor marginal asociado con la restricción de no negatividad de x_2 es de dos dólares, que representa el costo de conservar al cliente.

Utilización de Precios Duales:

Los precios duales tienen muchas aplicaciones empresariales. Aunque, en el mundo existen restricciones y limitaciones, la mayoría de ellas no son absolutas. Por ejemplo, el gerente que formula el problema de programación lineal determine las horas disponibles en cada una de las maquinas en circunstancias normales, pero podría obtener horas adicionales, con trabajo en tiempo extra, comprando equipo adicional o re-programando otras actividades. Los precios duales indican si vale la pena hacerlo y con que margen, y así ayudan a identificar los cuellos de botella clave. En nuestro ejemplo, el gerente sabe que vale el doble (dos dólares en lugar de uno) obtener horas adicionales para la maquina 1 que para la maquina 2. Un precio dual representa el valor marginal asociado con un cambio unitario en el término independiente de una restricción. Un costo reducido representa el valor marginal de introducir en la solución una unidad de una variable de decisión. Los costos reducidos se pueden considerar, como precios duales de las restricciones de no-negatividad. Si una restricción no es efectiva, su precio dual es cero.

Intervalos de Variación del Termino Independiente

Los precios duales proporcionan el valor marginal de la realización de un cambio pequeño en el límite de una restricción (es decir, el valor del termino independiente), pero seria un error, creer que estos valores serían los mismos si la capacidad se cambiara en forma arbitrara. Se llega a un punto en el cual la capacidad adicional es excesiva y no tiene valor; por lo tanto, hay Límites con respecto al intervalo de capacidad en el cual se mantienen los valores marginales. Considere de nuevo la restricción de 24 horas disponibles para la maquina 1.

En la figura 2.19, muestra lo que sucede al añadir horas. Recuerde que, an-

teriormente se mencionó que, cada hora adicional daba como resultado una reducción de 0.25 unidades del producto A y un aumento de 0.5 unidades del producto B. El precio dual asociado con cada hora de variación era de dos dólares. Con 28 horas disponibles, la solución óptima pasa de C a F.
En F, la solución óptima es $x_1 = 5$ y $x_2 = 6$. Las horas adicionales en la máquina 1 no tendrán efecto más allá de este punto, ya que la restricción $x_2 = 6$ ahora es efectiva. Con las demás restricciones del problema, la cantidad de 28 horas en la maquina 1, es la máxima, que puede usarse de manera rentable. Entonces, este incrementó de cuatro horas, para llegar a 28 horas disponibles, representa el límite superior del intervalo en el cual es valido el precio dual de dos dólares.

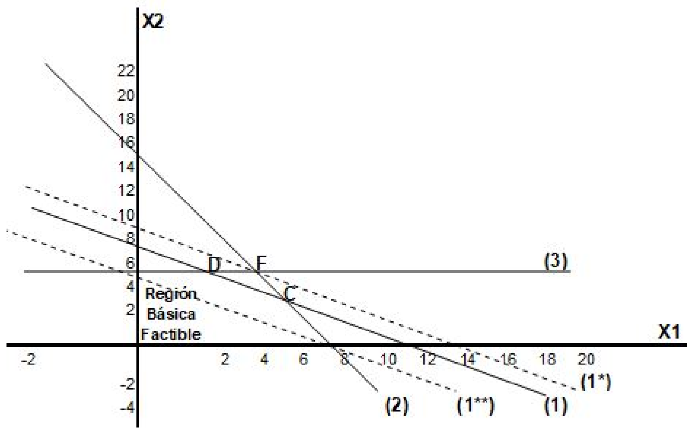

Figura 2.21 Análisis de Sensibilidad

De manera análoga, al reducir las horas disponibles de la maquina 1, la solución óptima se desplaza hasta del punto F* de la figura 2.20 , donde se usan 16 horas del tiempo de la maquina. Al reducir las horas, disminuye el beneficio por aumentar el numero de unidades del producto A y por reducir el número de unidades del producto B, pero al llegar al punto F* no se producen unidades de B, por lo cual ya no es posible este proceso de sustitución. Entonces, el limite inferior del intervalo del precio dual de dos dólares para el tiempo de la maquina 1 es una reducción de ocho horas (de 24 a 16).
Se puede efectuar un análisis similar para la maquina 2; figura 2.21, presenta los límites. Al añadir horas a las 16 disponibles, la solución óptima se desplaza de C a F. En este punto, se han agregado ocho horas (de 16 a 24) y las horas adicionales ya no añadirán valor. Si se reducen cuatro horas disponibles (de 16 a 12), la solución optima pasa de C a F*. Entonces, el precio dual de un dólar se mantiene en el intervalo de 12 a 24 horas disponibles en la maquina 2.
La restricción de la demanda del mercado para el producto B, $x_1 \leq 6$, es un poco diferente. Recuerde que esta restricción no es efectiva y tiene precio dual de cero.

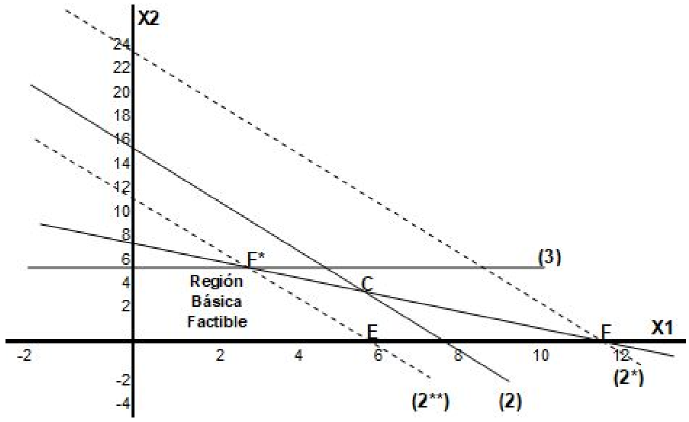

Figura 2.22 Análisis de Sensibilidad

La solución óptima, requiere solo cuatro unidades del producto B, por lo cual se puede aumentar indefinidamente el limite de la demanda sin que tenga efecto; no importaría si la restricción fuera $x_2 \leq 10$ o $x_2 \leq 100$. Por otra parte, si el límite de la demanda fuera cuatro unidades, de manera que la restricción fuera $x_1 \leq 4$, seria efectiva. Cualquier reducción por debajo de este límite de cuatro unidades reduciría el beneficio. Entonces, el intervalo del Límite de la demanda (es decir, el termino independiente) de la tercera restricción, es de cuatro unidades al infinito y dentro de este intervalo se mantiene el precio dual de cero.
El análisis de sensibilidad ha producido los siguientes intervalos, para los valores del término independiente de las tres restricciones.
Los precios duales expresan el valor marginal del cambio del término independiente de una restricción, pero estos valores solo se mantienen en ciertos intervalos:

Restricción	Análisis de Sensibilidad			
	Limite Actual	Precio Dual	Aumento Permitido	Reducción Permitida
Horas de la Maquina 1	24	2	4	8
Horas de la Maquina 2	16	1	8	4
Demanda Producto B	6	0	infinito	2

Cuadro 2.1: Análisis de Sensibilidad

2.10. Análisis de Sensibilidad: Evaluación de Nuevos Productos.

Los precios duales pueden servir para identificar cuellos de botella o restricciones costosas, que se pueden modificar de manera rentable. Los precios duales, también pueden ser útiles para evaluar productos nuevos. Considere una ampliación de nuestro ejemplo. El departamento de investigación y desarrollo de la compañía a creado un producto, C. Es muy rentable (10 dólares por unidad), pero requiere cuatro horas en la maquina 1 y tres horas en la máquina 2. ¿Deben producirse unidades del producto C?.

Por supuesto, se podría formular de nuevo todo el problema de programación lineal para añadir este producto nuevo, pero se puede obtener una respuesta rápida con los precios duales. La producción del producto C requerirá la reducción de las cantidades de los otros dos productos, ya que todos compiten por el tiempo disponible de las dos maquinas. Recuerde que los precios duales implican que, una hora de la máquina 1 vale dos dólares y una hora de la máquina 2 vale un dólar. Una unidad del producto C requiere cuatro y tres horas en las dos máquinas, respectivamente. Entonces, el costo de oportunidad de una unidad de producto C es:

[(Precio dual de las horas de la maquina 1) · (Horas requeridas por máquina 1)] + [(Precio dual de las horas de la máquina 2) · (Horas requeridas por máquina 2)]

o sea: $2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 11$

Esto representa el costo de perdida en la oportunidad de la producción de A y B. El beneficio del producto C, es solo de 10 dólares; por lo cual, no debe producirse. Ya que el costo de oportunidad excede el beneficio unitario.
La misma empresa, tiene otro artículo, el producto D, que requiere una hora en cada una de las maquinas y produce un beneficio unitario de cinco dólares. ¿Debe producirse? El costo de oportunidad de este producto es:

$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$

Como el beneficio es de cinco dólares por unidad; el cual, excede el costo de oportunidad de tres dólares, hay que producir algunas unidades del producto D.
Este análisis no indica cuantas unidades del producto D se deben fabricar; solo indica que debe incluirse en la combinación de productos.
El gerente formularia de nuevo el problema de programación lineal, para incluir otra variable de decisión para el producto D y luego resolvería de nuevo el problema con programación lineal.
El costo de oportunidad de un producto nuevo, se calcula como la suma de:

(Precio dual) x (Unidades requeridas)

Para todas las restricciones afectadas. Si el costo de oportunidad en menor que el beneficio por unidad del nuevo producto, entonces este es rentable y debe incluirse en la solución óptima. Si el costo de oportunidad es mayor que el beneficio por unidad, entonces no debe fabricarse el producto.

2.11. Análisis de Sensibilidad: Coeficientes de la Función Objetivo.

Un gerente puede interesarse en lo que puede suceder, con la solución de un problema de programación lineal, si cambia uno de los coeficientes de la función objetivo, por ejemplo: debido a un aumento en el precio de la materia prima. Se puede efectuar un análisis gráfico, similar al que se hizo

para los cambios en los coeficientes del término independiente.
Suponga que, el beneficio por unidad del producto A permanece fijo, en seis dólares, pero que el beneficio por unidad de B, que se espera sea de siete dólares puede cambiar. Cuando el coeficiente de x_2 en la función objetivo es 8 dólares; (es decir, beneficio de ocho por unidad del producto B), la función beneficio es:

$Z(MAX) = 6x_1 + 8x_2$

El punto: C(6; 4), $Z(MAX) = 6(6) + 8(4) = 68$

y el punto C, es aun la solución6n óptima. Si el coeficiente de x_2 aumenta a 9 dólares, la pendiente de la función beneficio es idéntica a la pendiente de la restricción. Por lo tanto, hay varias soluciones óptimas alterativas y, tanto C como D son vértices óptimos. Suponga que, el coeficiente de x_2 aumenta mas, hasta 10 dólares por unidad, de manera que la función de beneficio es:

$Z(MAX) = 6x_1 + 10x_2$

Para C(6, 4): Z(MÁX) = 6(6) + 10(4) = 76

Observe que en la región factible hay puntos por encima de la línea (es decir, con mayores beneficios), por lo cual el punto C, ya no es optimo. Ahora el punto D es la única solución óptima. En otras palabras, si el coeficiente de x_2 excede a nueve dólares, el punto optimo pasa del punto C al D.
El análisis es el mismo si se reduce el coeficiente de x_2. Con un coeficiente de 3, la función de beneficio es:

$Z(MAX) = 6x_1 + 3x_2$

Z(MÁX.) = 6(6) + 3(4) = 60

la función de beneficio coincide con la restricción de la maquina 2 y los puntos C y D son óptimos. Si el coeficiente se reduce más, a 1, el punto óptimo se desplaza a D. Se puede aplicar el mismo análisis para los beneficios de A, manteniendo constante el coeficiente de x_2 y modificando el de x_1. Aunque, no se muestra el análisis gráfico, los resultados indican que, el coeficiente de x_1 puede disminuir de 6 a 4.67 antes de que el punto óptimo cambie a D. Por otra parte, el coeficiente puede aumentar de 6 a 14 antes de que el punto óptimo se desplace a E. Estos resultados se pueden resumir como sigue:
Intervalos de los coeficientes de la función objetivo (Intervalo en el cual no cambia la solución optima básica):
Los intervalos del termino independiente y los intervalos de los coeficientes de la función objetivo: Conceptual-mente, los intervalos del análisis de sensibilidad son similares para los coeficientes de la función objetivo que, se desarrollaron previamente y los correspondientes a los coeficientes del

Variables	Análisis de Sensibilidad: Coeficientes de la Función Objetivo		
	Coeficiente Actual	Aumento Permitido	Reducción Permitida
Producto A	6	8	1.33
Producto B	7	2	4

Cuadro 2.2: Análisis de Sensibilidad

termino independiente. Sin embargo, existen diferencias importantes: La solución óptima no cambia, en el intervalo que se especifica, para los coeficientes de la función objetivo; es decir, la empresa debe producir seis unidades del producto A y cuatro unidades del producto B. Fuera del intervalo, la solución óptima cambia abrupta-mente a otro vértice. Por supuesto, los beneficios totales varían de acuerda con los cambios en los coeficientes, pero, una vez mas, la solución no varia dentro de los intervalos.
Por otra parte, en los intervalos del término independiente la solución cambia, ya que el punto óptimo se desplaza sobre una de las líneas de restricción. En nuestro ejemplo se producen diferentes cantidades de los productos A y B al moverse el punto óptimo. Al llegar al límite del intervalo, un nuevo vértice se convierte en la solución óptima.
Los intervalos, tanto para, los coeficientes del término independiente, como para, los de la función objetivo, proporcionan información importante en la interpretación de la solución de un programa lineal. Los intervalos del término independiente determinan los Límites dentro de los cuales, se mantiene el precio dual para cada restricción. Los intervalos de los coeficientes de la función objetivo determinan los límites dentro de los cuales la solución es la misma.

Ejemplo:

Una fábrica vende dos productos diferentes A y B, los beneficios son: para el producto A 30 dólares y para el producto B 25 dólares.
Los dos productos se fabrican en un proceso de producción común y se venden a dos mercados distintos. El proceso de producción tiene capacidad de 30 mil horas de trabajo. Se requieren 3 horas para producir una unidad de A y 1 hora para producir una unidad de B. El mercado se ha estudiado y los funcionarios de la compañía consideran que, el número máximo de unidades de A que pueden vender es 8 mil; el máximo de B es 12 mil unidades. Los productos se pueden vender en cualquier combinación, con las limitaciones anteriores.

1) Resuelva el problema aplicando programación lineal, mediante el método gráfico, para encontrar la combinación óptima del producto.
   Función objetivo:
   $Z(MAX) = 30x_1 + 25x_2$
   Restricciones:
   $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
   Abstracción:

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & = & 30 \\ & & x_1 & = & 8 \\ & & x_2 & = & 12 \end{cases}$$

C(ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & = & 30 \\ & & x_2 & = & 12 \end{cases} \longrightarrow C(6;12)$$

D(ecuaciones 1 y 2):

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & = & 30 \\ & & x_1 & = & 8 \end{cases} \longrightarrow D(8;6)$$

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 30x_1 + 25x_2$
$C(6,12) \longrightarrow Z = 30(6) + 25(12) = 480 \ \ mil$. Punto optimo.
$D(8,6) \ \ \longrightarrow Z = 30(8) + 25(6) = 390 \ \ mil$.

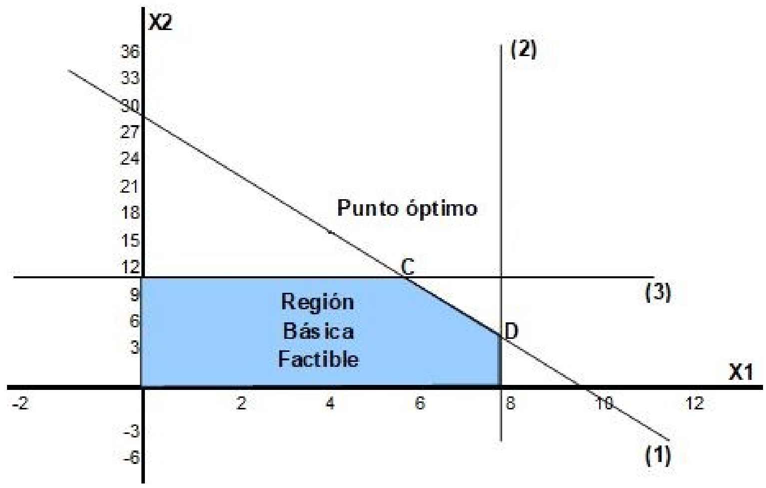

Figura 2.23 Análisis de Sensibilidad

Solución óptima:
Z(MÁX.) = 480 Mil dólares
$x_1 = 6$ Unidades del producto A,
$x_2 = 12$ Unidades del producto B.

2) Suponga que, el número máximo de unidades del producto A que pueden venderse es de 9 mil (en lugar de 8). ¿Cuál es el efecto en la solución?. ¿Cuál es el efecto en los beneficios?. ¿Cuál es el precio dual para la restricción que limita las ventas del producto A?.

Función objetivo:
$Z(MAX) = 30x_1 + 25x_2$

Restricciones:

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 30 \\ & & x_1 & \leq & 9 \\ & & x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & = & 30 \\ & & x_1 & = & 9 \\ & & x_2 & = & 12 \end{cases}$$

C(ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & = & 30 \\ & & x_2 & = & 12 \end{cases} \longrightarrow C(6;12)$$

D(ecuaciones 1 y 2):

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 30 \\ x_1 = 9 \end{cases} \longrightarrow D^*(9;3)$$

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 30x_1 + 25x_2$
$C(6,12) \longrightarrow Z = 30(6) + 25(12) = 480\ \ mil$. Punto óptimo.
$D^*(9,3) \ \longrightarrow Z = 30(9) + 25(3) = 345\ \ mil$.

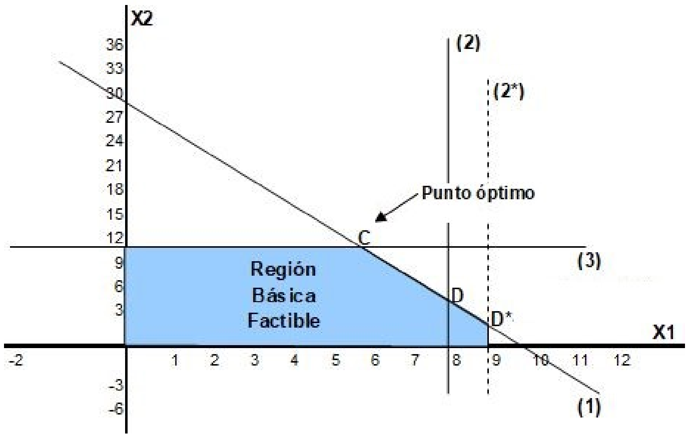

Figura 2.24 Análisis de Sensibilidad

Solución óptima:
Z(MÁX.) = 480 Mil dólares $x_1 = 6$ Unidades del producto A,
$x_2 = 12$ Unidades del producto B.
Un aumento de una unidad en el producto A, no afecta la solución óptima ni el beneficio, por tanto el precio dual es cero.

3) Suponga que, el número máximo de unidades del producto B, que puede venderse es 13 mil.
Restricciones:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 30 \\ x_1 = 8 \\ x_2 = 13 \end{cases}$$

C(ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 30 \\ x_2 = 13 \end{cases} \longrightarrow C^*(5.67;13)$$

D(ecuaciones 1 y 2):

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 30 \\ x_1 = 8 \end{cases} \longrightarrow D(8;6)$$

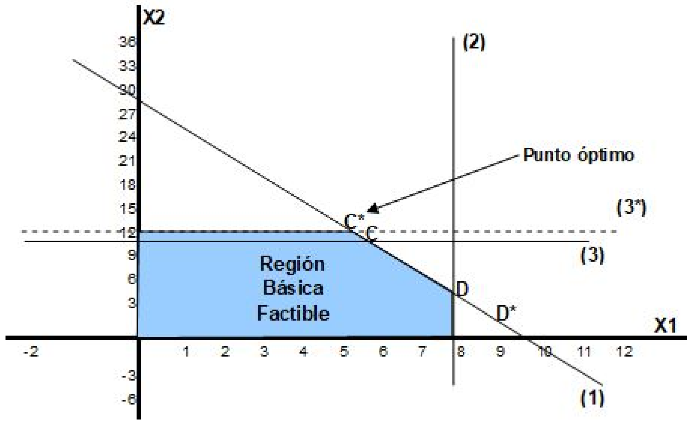

Figura 2.25 Análisis de Sensibilidad

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 30x_1 + 25x_2$
$C^*(5.67, 13) \longrightarrow Z = 30(5.67) + 25(13) = 495.1 mil$ Punto óptimo.
$D(8, 6) \longrightarrow Z = 30(8) + 25(6) = 390 mil$
Solución óptima:
Z(MÁX.) = 495.1 Mil dólares.
x_1 = 5.67 Unidades del producto A,
x_2 = 13 Unidades del producto B,
Incremento del beneficio = 495.1 - 480 = 15.1
Cada aumento de una unidad en el limite de producción de B, el beneficio aumenta en 15.1 dólares.

4) Suponga que hay 31 mil horas de trabajo disponibles, en lugar de 30 mil del caso base. ¿Cuál es el efecto en el problema?. ¿Cuál es el efecto en los beneficios?. ¿Cuál es el precio dual de la restricción del número de horas de trabajo?.
Restricciones:
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 31 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
Abstracción:
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 31 \\ x_1 = 8 \\ x_2 = 12 \end{cases}$$
C(ecuaciones 1 y 3):
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 31 \\ x_2 = 12 \end{cases} \longrightarrow C^*(6.33;12)$$
D(ecuaciones 1 y 2):
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 31 \\ x_1 = 8 \end{cases} \longrightarrow D^*(8;7)$$
$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 30x_1 + 25x_2$
$C^*(6.33; 12) \longrightarrow Z = 30(6.33) + 25(12) = 489.9 mil$ Punto óptimo
$D*(8, 6) \longrightarrow Z = 30(8) + 25(7) = 415 mil$

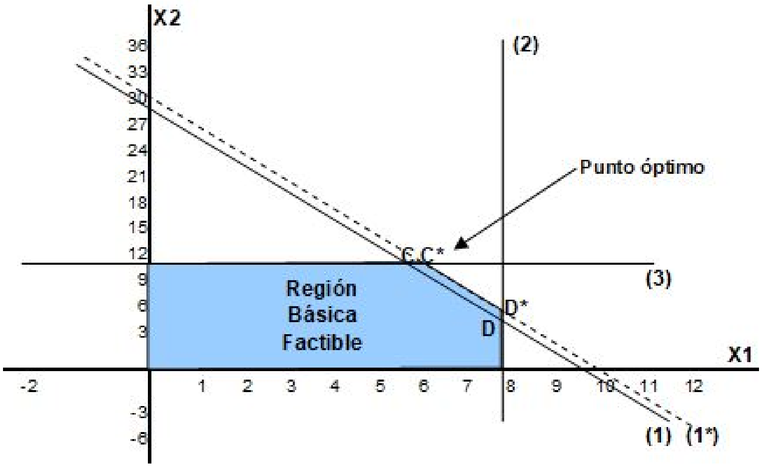

Figura 2.26 Análisis de Sensibilidad

Solución óptima:
Z(MÁX.) = 4.899.000 Dólares
x_1 = 6.33 Unidades del producto A,
x_2 = 12 Unidades del producto B,
Incremento neto = 489.9 - 480 = 9.9
Por lo tanto el precio dual de la hora de trabajo es 9.9dólares

5) Remítase a los literales (b), (c) y (d) anteriores. Determine en forma gráfica los intervalos del termino independiente, en los cuales, se mantienen los precios duales de las tres restricciones.
Se refiere a los límites de venta del producto A. De acuerdo a la figura 2.24, el precio dual de esta restricción es cero, podemos observar que el aumento en el limite del producto A, no tendrá ningún efecto; por lo tanto, no hay limite superior. La solución óptima incluye 6 mil unidades del producto A. Una reducción en el límite de ventas, por debajo de esas cifras si afectara la solución optima. Por ello, el intervalo es de 6 mil en adelante (sin limite superior) y en este intervalo se mantiene el precio dual de cero.

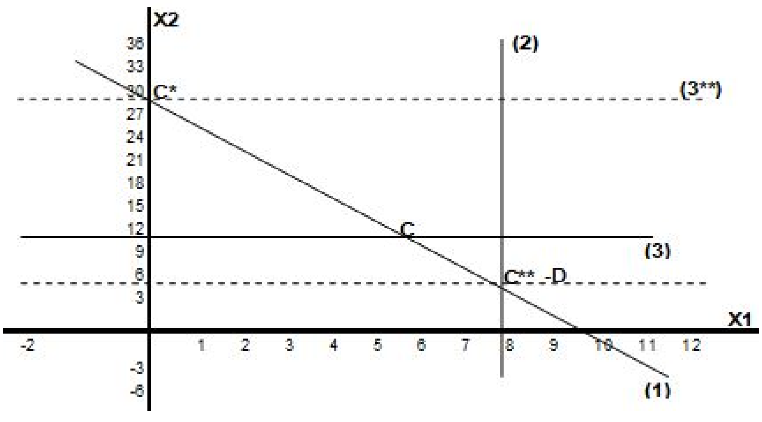

Figura 2.27 Análisis de Sensibilidad

Ahora, se determina el limite de ventas del producto B. El producir unidades adicionales de B, el óptimo se traslada hasta el punto C*(A = 0 y B = 30). Más allá de este punto, no es posible fabricar unidades adicionales de B, por las horas de trabajo. Por consiguiente, el límite superior es 30 mil unidades. Al reducir el limite de ventas de B hasta 6 mil unidades, se llega al vértice C**(A = 8 y B = 6). La solución cambia al pasar de este punto. Por lo tanto, el límite inferior es 6 mil unidades. En resumen, el precio dual de 15.1 dólares (literal c) por unidad de B se mantiene en el intervalo de 6 mil a 30 mil del límite de ventas del producto B. Límite de horas de trabajo. Cuando las horas de trabajo se aumenta hasta 36 mil, se alcanza un nuevo vértice (A = 8 y B = 12), Si se reduce a 12 mil horas, se llega al vértice (A = 0 y B = 12). Por lo tanto, el intervalo para las horas de trabajo es de 12 mil a 36 mil, en el cual se mantiene el precio dual de 9.9 dólares.

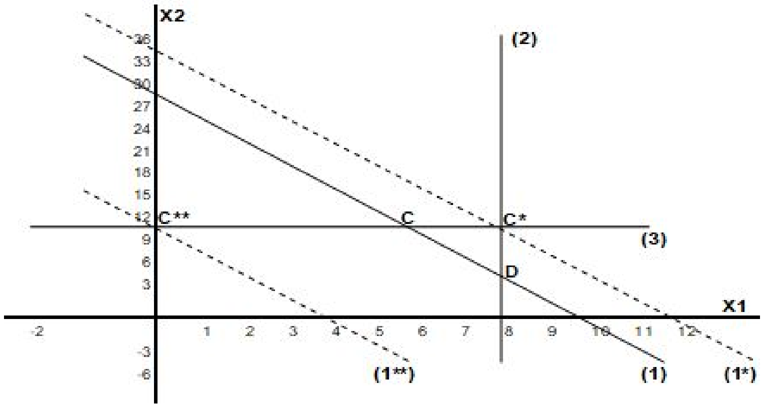

Figura 2.28 Análisis de Sensibilidad

2.12. Ejercicios Propuestos de Programación Lineal Método Gráfico

1. Grafiqué en el plano cartesiano el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones lineales:

$$1)\ \left\{\begin{array}{rcl} -x_1+2x_2 & \geq & -2 \\ 2x_1-x_2 & \geq & -2 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$2)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+4x_2 & \leq & 8 \\ -4x_1+2x_2 & \geq & 8 \\ -2x_1-4x_2 & \leq & 12 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$3)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \geq & 2 \\ x_1+2x_2 & \leq & 4 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$4)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \geq & 1 \\ x_1+x_2 & \leq & 6 \\ -x_1+x_2 & \geq & -2 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$5)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \geq & 5 \\ 2x_1+x_2 & \leq & 2 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$6)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1-x_2 & \geq & -2 \\ x_1+2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & \geq & 4 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$7)\ \left\{\begin{array}{rcl} 4x_1+3x_2 & \leq & 4 \\ -x_1+x_2 & \geq & 0 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$8)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \geq & 1 \\ -x_1+x_2 & \geq & -2 \\ 2x_1+x_2 & \leq & 8 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$9)\ \left\{\begin{array}{rcl} -2x_1+x_2 & \leq & 2 \\ x_1+x_2 & \leq & 4 \\ -x_1+2x_2 & \geq & 1 \end{array}\right.$$

$$10)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \leq & 4 \\ x_1+x2 & \geq & 1 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$1)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \leq & 2 \\ x_1+2x_2 & \geq & 6 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$2)\ \left\{\begin{array}{rcl} -x_1+x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1+x_2 & \leq & 4 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$3)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \geq & 1 \\ x_1+x_2 & \leq & 6 \\ -x_1+x_2 & \leq & 2 \\ -x_1-x_2 & \leq & 2 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$4)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \leq & 4 \\ -3x_1+2x_2 & \leq & 3 \\ -x_1+x_2 & \geq & -2 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$5)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1-2x_2 & \leq & 0 \\ 2x_1-x_2 & \geq & 0 \\ x_1+2x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$6)\ \left\{\begin{array}{lcr} -3x_1+x_2 & \leq & 3 \\ x_1+x_2 & \leq & 6 \\ -x_1+x_2 & \geq & -2 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$7)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \leq & 2 \\ x_1+x_2 & \leq & 4 \\ -x_1+2x_2 & \geq & 1 \end{array}\right.$$

$$8)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & \leq & 4 \\ x_1+2x_2 & \geq & 4 \\ x_1 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$9)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1+x_2 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$10)\ \left\{\begin{array}{rcr} -2x_1-x_2 & \leq & -7 \\ -2x_1+x_2 & \leq & 3 \\ 2x_1-5x_2 & \leq & 1 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

2. Maximizar la función objetivo $f(x_1;x_2)$:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 3x_1+2x_2 \\ x_1+3x_2 & \leq & 45 \\ 2x_1+x_2 & \leq & 40 \\ 4x_1+x_2 & \leq & 76 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 5x_1+3x_2 \\ 3x_1+5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1+2x_2 & \leq & 10 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 2x_1+3x_2 \\ 3x_1+x_2 & \geq & 6 \\ x_1+4x_2 & \geq & 4 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & x_1-2x_2 \\ x_1-x_2 & \leq & 1 \\ x_1+x_2 & \geq & 2 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$5)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & x_1+3x_2 \\ x_1-x_2 & \leq & 1 \\ 2x_1+x_2 & \leq & 2 \\ x_1-x_2 & \geq & 0 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$6)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 5x_1-4x_2 \\ x_1+x_2 & \leq & 4 \\ x_1+2x_2 & \geq & 4 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$7)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 3x_1+x_2 \\ x_1+x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1+x_2 & \geq & 4 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$8)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & x_1-x_2 \\ x_1+x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1+x_2 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$9)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 2x_1+3x_2 \\ 3x_1+3x_2 & \leq & 6 \\ x_1+x_2 & \geq & 1 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 2x_1+2x_2 \\ x_1+x_2 & \leq & 4 \\ x_1+2x_2 & \geq & 4 \\ x_1+x_2 & \geq & 1 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & x_1+x_2 \\ -x_1+x_2 & \leq & 1 \\ x_1-x_2 & \geq & 1 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 2x_1+3x_2 \\ x_1-2x_2 & \leq & 0 \\ 2x_1-x_2 & \geq & 0 \\ x_1+x_2 & \geq & 1 \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 3x_1+2x_2 \\ x_1-3x_2 & \geq & 0 \\ 3x_1-x_2 & \leq & 0 \\ x_1+x_2 & \geq & 2 \end{array}\right.$$

$$5)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 2x_1-x_2 \\ x_1+x_2 & \geq & 2 \\ x_1+x_2 & \leq & 1 \\ x_1-x_2 & \leq & 0 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$6)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 9x_1+4x_2 \\ -x_1+x_2 & \geq & 1 \\ -x_1+x_2 & \leq & 3 \\ 2\leq x_1 & \leq & 5 \\ x_1;x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$7)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 2x_1+x_2 \\ x_1+x_2 & \leq & 2 \\ x_1+x_2 & \leq & 4 \\ -x_1+2x_2 & \geq & 1 \end{array}\right.$$

$$8)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 3x_1+x_2 \\ x_1+x_2 & \leq & 4 \\ x_1+2x_2 & \geq & 4 \\ x_1 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$9)\left\{\begin{array}{rcl} f(x_1;x_2) & = & 6x_1+3x_2 \\ x_1+2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1+x_2 & \geq & 0 \\ x_2;x_1 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

3. Maximizar y minimizar la función objetivo $f(x_1;x_2)$:

$$1)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& x_1+3x_2 \\ 3x_1+3x_2 &\le& 30 \\ x_1+2x_2 &\ge& 10 \\ x_1-x_2 &\ge& 0 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 2x_1+x_2 \\ 3x_1-x_2 &\ge& 1 \\ 2x_1-2x_2 &\le& 19 \\ x_1+4x_2 &\ge& 9 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& x_1+x_2 \\ 2x_1+3x_2 &\le& 30 \\ x_1+2x_2 &\ge& 10 \\ x_1-x_2 &\ge& 0 \\ x_1 &\ge& 0 \\ x_2 &\ge& 2 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 7x_1+3x_2 \\ x_1+x_2 &\le& 4 \\ 2x_1+x_2 &\ge& 0 \\ x_1-x_2 &\le& 0 \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 5x_1-3x_2 \\ x_1+x_2 &\le& 4 \\ 2x_1+x_2 &\ge& 4 \\ x_1-x_2 &\le& 2 \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 4x_1+3x_2 \\ 2x_1+x_2 &\ge& 8 \\ 2x_1+3x_2 &\ge& 16 \\ x_1+3x_2 &\ge& 11 \\ x_1 &\le& 20 \\ x_2 &\le& 20 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 3x_1+x_2 \\ 2x_1+x_2 &\le& 20 \\ -x_1+8x_2 &\le& 24 \\ x_2;x_1 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$8)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 25x_1+35x_2 \\ x_1+3x_2 &\le& 24 \\ x_1+x_2 &\le& 10 \\ 2x_1+x_2 &\le& 16 \\ x_2;x_1 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 3x_1+4x_2 \\ 2x_1+x_2 &\le& 10 \\ 2x_1+3x_2 &\le& 18 \\ x_1-x_2 &\le& 2 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 6x_1+5x_2 \\ 2x_1+x_2 &\ge& 8 \\ x_1-x_2 &\ge& 1 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 2x_1+3x_2 \\ x_1+4x_2 &\ge& 11 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 130x_1+20x_2 \\ 1\le & x_1 & \le 6 \\ 0\le & x_2 & \le 12 \\ x_1+x_2 &\le& 16 \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 9x_1+4x_2 \\ -x_1+x_2 &\ge& 1 \\ -x_1+x_2 &\le& 3 \\ 2\le & x_1 & \le 5 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 5x_1+4x_2 \\ -x_1+x_2 &\ge& 1 \\ -x_1+x_2 &\le& 3 \\ 3\le x_1 &\le& 7 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 2x_1+4x_2 \\ x_1+x_2 &\le& 5 \\ x_1+2x_2 &\ge& 2 \\ x_1-2x_2 &\ge& 0 \\ x_2 &\le& 4 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$8)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 2x_1-x_2 \\ x_1+x_2 &\ge& 2 \\ x_1+x_2 &\le& 1 \\ x_1;x_2 &\ge& 0 \end{cases}$$

$$9)\begin{cases} f(x_1;x_2) &=& 2x_1+3x_2 \\ x_1+2x_2 &\le& 6 \\ 2x_1+x_2 &\ge& 0 \\ x_2;x_1 &\ge& 0 \end{cases}$$

4. Una fábrica produce dos productos P_1 y P_2 por medio de máquinas M_1 y M_2.El tiempo máximo de trabajo de la máquina M_1 es de 8 horas, de la máquina M_2 es de 12 horas diarias. La carga unitaria de trabajo de las maquinas M_1 y M_2 para la elaboración de productos P_1 y P_2 muestra la tabla 1.

Maquinas	Productos	
	P_1	P_2
M_1	1	4
M_2	2.5	2

Tabla 1

La ganancia de la venta por unidad del producto P_1 es de 6 dólares, y de la venta de unidad del producto P_2 es de 5 dólares. Escribir el modelo matemático de este ejercicio ¿Qué plan de producción diaria es necesario para que las ganancias sean máximas?

5. Una fábrica elabora dos productos W_1 y W_2 y utiliza para esto, de tres materias primas $S_1, S_2\ y\ S_3$. Los gastos de las materias primas necesarias para la elaboración por unidad para cada uno de los productos, las reservas de los materiales y las ganancias unitarias se indica en la tabla 2.

Materias Primas	Productos		
	W_1	W_2	reservas materiales
S_1	3	1	18
S_2	2	4	40
S_3	3	2	40
Ganancias Unitarias	2	3	–

Tabla 2

Construir el correspondiente modelo matemático que garantice las ganancias máximas.

6. Una empresa elabora productos W_1 y W_2 por medio de máquinas $U_1, U_2\ y\ U_3$, las cuales durante el día pueden trabajar correspondientemente: 24000, 40000 y 27000 segundos. La norma de tiempo expresadas en segundos para elaboración de una unidad del producto por medio de la adecuada maquina muestra la tabla 3:

Maquinas	Productos	
	W_1	W_2
U_1	3	6
U_2	8	4
U_3	9	3

Tabla 3

La ganancia de la producción por unidad del producto W_1 es de 9 dólares, del producto W_2 es de 6 dólares. ¿Qué plan de producción diaria garantizara la ganancia máxima ¿Construir el correspondiente modelo matemático?

7. La fábrica de productos químicos elabora dos preparados: P_1 y P_2. Cada uno de los preparados es el resultado de la mezcla de tres substancias. Cada tonelada P_1 contiene 12 kg de la substancia primera, 5 kg de la substancia secundaria y 30 kg de la tercera substancia. La ganancia en una tonelada de P_1 es de 100 dólares, de una tonelada de P_2 es de 85 dólares. La fabrica dispone de 480 kg de la substancia primaria, de 180 kg de la substancia secundaria y 720 kg de la tercera substancia. Para que valores de x - cifras de toneladas de P_1 e y - cifras de toneladas de P_2, la ganancia es máxima?.
8. Para producir dos productos W_1 y W_2 se usa de tres diferentes materias primas. La cantidad de unidades de cada una de las materias necesarias para la producción de una unidad de cada producto ilustra la tabla 4:

Productos	Materia prima		
	S_1	S_2	S_3
W_1	1	1	4
W_2	3	1	2

Tabla 4

Considerando que, el acceso a cada una de las materias primas corresponde a 1500, 700 y 2400 unidades y que la ganancia de elaboración de cada unidad de producto W_1 es dos veces mejor que elaboración de unidad de producto W_2, elaborar un plan de producción que maximice las ganancias.

9. Una fabrica produce dos tipos de camisas: A y B. Las camisas tipo A requiere 2.5 minutos para cortarlas y 5 minutos para confeccionarlas; las de tipo B requieren 4 minutos para cortarlas y 4 minutos para confeccionarlas. Se necesita 1 hora y 40 minutos para corte y 2 horas para confeccionar. El beneficio es de 2.5 dólares por cada camisa tipo A y 3 dólares por cada camisa tipo B. ¿Cuántas camisas de cada clase debe producirse para obtener la máxima ganancia?
10. Una empresa fabrica dos productos A y B. El beneficio para A es 25 dólares por tonelada y para B 20 dólares por tonelada. La planta consta de 3 departamentos de producción: Cortado, Mezclado y Enlatado. El equipo en cada departamento puede, emplearse 4 horas diarias. El proceso de producción es el siguiente El producto A emplea 1/4 hora de la capacidad de cortado y enlatado, y 0.5 hora de mezclado por tonelada, El producto B requiere 0.5 hora por tonelada de la capacidad de mezclado y 1/3 de hora de la capacidad de enlatado. ¿Qué combinación de producto deberá elaborar la empresa para maximizar su beneficio?
11. Una compañía produce dos tipos de pantalones: A y B. Cada pantalón tipo A requiere del doble de mano de obra que el de tipo B. Se deben producir por lo menos 2.500 pantalones combinados. El mercado limita la venta diaria de pantalones tipo A, a un máximo de 75 y los de clase B a un total de 125 pantalones. Los beneficiados por pantalón son 6 dólares para el tipo A y 4 dólares para el tipo B. Determinar el número de pantalones de cada clase que maximice la ganancia.
12. Dos productos tienen el siguiente proceso. Hay un taller que, lo más que puede hacer es 200 productos del tipo A o 100 del tipo B por día. El taller

de pintura tiene una capacidad diaria de 120 productos del tipo A o 160 del tipo B. También el tratamiento técnico puede procesar un total de 90 artículos del tipo A por día. El producto A tiene una utilidad de 4 dólares y el producto B de 6 dólares. Determinar la producción optima que maximice los beneficios.

13. Se producen dos artículos A y B los mismos que son procesados por tres maquinas $M_1, M_2\ y\ M_3$. La máquina M_1 procesa 0.5 unidad de A y 0.5 de B, M_2 procesa 1 de A, 0.5 de B, M_3 procesa 0.5 de A y 2 de B. Se dispone al menos de 65 horas semanales para M_1, 95 para M_2 y 100 para M_3. El costo de A es de 3 dólares y 5 dólares el de B. ¿Cuantas unidades de A y B se deben producir para que el costo sea mínimo?.

14. Un fabricante de gasolina para aviación vende dos clases de combustible A y B. El combustible A tiene 12.5 por ciento de grade 1 y 2 y 25 por ciento de gasolina grado 3. El combustible B tiene 25 por ciento de gasolina grado 2 y 3. Disponible para producción hay 25 galones/hora grado 1 y 100 galones/hora grado 2 y 3. Los costos son 15 centavos por galón grado 1, el galón grado 2 cuesta 30 centavos y 45 centavos por galón grado 3. El combustible A puede venderse a 0.71 dólares por galón, mientras que, el combustible B alcanza a 58.75 centavos por galón, ¿Que cantidad debe fabricarse de cada combustible para obtener el mayor beneficio?

15. Un estacionamiento puede atender cuando más a 100 vehículos entre automóviles y camiones. Un automóvil ocupa 10 metros cuadrados, mientras que un camión necesita un área de 20 metros cuadrados, y se sabe que, el área total del estacionamiento es de 1.200 metros cuadrados. La tarifa que se cobra mensualmente es de 20 dólares por auto y 35 por camión. ¿Cuantos vehículos de cada tipo le proporcionara el estacionamiento una ganancia máxima?

16. Un laboratorio farmacéutico desea preparar un tónico de tal manera que cada frasco contenga al menos 32 unidades de vitamina A, 10 de vitamina B y 40 de vitamina C. Para suministrar estas vitaminas, el laboratorio emplea el aditivo X_1 a un costo de 2 dólares por onza, el cual contiene 15 unidades de vitamina A, 2 de B y 4 de C, un aditivo X_2 a un costo de 4 dólares por cada onza, que contiene 4 unidades de vitamina A, 2 de B y 14 de C. ¿Cuántas onzas de cada aditivo se deben incluir en el frasco para minimizar el costo?

17. Un vivero desea añadir árboles frutales y arbustos orientales a sus cultivos existentes. Los árboles proporcionan 14 dólares por unidad. Cada árbol requiere de 2 metros cuadrados. Para exhibición, mientras que cada arbusto necesita de 3 metros cuadrados. Además, el tiempo necesario para preparar un árbol para exhibición es de dos minutos, mientras que el tiempo, que se requiere para cada arbusto es de un minuto. Las restricciones de espacio y tiempo son las siguientes:

    1) Hay a lo más 12 metros cuadrados para exhibición disponibles.
    2) Se dispone a lo más de 8 minutos de tiempo de preparación.

    Si el vivero puede vender todos Los árboles y arbustos en exhibición. ¿Cuántos árboles y cuantos arbustos deberán exhibir diariamente para maximizar su ganancia?. (Suponga que es posible preparar una exhibición solamente una vez al día).

18. Las máquinas A y B pueden fabricar el mismo articulo, la maquina A produce 18 unidades por hora, mientras que la maquina B produce 10 unidades por hora. Se deben producir a lo mucho 600 unidades del articulo trabajando 40 horas semanales por lo menos; sin embargo la maquina B tiene una capacidad máxima de 35 horas semanales. Si el costo de operar la maquina A es de 25 dólares y 20 dólares la maquina B. Determinar cuantas horas por semana debe operar cada máquina para satisfacer las necesidades de producción a un costo mínimo?
19. Una fábrica elabora dos clases de cerveza: Pilsener y Club. Para lo cual, dispone de ingredientes para llenar por lo menos 30 botellas combinadas. Toma 1 hora llenar 20 botellas de la cerveza Pilsener y 2 horas llenar 25 botellas de cerveza Club, se dispone a lo mucho de 2 horas. La demanda de la cerveza Pilsener se estima en el mercado un total de 22 botellas y a lo mucho 10 botellas de la cerveza Club. Cada botella de Pilsener deja una utilidad de 10 centavos y 15 centavos cada botella de la cerveza Club. ¿Cuántas botellas de cada cerveza se deben llenar para alcanzar la máxima ganancia?
20. Una fabrica elabora dos clases de champú A y B. Para lo cual, dispone de ingredientes para llenar a lo mucho 80 botellas combinadas de A y B. Toma 1 hora llenar 10 botellas de A y 4 horas llenar 10 botellas de B, se dispone cuando mucho de 20 horas, la demanda de A se estima a lo mas en 70 botellas. La fabrica esta en capacidad de llenar cuando mucho 90 botellas de A o 60 botellas de B. Cada botella de A le deja una utilidad de 80 centavos y 90 centavos la de B. ¿Cuántas botellas de A y B se deben llenar para que la fábrica obtenga Los mayores beneficios?
21. Se fabrica dos productos A y B. Cada unidad de A toma 2 dólares la mano de obra y 6 dólares cada unidad de B. De materia prima,cuesta 4 dólares cada unidad de A y 2 dólares cada unidad de B. El desgaste de equipo se supone proporcional a la producción y es de 2 dólares por cada unidad de A y 2 dólares por cada unidad de B. Se dispone al menos de 36 dólares para salarios, al menos 48 dólares para materia prima y cuando mucho 32 dolares, para desgaste de equipo. Se estima que la demanda de A en el mercado es al menos 20 unidades. El beneficio de A es de 20 dólares cada unidad y 10 dólares cada unidad de B. ¿Cuál es la cantidad que se debe producir de cada producto para obtener las utilidades mas altas posibles?
22. Una compañía produce dos tipos de sombreros vaqueros. Cada sombrero del primer tipo requiere el doble de tiempo en mano de obra que el segundo tipo. Si todos los sombreros son solamente del segundo tipo, la compañía puede producir un total de 1.000 sombreros al día. El mercado limita las ventas diarias del primero y segundo tipo a 300 y 500 sombreros. Suponga que los beneficios por sombrero son 16 dólares para el tipo A y 12 dólares para el tipo B. Determine el número de sombreros que deben producirse de cada tipo a fin de maximizar el beneficio.

2.13. Método Simplex en Programación Lineal

El método Simplex se basa en el álgebra, y se lo emplea para resolver problemas de programación Lineal tanto de maximización como de minimización.
Es un proceso repetitivo numérico, que permite llegar a una solución óptima partiendo de un punto extremo conocido; es decir, partiendo de una solución básica, si esta solución básica es factible, tomada como punto de partida no satisface, es necesario tomar otra solución, que nos da un valor para Z mayor o menor y así sucesivamente hasta llegar a la solución final.
Es un método iterativo (aproximaciones sucesivas), fue ideado por George Dantrig (1947), quien realizó investigaciones basadas en relaciones matemáticas de carácter lineal.
Existen tres requisitos en la solución de un problema de programación lineal por el método simplex:

1. Todas las limitaciones deben estar establecidas como ecuaciones,
2. El segundo miembro de una limitante, no puede ser negativo,
3. Todas las variables están restringidas a valores no negativos

Después de finalizar este capitulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Explicar detalladamente, por que el método simplex encuentra soluciones óptimas, para problemas de programación lineal,
2. Determinar, cuando un problema de programación lineal tiene múltiples soluciones óptimas,
3. Determinar, cuando un problema de programación lineal no tiene solución.

Cualquiera que, sea el numero de inecuaciones y de incógnitas de un sistema,que representa un proceso, este por si mismo, se ajusta a un tratamiento de identificación, que nos da una idea; de que, es sujeto de solución.
Cuando el proceso a analizar es representado por un sistema que, reúne a un número de ecuaciones inferior al número de incógnitas; es decir, existen muchas soluciones. Justamente, este es el caso mas frecuente de los problemas de programación lineal. De allí que, es necesario introducir nuevas variables, que son:

1. Se aumenta (+) variables de holgura, que se introduce en el sistema, cuando, se tiene la expresión $\leq$, (+ variable de holgura),
2. Se resta (-) variables de holgura y se aumenta variables artificiales, en los casos de $\geq$, (- variables de holgura + variables artificiales),
3. En los casos de igualdad (=) se introduce variables artificiales con signo mas (+ variables artificiales).

Cada caso se comprenderá con un ejemplo y así podremos establecer su similitud y diferencias.

2.13.1. Características del Método Simplex

En cualquiera de los casos del método simplex se requiere que conste de:

1. **Planteamiento del problema:** que consiste en identificar a las variables:
   Producto Uno = x_1
   Producto Dos = x_2
   Producto Tres = x_3
   Producto Cuatro = x_4.
   Se crea tantas variables lo requiera el ejercicio.

2. **Función Objetivo:** que tiene la forma:

   $Z(max.) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + \cdots + C_nx_n$

3. **Limitaciones o Restricciones:** se forma el sistema de inecuaciones, que representan al proceso:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & A_{23}x_3 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & A_{33}x_3 & + & \cdots & + & A_{3n}x_n & \leq & b_3 \\ A_{41}x_1 & + & A_{42}x_2 & + & A_{43}x_3 & + & \cdots & + & A_{4n}x_n & \leq & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & A_{m3}x_3 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & \leq & b_n \end{cases}$$

4. **No-negatividad** de todas las variables que identifican el proceso: $x_i \geq 0$,

5. **Resolución:**
   Cuando se trata de un sistema de inecuaciones, no existe una solución única; si no que, implica muchas posibilidades que dan solución al sistema, razón por la cual, el método simplex va generando soluciones básicas.

6. **Introducción de Variables de Holgura:**
   Como, los miembros, lado izquierdo de la inecuación, es inferior al lado derecho, en este caso se tiene un problema de Maximación ($\leq$), es necesario introducir una variable denominada de HOLGURA que, cubra imaginariamente el valor faltante, para convertirlo en igualdad:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & + & \cdots & A_{1n}x_n & + & S_1 = & b_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & A_{23}x_3 & + & \cdots & A_{2n}x_n & + & S_2 = & b_2 \\ A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & A_{33}x_3 & + & \cdots & A_{3n}x_n & + & S_3 = & b_3 \\ A_{41}x_1 & + & A_{42}x_2 & + & A_{43}x_3 & + & \cdots & A_{4n}x_n & + & S_4 = & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & A_{m3}x_3 & + & \cdots & A_{mn}x_n & + & S_n = & b_n \end{cases}$$

   Al convertir el sistema de desigualdades en un sistema de ecuaciones mediante la introducción de variables de holgura, se ha logrado un importante punto de partida. Estas variables, en la función objetivo irían ante-puestas de un coeficiente cero de beneficio:

   $Z(max.) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + \cdots + C_nx_n + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + \cdots + 0S_n$

7. **Generación de una solución básica** factible:
   En el caso de una forma de producción, el primer supuesto o alternativa del método simplex, es no fabricar nada de los productos reales (variables fundamentales); esto quiere decir, dar respuesta al sistema manteniendo inutilizados los recursos existentes; por lo tanto:

$$\begin{cases} x_1 = 0 & \longrightarrow & S_1 = b_1 \\ x_2 = 0 & \longrightarrow & S_2 = b_2 \\ x_3 = 0 & \longrightarrow & S_3 = b_3 \\ x_4 = 0 & \longrightarrow & S_4 = b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n = 0 & \longrightarrow & S_n = b_n \end{cases}$$

8. **Proceso Iteractivo:**
   En función de los criterios del método simplex, se van obteniendo ensayos, interacciones o algoritmos hasta lograr la respuesta ideal.
   El objetivo es, ir eliminando las variables de holgura e ir las reemplazando por alterativas, en función de variables fundamentales, propósito del problema.
   El proceso se lo desarrolla por cuadros o etapas. Cada uno de ellas nos representará una mejor combinación de producción y un mayor beneficio, para lo cual se necesita aplicar el método matricial de coeficientes. Donde se tiene:

   a) C_j = Coeficientes de la función objetivo,

   b) X_j = Solución básica de cada Etapa; es la base vectorial, que da solución al sistema,

   c) * = Elemento Pivote,

   d) $^\circ$ = Elementos semipivotes,

   e) b_n = Parámetros; datos conocidos, que nos indican la cuantificación de los recursos disponibles,

   f) Z_j = Valores que va tomando la función objetivo en cada posición,

   g) $Z_j - C_j$ = Se la conoce como el Çriterio del simplex”; permite continuar o no la generación de alterativos

   Cuando la expresión $Z_j - C_j$ corresponde en todas las posiciones a valores POSITIVOS O CEROS, se habrá terminado el problema de maximización.

9. **Pasos para formar la nueva tabla:**

   a) Se elige el elemento $(Z_j - C_j)$ de menor valor negativo, la variable que le corresponde debe entrar a la base de la nueva tabla para mejorar la solución,

   b) Para determinar que fila sale, se obtiene el elemento pivote, el mismo que, es la intersección de la columna, que ingresa y la fila que sale, para lo cual, se divide los elementos de la columna de b_n, para los elementos de la columna que ingreso, se escoge el menor cociente, que representara al pivote, los restantes elementos de la columna son los semipivotes. No se toma en cuenta la división para números negativos o cero,

c) Formar los nuevos elementos de la fila de la variable de holgura, que es reemplazada por la variable fundamental, basándose en el elemento PIVOTE, que se encuentra en la intersección de la columna que entra y la fila que sale

Elementos de la nueva Fila = $\dfrac{Elementos\ Anteriores}{Pivote}$

d) Los restantes elementos de la columna, que entra, se denominan: SEMI-PIVOTES (°)

e) Los elementos de las demás filas, se obtienen restando los elementos anteriores de dicha fila menos los elementos de la nueva fila, que ingreso, multiplicados por el semipivote correspondiente:
Elementos de otra fila = Elementos anteriores de dicha fila - (elementos de la fila que ingreso) · (el semipivote correspondiente),

f) Z_j se obtiene multiplicando el coeficiente de la variable fundamental, que ingreso por todos los elementos de dicha fila.

g) Se obtiene la fila $Z_j - C_j$, restando los elementos de la fila de Z_j menos los elementos de la fila C_j, si todos sus elementos son positivos o ceros el proceso se ha terminado, esto quiere decir que la tabla es optima, caso contrario construimos la nueva tabla eliminando el menor negativa, que exista y se realiza el mismo proceso escrito en los pasos de a al paso e,

h) El máximo beneficio esta dado por el valor del elemento de Z_j de la columna b_n.

2.13.2. Ejercicios de Maximización Método Simplex

1. Un taller fabrica dos clases de cinturones de piel. En cada cinturón A de alta calidad gana 40 dólares y en cada cinturón B de baja calidad gana 30 dólares. El taller puede producir diariamente 500 cinturones de tipo B o 250 cinturones de tipo A. Solo se dispone de piel para 400 cinturones diarios A y B combinados y de 200 hebillas elegantes para el cinturón A y de 350 hebillas diarias para el cinturón B. ¿Qué producción maximiza la ganancia?
   Función Objetivo:

   $Z(MAX.) = 40X_1 + 30X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$

   Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 400 & Cantidad\ de\ piel \\ x_1 \leq 200 & Hebillas\ elegantes \\ x_2 \leq 350 & Capacidad \\ 2x_1 + x_2 \leq 500 & \\ x_1; x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

   Variables de holgura:

   $Z(MAX.) = 40X_1 + 30X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 = 400 \\ x_1 + S_2 = 200 \\ x_2 + S_3 = 350 \\ 2x_1 + x_2 + S_4 = 500 \end{cases}$$

TABLA I:

Formamos la primera Tabla, con los coeficientes de las variables fundamentales y su holgura. En la columna de x_j, irán las variables de holgura, por ser recursos no utilizados; por lo tanto, deben ingresar al proceso y no tienen utilidad.

	C_j			40	30	0	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	400	1°	1	1	0	0	0	
⟵	0	S_2	200	1*	0	0	1	0	0	
	0	S_3	350	0°	1	0	0	1	0	
	0	S_4	500	2°	1	0	0	0	1	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-40	-30	0	0	0	0	

Al iniciarse el proceso productivo, no existe utilidad; por lo tanto, todos los coeficientes de la fila Z_j son ceros.
Los elementos de la fila $Z_j - C_j$, que se denomina criterio del simplex, se forma restando los coeficientes de la fila Z_j menos la fila C_j.

TABLA II:

Como se trata de problemas de maximización, en la fila $Z_j - C_j$ deben quedar ceros o valores positivos. Esto significa que, es necesario eliminar los valores negativos, para lo cual, tomamos el menor valor negativo, en este case (-40); es decir, la variable que pertenece a esta columna ingresa (x_1) con una utilidad de 40.
Para saber, cual es la fila que sale, dividimos los coeficientes de la columna de (b_n) para los coeficientes de x_1. El menor cociente, indica la fila que, debe salir y nos señalará el PIVOTE.

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} 400 \div 1 & = & 400 & 1^\circ & Semipivote \\ 200 \div 1 & = & 200 & 1^* & pivote \\ 350 \div 0 & = & No & 0^\circ & semipivote \\ 500 \div 2 & = & 250 & 2^\circ & semipivote \end{cases}$$

Los divisores que, son cero o negativos, no se toman en cuenta para el menor cociente, pero si, se los considera como semipivote.
El menor cociente, se obtiene, al dividir 200 ÷ 1 = 200; entonces, en la intersección de la fila S_2 y la columna x_1 se encuentra el pivote, los demás elementos son semipivotes, lo cual, significa que, la fila que sale es S_2 y en su lugar ingresa x_1 con una utilidad de 40. Al pivote, se lo representa por un asterisco (*) y los semipivotes con un punto (°).
Para obtener, los coeficientes de la nueva fila, se divide los coeficientes anteriores de S_2 para el pivote; es decir:

$$\begin{cases} 200 \div 1 &= 200 \longrightarrow 1^* \quad pivote = 1 \\ 1 \div 1 &= 1 \\ 0 \div 1 &= 0 \\ 0 \div 1 &= 0 \\ 1 \div 1 &= 1 \\ 0 \div 1 &= 0 \\ 0 \div 1 &= 0 \end{cases}$$

Los valores de las demás filas, se las obtiene de la siguiente forma:

Coeficientes de la fila anterior - [(Coeficientes Nueva fila) × (Semipivote correspondiente)]

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 400 - 200 \cdot 1 = 200 \\ 1 - 1 \cdot 1 = 0 \\ 1 - 0 \cdot 1 = 1 \\ 1 - 0 \cdot 1 = 1 \\ 0 - 1 \cdot 1 = -1 \\ 0 - 0 \cdot 1 = 0 \\ 0 - 0 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3 :

$$\begin{cases} 350 - 200 \cdot 0 = 350 \\ 0 - 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 - 0 \cdot 0 = 1 \\ 0 - 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 - 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 - 0 \cdot 0 = 1 \\ 0 - 0 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_4 :

$$\begin{cases} 500 - 200 \cdot 2 = 100 \\ 2 - 1 \cdot 2 = 0 \\ 1 - 0 \cdot 2 = 1 \\ 0 - 0 \cdot 2 = 0 \\ 0 - 1 \cdot 2 = -2 \\ 0 - 0 \cdot 2 = 0 \\ 1 - 0 \cdot 2 = 1 \end{cases}$$

Con los coeficientes calculados anteriormente, se vuelve a formar una nueva tabla, y el procedimiento se repite.

	C_j			40	30	0	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	200	0	1°	1	-1	0	0	
$\longrightarrow$	40	x_1	200	1	0°	0	1	0	0	
	0	S_3	350	0	1°	0	0	1	0	
$\longleftarrow$	0	S_4	100	0	1*	0	-2	0	1	
		Z_j	8.000	40	0	0	40	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	-30	0	40	0	0	

La dirección de las flechas en las tablas, nos ayuda a definir donde ingresa una fila con los nuevos datos, y cual fila sale, según los cálculos realizados. Los coeficientes de la fila Z_j, se obtienen multiplicando 40 por cada coeficiente de esa fila:

Se indica los cinco primeros elementos de como se calcula Z_j

$$Z_j = \begin{cases} 200 & \times & 40 & = & 8.000 \\ 1 & \times & 40 & = & 40 \\ 0 & \times & 40 & = & 0 \\ 0 & \times & 40 & = & 0 \\ 1 & \times & 40 & = & 40 \end{cases}$$

TABLA III:

Al tener un valor negativo (-30) en la fila $(Z_j - C_j)$ se debe eliminarlo, eso significa que, la variable de esa columna es la que ingresa (x_2); para saber, que fila sale se procede como en el caso anterior.

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} 200 \div 1 & = & 200 & \longrightarrow & 1^\circ & Semipivote \\ 200 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 350 \div 1 & = & 350 & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ 100 \div 1 & = & 100 & \longrightarrow & 1^* & pivote \end{cases}$$

El pivote nos indica, que la fila sale, en este caso, es (S_4) e ingresa la fila de x_2 con una utilidad de 30.

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 100 & \div & 1 & = & 100 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -2 & \div & 1 & = & -2 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 200 & - & 100 \times 1 & = & 100 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 1 & = & 1 \\ -1 & - & (-2 \times 1) & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 200 & - & 100 \times 0 & = & 200 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (-2 \times 0) & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3 :

$$\begin{cases} 350 & - & 100 \times 1 & = & 250 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (-2 \times 1) & = & 2 \\ 1 & - & 0 \times 1 & = & 1 \\ 0 & - & 1 \times 1 & = & -1 \end{cases}$$

Se indica los cinco primeros elementos de como se calcula Z_j

$$Z_j = \begin{cases} 40 \times 200 & + & 30 \times 100 & = & 11.000 \\ 40 \times 1 & + & 30 \times 0 & = & 40 \\ 40 \times 0 & + & 30 \times 1 & = & 30 \\ 40 \times 0 & + & 30 \times 0 & = & 0 \\ 40 \times 1 & + & 30 \times (-2) & = & -20 \end{cases}$$

	C_j			40	30	0	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	100	0	0	1	1^*	0	-1	
$\longrightarrow$	40	x_1	200	1	0	0	1	0	0	
	0	S_3	250	0	0	0	2°	0	-1	
$\longrightarrow$	30	x_2	100	0	1^*	0	-2°	0	1	
		Z_j	11.000	40	30	0	-20	0	30	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	-20	0	30	

TABLA IV:

Como, queda otro valor negativo (-20), se requiere hacer otra vez el mismo proceso, la variable, que ingresa es S2:

$$\frac{b_n}{S_2} = \begin{cases} 100 \div 1 &= 100 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\ 200 \div 1 &= 200 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 250 \div 2 &= 125 & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ 100 \div -2 &= No & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de S_2:

$$\begin{cases} 100 & \div & 1 & = & 100 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 200 & - & 100\times 1 & = & 100 \\ 1 & - & 0\times 1 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 1 & = & -1 \\ 1 & - & (1\times 1) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & -1\times 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3 :

$$\begin{cases} 250 & - & 100\times 2 & = & 50 \\ 0 & - & 0\times 2 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 2 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 2 & = & -2 \\ 2 & - & (1\times 2) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 2 & = & 0 \\ -1 & - & -1\times 2 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 100 & - & 100\times(-2) & = & 300 \\ 0 & - & 0\times(-2) & = & 0 \\ 1 & - & 0\times(-2) & = & 1 \\ 0 & - & 1\times(-2) & = & 2 \\ -2 & - & (1\times(-2)) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times(-2) & = & 0 \\ 1 & - & -1\times(-2) & = & -1 \end{cases}$$

	C_j			40	30	0	0	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
$\longrightarrow$	0	S_2	100	0	0	1	1	0	-1	
	40	x_1	100	1	0	-1	0	0	1	
	0	S_3	50	0	0	-2	0	0	1	
	30	x_2	300	0	1	2	0	0	-1	
		Z_j	13.000	40	30	0	-20	0	30	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	20	0	0	10	

la fila (Z_j−C_j), ya no tiene valores negativos; por lo tanto, el proceso ha concluido. Se presenta la solución del ejercicio en una sola tabla (siguiente pagina).

Para definir la solución del ejercicio, se toma los valores de la columna x_j y los de b_n.

Solución optima:

Z(MÁX) = 13.000 dolares,

$x_1 = 100$ Cinturones de clase A,

$x_2 = 300$ Cinturones de clase B,

$S_1 = 0$ Se utiliza toda la piel,

$S_2 = 100$ Hebillas elegantes no utilizadas,

	C_j			40	30	0	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	400	1°	1	1	0	0	0	
$\longleftarrow$	0	S_2	200	1*	0	0	1	0	0	
	0	S_3	350	0°	1	0	0	1	0	
	0	S_4	500	2°	1	0	0	0	1	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-40	-30	0	0	0	0	
	C_j			40	30	0	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	200	0	1°	1	-1	0	0	
$\longrightarrow$	40	x_1	200	1	0°	0	1	0	0	
	0	S_3	350	0	1°	0	0	1	0	
$\longleftarrow$	0	S_4	100	0	1*	0	-2	0	1	
		Z_j	8.000	40	0	0	40	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	-30	0	40	0	0	
	C_j			40	30	0	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	100	0	0	1	1*	0	-1	
$\longrightarrow$	40	x_1	200	1	0	0	1	0	0	
	0	S_3	250	0	0	0	2°	0	-1	
$\longrightarrow$	30	x_2	100	0	1*	0	−2°	0	1	
		Z_j	11.000	40	30	0	-20	0	30	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	-20	0	30	
	C_j			40	30	0	0	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
$\longrightarrow$	0	S_2	100	0	0	1	1	0	-1	
	40	x_1	100	1	0	-1	0	0	1	
	0	S_3	50	0	0	-2	0	0	1	
	30	x_2	300	0	1	2	0	0	-1	
		Z_j	13.000	40	30	0	-20	0	30	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	20	0	0	10	

$S_3 = 50$ Hebillas de menor calidad no utilizadas,

$S_4 = 0$ Se utiliza toda la capacidad de producción.

Comprobación:

$x_1 + x_2 + S_1 = 400 \longrightarrow 100 + 300 + 0 = 400$

$x_1 + S_2 = 200 \longrightarrow 100 + 100 = 200$

$x_2 + S_3 = 350 \longrightarrow 300 + 50 = 350$

$2x_1 + x_2 + S_4 = 500 \longrightarrow 2(100) + 300 + 0 = 500$

2. La Compañía ECASA está produciendo dos clases de refrigeradoras, tipo A y tipo B. De estudios hechos sobre las necesidades del país, se estima que en el próximo año los requerimientos de estos dos tipos de refrigeradoras serán:

   a) Un máximo de 80 Mil unidades de A,

b) Un máximo de 120 Mil unidades de B.

La utilidad que, cada refrigeradora deja a la empresa es: 150 dólares por unidad de A y 300 dólares por unidad de B. Cuantas unidades de A y Cuantas de B deben producirse para que ECASA alcance la máxima utilidad anual, si sólo se dispone de:

a) 10 Mil unidades de hierro,

b) 16 Mil unidades de fibra de vidrio,

c) 14 Mil unidades de aluminio.

Considerando que, la composición de estas refrigeradoras debe ser la siguiente:

a) Para refrigeradora tipo A: 10 por ciento de hierro, 12 por ciento de fibra de vidrio y 7 por ciento de aluminio.

b) Para refrigeradora tipo B: 5 por ciento de hierro, 10 por ciento de fibra de vidrio, 10 por ciento de aluminio.

Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & = & Productos \\ x_1 & x_2 & = & Numero \quad producido \\ 150 & 300 & = & Utilidad \end{cases}$$

$$\begin{cases} Recursos & Consumo & & Disponibilidad \\ Hierro & 0.10 & 0.05 & 10000 \\ Fibra\ de\ vidrio & 0.12 & 0.10 & 16000 \\ Aluminio & 0.07 & 0.10 & 14.500 \\ Demanda\ A & 1 & 0 & 80.000 \\ Demanda\ B & 0 & 1 & 120.000 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MAX) = 150X_1 + 300X_2$

Restricciones

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.05x_2 & \leq & 10.000 & Consumo \quad de \quad hierro \\ 0.12x_1 + 0.10x_2 & \leq & 16.000 & Consumo \quad de \quad Fibra \quad de \quad vidrio \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 & \leq & 14.000 & Consumo \quad de \quad aluminio \\ x_2 & \leq & 120.000 & Demanda \quad B \\ x_1 & \leq & 80.000 & Demanda \quad A \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Variables de holgura:

$Z(MAX) = 150x_1 + 300x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5$

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.05x_2 & + \ 0S_1 & & & & & = & 10.000 \\ 0.12x_1 + 0.10x_2 & & + \ 0S_2 & & & & = & 16.000 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 & & & + \ 0S_3 & & & = & 14.000 \\ x_2 & & & & + \ 0S_4 & & = & 120.000 \\ x_1 & & & & & + \ 0S_5 & = & 80.000 \end{cases}$$

TABLA I:

La tabla I, se forma en base a los datos originales, que se define en las restricciones:

	C_j			150	300	0	0	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	10.000	0.1	0.05	1	0	0	0	0	
	0	S_2	16.000	0.12	0.1	0	1	0	0	0	
	0	S_3	14.000	0.07	0.1	0	0	1	0	0	
$\longleftarrow$	0	S_4	120.000	0	1^*	0	0	0	1	0	
	0	S_5	80.000	1	0	0	0	0	1	0	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-150	-300	0	0	0	0		

TABLA II:

La formación de la tabla I, tiene el objetivo principal de indicar el camino, que se va a seguir en la solución del problema. Por lo tanto, se aconseja al estudiante que, siempre la haga, esto facilita el resolver el ejercicio con el método de simplex.
La tabla I nos indica que, en la fila $(Z_j - C_j)$ se tiene valores negativos, se escoje el menor de ellos, en este caso sera (-300); por lo tanto, la columna que ingresa es x_2, para saber cual fila sale, se divide los coeficientes de b_n para los coeficientes de x_2.

$$\frac{b_n}{x_2} = \left\{ \begin{array}{rcccll} 10 \div 0.05 & = & 200 & \longrightarrow & 0.05^* & semipivote \\ 16 \div 0.1 & = & 160 & \longrightarrow & 0.1^\circ & semipivote \\ 14 \div 0.1 & = & 140 & \longrightarrow & 0.1^\circ & semipivote \\ 80 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ 120 \div 1 & = & 120 & \longrightarrow & 1^* & pivote \end{array} \right.$$

Para obtener los nuevos coeficientes de x_2. Se divide los coeficientes anteriores de S_4 para el pivote , que es 1:

Coeficientes de x_2:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} 120 & \div & 1 & = & 120 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Coeficientes de S_1 :

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 10 & - & 120 \times 0.05 & = & 4 \\ 0.1 & - & 0 \times 0.05 & = & 0.1 \\ 0.05 & - & 1 \times 0.05 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 0.05 & = & 1 \\ 0 & - & (0 \times 0.05) & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0.05 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 0.05 & = & -0.05 \\ 0 & - & 0 \times 0.05 & = & 0 \end{array} \right.$$

Coeficientes de S_3 :

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 14 & - & 120 \times 0.1 & = & 2 \\ 0.07 & - & 0 \times 0.1 & = & 0.07 \\ 0.1 & - & 1 \times 0.1 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0.1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Coeficientes de S_5 :

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 80 & - & 120 \times (0) & = & 80 \\ 1 & - & 0 \times (0) & = & 1 \\ 0 & - & 1 \times (0) & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times (0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Coeficientes de S_3 :

$$\begin{cases} 0 & - & (0\times 0.1) & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0.1 & = & 1 \\ 0 & - & 1\times 0.1 & = & -0.1 \\ 0 & - & 0\times 0.1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_5 :

$$\begin{cases} 0 & - & (0\times(0) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times(0) & = & 0 \\ 1 & - & 1\times(0) & = & 1 \\ 0 & - & 0\times(0) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 16 & - & 120\times(0.1) & = & 4 \\ 0.12 & - & 0\times(0.1) & = & 0.12 \\ 0.1 & - & 1\times(0.1) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times(0.1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 1 & - & (0\times(0.1) & = & 1 \\ 0 & - & 0\times(0.1) & = & 0 \\ 0 & - & 1\times(0.1) & = & -0.1 \\ 0 & - & 0\times(0.1) & = & 0 \end{cases}$$

	C_j			150	300	0	0	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	4	0.1	0	1	0	0	-0.05	0	
	0	S_2	4	0.12	0	0	1	0	-0.1	0	
$\longleftarrow$	0	S_3	2	0.07	0	0	0	1	-0.1	0	
$\longrightarrow$	300	x_2	120	0	1	0	0	0	1	0	
	0	S_5	80	1	0	0	0	0	1	0	
		Z_j	36.000	0	300	0	0	0	300	0	
		$Z_j - C_j$	—	-150	0	0	0	0	0	0	

TABLA III:

El siguiente elemento a eliminar de la tabla es el número negativo (-150); es decir, ingresa la columna de x_1 con una utilidad de 150, se debe obtener la fila sale:

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} 4\div 0.1 & = & 40 & \longrightarrow & 0.1^\circ & \textit{semipivote} \\ 4\div 0.12 & = & 33.33 & \longrightarrow & 0.12^\circ & \textit{semipivote} \\ 2\div 0.07 & = & 28.57 & \longrightarrow & 0.07^* & \textit{pivote} \\ 120\div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & \textit{semipivote} \\ 80\div 1 & = & 80 & \longrightarrow & 1^* & \textit{semipivote} \end{cases}$$

Por lo tanto, ingresa la columna de x_1 y sale la fila S_3 y el numero 0.07 sera el pivote:

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 2 & \div & 0.07 & = & 28.57 \\ 0.07 & \div & 0.07 & = & 1 \\ 0 & \div & 0.07 & = & 0 \\ 0 & \div & 0.07 & = & 0 \\ 0 & \div & 0.07 & = & 0 \\ 1 & \div & 0.07 & = & 14.28 \\ -0.1 & \div & 0.07 & = & -1.43 \\ 0 & \div & 0.07 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 4 & - & 23.33\times 0.1 & = & 1.14 \\ 0.1 & - & 1\times 0.1 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0.1 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0.1 & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 0.1) & = & 0 \\ 0 & - & 14.28\times 0.1 & = & -1.43 \\ -0.05 & - & -143\times 0.1 & = & 0.09 \\ 0 & - & 0\times 0.1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 4 & - & 28.57\times 0.12 & = & 0.57 \\ 0.12 & - & 1\times 0.12 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0.12 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0.12 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0.12) & = & 1 \\ 0 & - & 14.28\times 0.12 & = & -1.71 \\ -0.1 & - & -1.43\times 0.12 & = & 0.07 \\ 0 & - & 0\times 0.12 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_5 :

$$\begin{cases} 80 & - & 28.57\times(1) & = & 51.43 \\ 1 & - & 1\times(1) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times(1) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times(1) & = & 0 \\ 0 & - & (0\times(1) & = & 0 \\ 0 & - & 14.28\times(1) & = & -14.28 \\ 1 & - & -1.43\times(1) & = & 2.43 \\ 0 & - & 0\times(1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 120 & - & 28.57\times(0) & = & 120 \\ 0 & - & 1\times(0) & = & 0 \\ 1 & - & 0\times(0) & = & 1 \\ 0 & - & 0\times(0) & = & 0 \\ 0 & - & (0\times(0) & = & 0 \\ 0 & - & 14.28\times(0) & = & 0 \\ 0 & - & -1.43\times(0) & = & 0 \\ 1 & - & 0\times(0) & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			150	300	0	0	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	1.14	0	0	1	0	-1.43	0.09	0	
	0	S_2	0.57	0	0	0	1	-1.71	0.07	0	
$\longrightarrow$	150	x_1	28.57	1	0	0	0	14.28	-1.43	0	
	300	x_2	120	0	1	0	0	0	1	0	
	0	S_5	51.43	0	0	0	0	-14.28	2.48	0	
		Z_j	40.285.5	150	300	0	0	0	300	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	0	0	0	0	

Solución óptima:

Z(MÁX) = 40.285.000 dólares

$x_1 = 28.57$ mil. Unidades de refrigeradoras tipo A,

$x_2 = 120$ mil. Unidades de refrigeradoras tipo B,

$S_1 = 1.14$ mil. Unidades de hierro no utilizadas,

$S_2 = 0.57$ mil. Unidades de fibra de vidrio no utilizadas,

$S_3 = 0$ Se ha utilizado todo el aluminio,

$S_5 = 51.43$ mil. No se ha cubierto toda la demanda de A,

$S_4 = 0$ Se ha cubierto toda la demanda de B.

Como elemento final en la resolución del ejercicio, se presenta todos los resultados en una sola tabla.

	C_j			150	300	0	0	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	10.000	0.1	0.05	1	0	0	0	0	
	0	S_2	16.000	0.12	0.1	0	1	0	0	0	
	0	S_3	14.000	0.07	0.1	0	0	1	0	0	
$\longleftarrow$	0	S_4	120.000	0	1^*	0	0	0	1	0	
	0	S_5	80.000	1	0	0	0	0	1	0	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-150	-300	0	0	0	0		
	C_j			150	300	0	0	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	4	0.1	0	1	0	0	-0.05	0	
	0	S_2	4	0.12	0	0	1	0	-0.1	0	
$\longleftarrow$	0	S_3	2	0.07	0	0	0	1	-0.1	0	
$\longrightarrow$	300	x_2	120	0	1	0	0	0	1	0	
	0	S_5	80	1	0	0	0	0	1	0	
		Z_j	36.000	0	300	0	0	0	300	0	
		$Z_j - C_j$	—	-150	0	0	0	0	0	0	
	C_j			150	300	0	0	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	1.14	0	0	1	0	-1.43	0.09	0	
	0	S_2	0.57	0	0	0	1	-1.71	0.07	0	
$\longrightarrow$	150	x_1	28.57	1	0	0	0	14.28	-1.43	0	
	300	x_2	120	0	1	0	0	0	1	0	
	0	S_5	51.43	0	0	0	0	-14.28	2.48	0	
		Z_j	40.285.5	150	300	0	0	0	300	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	0	0	0	0	

Comprobación:

$0,10x_1 + 0,05x_2 + S_1 = 10.000 \longrightarrow 0.10(28.57) + 0.05(120) + 1.14 = 9.999$

$0,12x_1 + 0,10x_2 + S_2 = 16.000 \longrightarrow 0.12(28.57) + 0.10(120) + 0.57 = 15.999$

$0,07x_1 + 0,10x_2 + S_3 = 14.000 \longrightarrow 0.07(28.57) + 0.10(120) + 0 = 13.999$

$x_1 + S_4 = 80.000 \longrightarrow 28.57 + 51.43 = 80.000$

$x_2 + S_5 = 120.000 \longrightarrow 120 + 0 = 120.000$

3. Una fabrica produce dos tipos de muebles A y B, dispone del taller de torno, el mismo que, puede procesar 25 unidades/hora de A y 40 unidades/hora de B, siendo el costo por hora de 20 dólares. El taller de rectificación puede procesar 28 un/h de A y 35 un/h de B y su costo es de 14 dólares. El taller de pintura puede atender a 35 un/h de A y 25 un/h de B y su costo es de 17,5 dólares. El

precio de venta de A es de 5 dólares y el de B, 4 dólares. ¿Cuantas unidades de A y B debe producir para obtener la máxima ganancia?

Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & = & Productos \\ x_1 & x_2 & = & Numero \quad producido \\ 3.2 & 2.4 & = & Utilidad \end{cases}$$

$$\begin{cases} Taller & Proceso & & Capacidad & Costo \\ & A & B & & \\ Torno & 25 & 40 & 1 & 20 \\ Rectificacion & 28 & 35 & 1 & 14 \\ Pintura & 35 & 25 & 1 & 17.5 \end{cases}$$

Cuando no se dispone sobre la capacidad de los departamentos, se sobre entiende que, la capacidad es del 100 por ciento. la misma que, es representa por 1, y cada taller ocupa su tiempo de producción, tanto para A, como para B, un porcentaje de esa capacidad en forma de fracción.

$$\begin{cases} & & Costos/unidad \\ & A & & B \\ Torno & 20 \div 25 = 0.8 & & 20 \div 40 = 0.5 \\ Rectificacion & 28 \div 28 = 0.5 & & 14 \div 35 = 0.4 \\ Pintura & 17.5 \div 35 = 0.5 & & 17.5 \div 25 = 0.7 \\ Costos \ \ totales & 0.8 + 0.5 + 0.5 = 1.8 & & 0.5 + 0.4 + 0.7 = 1.6 \end{cases}$$

La utilidad se define, como la diferencia entre el precio de cada unidad menos los costos de cada unidad que haya pasado por los diferentes departamentos:

$$\begin{cases} & & Utilidad \\ & A & & B \\ Producto & 5 - 1.8 = 3.2 & & 4 - 1.6 = 2.4 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MAX) = 3,2x_1 + 2,4x_2$

Restricciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{25}x_1 + \frac{1}{40}x_2 & \leq & 1 & torno \\ \\ \frac{1}{28}x_1 + \frac{1}{35}x_2 & \leq & 1 & Rectificacion \\ \\ \frac{1}{35}x_1 + \frac{1}{35}x_1 & \leq & 1 & Pintura \\ \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No - negatividad \end{cases}$$

Variables de Holgura:

Se trasforma las desigualdades fraccionarias en igualdades enteras, para lo cual, se aumenta las variables de holgura,y se obtiene el mínimo común denominador:

$Z(MAX.) = 3.2x_1 + 2.4x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 & + & S_1 & & & & = 200 \\ 6x_1 + 4x_2 & & & + & S_2 & & = 140 \\ 5x_1 + 7x_2 & & & & & + & S_3 = 175 \end{cases}$$

Tabla I:

	C_j			3.2	2.4	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
$\longleftarrow$	0	S_1	200	8^*	5	1	0	0	
	0	S_2	140	5	4	0	1	0	
	0	S_3	175	5	7	0	0	1	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-3.2	-2.4	0	0	0	

Los elementos de la tabla I, se forma de las ecuaciones de las restricciones. Al iniciarse el proceso productivo, no existe utilidad; por lo tanto, todos los coeficientes de la fila Z_j son ceros.
Los elementos de la fila $(Z_j - C_j)$, que se denomina criterio del simplex, se forma restando los coeficientes de la fila Z_j menos la fila C_j.

Tabla II:

La tabla I nos indica que, en la fila $(Z_j - C_j)$ se tiene valores negativos, se escoje el menor de ellos, en este caso sera (-3.2); por lo tanto, la columna que ingresa es x_1, para saber cual fila sale, se divide los coeficientes de b_n para los coeficientes de x_1.

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} \dfrac{200}{8} & = & 25 & \longrightarrow & 8^* & \textit{pivote} \\ \dfrac{140}{5} & = & 28 & \longrightarrow & 5^\circ & \textit{semipivote} \\ \dfrac{175}{5} & = & 35 & \longrightarrow & 0.1^\circ & \textit{semipivote} \end{cases}$$

Por lo tanto, ingresa la columna de x_1 y sale la fila S_1 y el numero 8 sera el pivote.
Para obtener los nuevos coeficientes de x_1. Se divide los coeficientes anteriores de S_2 para el pivote , que es :

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 200 & \div & 8 & = & 25 \\ 8 & \div & 8 & = & 1 \\ 5 & \div & 8 & = & 0.625 \\ 1 & \div & 8 & = & 0.125 \\ 0 & \div & 8 & = & 0 \\ 0 & \div & 8 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 140 & - & 25 \times 5 & = & 15 \\ 5 & - & 1 \times 5 & = & 0 \\ 4 & - & 0.625 \times 5 & = & 0.875 \\ 0 & - & 0.125 \times 5 & = & -0.625 \\ 1 & - & (0 \times 5) & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times 5 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3 :

$$\begin{cases} 175 & - & 25 \times 5 & = & 50 \\ 5 & - & 1 \times 5 & = & 0 \\ 7 & - & 0.625 \times 5 & = & 3.875 \\ 0 & - & 0.125 \times 5 & = & -0.625 \\ 0 & - & (0 \times 5) & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 5 & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			3.2	2.4	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
$\longrightarrow$	3.2	x_1	25	1	0.625	0.125	0	0	
	0	S_2	15	0	0.875	-0.625	1	0	
$\longleftarrow$	0	S_3	50	0	3.875	-0.625	0	1	
		Z_j	80	3.2	2	0.4	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	-0.4	0.4	0	0	

Tabla III:

La tabla II nos indica que, en la fila $(Z_j - C_j)$ se tiene, todavía, valores negativos, se escoje el menor de ellos, en este caso sera (-0.4); por lo tanto, la columna que ingresa es x_2, para saber cual fila sale, se divide los coeficientes de b_n para los coeficientes de x_2:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \dfrac{25}{0.625} & = & 40 & \longrightarrow & 0.625^{\circ} & \textit{semipivote} \\ \dfrac{15}{0.875} & = & 17.14 & \longrightarrow & 0.875^{\circ} & \textit{semipivote} \\ \dfrac{50}{3.875} & = & 12.90 & \longrightarrow & 3.875^{*} & \textit{pivote} \end{cases}$$

Por lo tanto, ingresa la columna de x_2 y sale la fila S_3 y el numero 3.875 sera el pivote.

Para obtener los nuevos coeficientes de x_2. Se divide los coeficientes anteriores de S_3 para el pivote , que es :

Coeficientes de x_2**:**

$$\begin{cases} 50 & \div & 3.875 & = & 13 \\ 0 & \div & 3.875 & = & 0 \\ 3.875 & \div & 3.875 & = & 1 \\ -0.625 & \div & 3.875 & = & -0.1612 \\ 0 & \div & 3.875 & = & 0 \\ 1 & \div & 3.875 & = & 0.2580 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 15 & - & 12.90 \times 0.875 & = & 3.625 \\ 0 & - & 0 \times 0.875 & = & 0 \\ 0.875 & - & 1 \times 0.875 & = & 0 \\ -0.625 & - & -0.1612 \times 0.875 & = & 0.4839 \\ 1 & - & (0 \times 0.875) & = & 1 \\ 0 & - & 0.2580 \times 0.875 & = & -0.2257 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 25 & - & 13 \times 0.625 & = & 16.875 \\ 1 & - & 0 \times 0.625 & = & 1 \\ 0.625 & - & 1 \times 0.625 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 0,125 & - & 0.1612 \times 0.625 & = & 0.56 \\ 0 & - & (0 \times 0.625) & = & 0 \\ 0 & - & 0.2580 \times 0.625 & = & -0.1612 \end{cases}$$

	C_j			3.2	2.4	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
	3.2	x_1	16.875	1	0	0.024	0	-0.1612	
	0	S_2	3.625	0	0	0.4839	1	-0.2257	
$\longrightarrow$	2.4	x_2	13	0	1	-0.1612	0	0.258	
		Z_j	85.6	3.2	2.4	-0.3868	0	0.6192	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0.336	0	0.1034	

La fila $(Z_j - C_j)$ esta compuesta por números positivos y ceros; por lo tanto el proceso ha concluido.

Solución óptima Z(MÁX.) = 85.6 dólares

$x_1 = 17$ Se debe producir 17 elementos de tipo A

$x_2 = 13$ Se debe producir 13 elementos de tipo B

$S_1 = 0$ Se utilice toda la capacidad del departamento de torno.

$S_2 = 3.625.$ No se ha utilizado toda la capacidad del departamento de rectificación

$S_3 = 0$ Se ha utilizado toda la capacidad del departamento de pintura.

Se presenta en una sola tabla el ejercicio.

	C_j			3.2	2.4	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
$\longleftarrow$	0	S_1	200	8^*	5	1	0	0	
	0	S_2	140	5	4	0	1	0	
	0	S_3	175	5	7	0	0	1	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-3.2	-2.4	0	0	0	
	C_j			3.2	2.4	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
$\longrightarrow$	3.2	x_1	25	1	0.625	0.125	0	0	
	0	S_2	15	0	0.875	-0.625	1	0	
$\longleftarrow$	0	S_3	50	0	3.875	-0.625	0	1	
		Z_j	80	3.2	2	0.4	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	-0.4	0.4	0	0	
	C_j			3.2	2.4	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
	3.2	x_1	16.875	1	0	0.024	0	-0.1612	
	0	S_2	3.625	0	0	0.4839	1	-0.2257	
$\longrightarrow$	2.4	x_2	13	0	1	-0.1612	0	0.258	
		Z_j	85.6	3.2	2.4	-0.3868	0	0.6192	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0.336	0	0.1034	

2.13.3. Ejercicios de Minimización Método Simplex

Los casos de minimización se puede también resolver empleando la metodología del método "Simplex", con algunas variaciones. En los problemas de minimización se introduce las variables:

1. variables de holgura con signo negativo S_j y,

2. las variables artificiales con signo positivo m_j.

Las variables artificiales tienen un coeficiente (M) que es un valor indeterminado. Cuando hay variables de holgura y artificiales, primero se eliminan las variables artificiales y luego las de holgura.
Si la restricción es una igualdad, entonces se introduce solamente variables artificiales con signo positivo.
Para resolver un problema de minimización, se empieza eliminando los mayores valores positivos de la fila $(Z_j - C_j)$. El proceso habrá concluido cuando en la fila $(Z_j - C_j)$ queden valores negativos o ceros.
La función objetivo se representara por Z(MIN) y las variables artificiales llevaran en esta función un coeficiente M.

$Z(Min.) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots + 0S_n + Mm_1 + Mm_2 + \cdots + Mm_n$

Restricciones, variables de holgura y artificiales:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \cdots + A_{1n}x_n - S_1 + Mm_1 & = & b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \cdots + A_{2n}x_n - S_2 + Mm_2 & = & b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + \cdots + A_{3n}x_n - S_3 + Mm_3 & = & b_3 \\ A_{41}x_1 + A_{42}x_2 + A_{43}x_3 + \cdots + A_{4n}x_n - S_4 + Mm_4 & = & b_4 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + A_{m3}x_3 + \cdots + A_{mn}x_n - S_n + Mm_n & = & b_n \end{cases}$$

1. Se producen dos artículos A y B los mismos que son procesados por 3 maquinas $M_1, M_2\ y\ M_3$ que disponen de 130, 190, 200 horas semanales al menos. La M_1 procesa 1 unidad de A y 1 de B; M_2 procesa 2 de A y 1 de B; M_3 procesa 1 de A y 4 de B. El costo de procesar es 2 dólares por cada unidad del articulo A y 3 dólares por cada unidad del articulo B. Cuantas unidades de A y B se deben procesar para que el costo sea mínimo.?

   Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & \longrightarrow & Productos \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número \quad producido \\ 2 & 3 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

   Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq & 130 & Capacidad\ de\ procesar\ M_1 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 190 & Capacidad\ de\ procesar\ M_2 \\ x_1 + 4x_1 & \geq & 200 & Capacidad\ de\ procesar\ M_3 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

   Variables de holgura y Artificiales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad - S1 \qquad\qquad +m_1 \qquad\qquad \geq \; 130 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad - S_2 \qquad\qquad +m_2 \qquad \geq \; 190 \\ x_1 + 4x_1 \qquad\qquad\quad - S_3 \qquad\qquad +m_3 \; \geq \; 200 \end{cases}$$

TABLA I:

Para formar la tabla I, se utiliza los coeficientes de las variables fundamentales, de holgura y artificiales. Primero se elimina las variables artificiales, las mismas que, en la función objetivo irán con un coeficiente (M), que representa un valor indeterminado.

	C_j			2	3	0	0	0	M	M	M	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	m_1	m_2	m_3	
	M	m_1	130	1	1	-1	0	0	1	0	0	
	M	m_2	190	2	1	0	-1	0	0	1	0	
$\longleftarrow$	M	m_3	200	1	4*	0	0	-1	0	0	1	
		Z_j	520M	4M	6M	-M	-M	-M	M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	4M	6M	-M	-M	-M	0	0	0	

La fila Z_j se obtiene:

Z_j = M X 130 + M x 190 + M x 200 =520M
= 1 x M + 2 x M + 1 x M = 4M

$= 1 \times M + 1 \times M + 4 \times M = 6 \times M$

$=-1 \times M + O \times M + 0 \times M = -M$

$= 0 \times M - 1 \times M + 0 \times M = -M$

$= 0 \times M + O \times M - 1 \times M = -M$

$= 1 \times M + 0 \times M + 0 \times M = M$

$= 0 \times M + 1 \times M + 0 \times M = M$

$= 0 \times M + 0 \times M + 1 \times M = M$

TABLA II:

Cuando la función objetivo es de minimización, de la fila $Z_j - C_j$ se debe eliminar los valores positivos, empezando por el mayor, en este caso 6M, de modo que ingresa X_2 con un costo de 3, para saber que fila sale se procede como en los problemas de maximización.

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \dfrac{130}{1} = 130 \longrightarrow 1^\circ \; semipivote \\ \dfrac{190}{1} = 190 \longrightarrow 1^\circ \; semipivote \\ \dfrac{200}{4} = 50 \longrightarrow 4^* \; pivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 200 & \div & 4 & = & 50 \\ 1 & \div & 4 & = & 0.25 \\ 4 & \div & 4 & = & 1 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ -1 & \div & 4 & = & -0.25 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ 1 & \div & 4 & = & 0.25 \end{cases}$$

Coeficientes de m_1 :

$$\begin{cases} 130 & - & 50\times 1 & = & 80 \\ 1 & - & 0.25\times 1 & = & 0.75 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ -1 & - & 0\times 1 & = & -1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (-0.25)\times 1 & = & 0.25 \\ 1 & - & 0\times 1 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0.25\times 1 & = & -0.25 \end{cases}$$

Coeficientes de m_2 :

$$\begin{cases} 190 & - & 50\times 1 & = & 140 \\ 2 & - & 0.25\times 1 & = & 1.75 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ -1 & - & (0\times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (-0.25)\times 1 & = & 0.25 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 1 & = & 1 \\ 0 & - & 0.25\times 1 & = & -0.25 \end{cases}$$

	C_j			2	3	0	0	0	M	M	M	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	m_1	m_2	m_3	
	M	m_1	80	0.75	0	-1	0	0.25	1	0	-0.25	
$\longleftarrow$	M	m_2	140	1.75*	0	0	-1	0.25	0	1	-0.25	
$\longrightarrow$	3	x_2	50	0.25	1	0	0	-0.25	0	0	0.25	
		Z_j	220M	2.5M	0M	-M	-M	0.5M	M	M	-0.5M	
		$Z_j - C_j$	—	2.5M	0M	-M	-M	0.5M	0	0	-1.5M	

La fila $Z_j - C_j$ tiene los mismos valores de la fila Z_j, con excepción de las tres ultimas columnas. Para los valores de Z_j no se toma en cuenta la fila x_2 por tener coeficiente numéricos.

TABLA III:

De la fila $Z_j - C_j$ se toma el valor el mayor valor positivo, en este caso, 2,5M. Es decir, ingresa x_1 con un costo de 2 dolares. Se determina la fila que sale:

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} \dfrac{80}{0.75} & = & 106.66 & \longrightarrow & 0.75^{\circ} & semipivote \\ \dfrac{140}{1.75} & = & 80 & \longrightarrow & 0.25^{*} & pivote \\ \dfrac{50}{0.25} & = & 200 & \longrightarrow & 0.25^{\circ} & semipivote \end{cases}$$

Sale la fila m_2 e ingresa la columna x_1

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 140 & \div & 1.75 & = & 80 \\ 1.75 & \div & 1.75 & = & 1 \\ 0 & \div & 1.75 & = & 0 \\ 0 & \div & 1.75 & = & 0 \\ -1 & \div & 1.75 & = & -0,57 \\ 0.25 & \div & 1.75 & = & 0.14 \\ 0 & \div & 1.75 & = & 0 \\ 1 & \div & 1.75 & = & 0.57 \\ -0.25 & \div & 1.75 & = & -0.14 \end{cases}$$

Coeficientes de m_1 :

$$\begin{cases} 80 & - & 80\times 0.75 & = & 20 \\ 0.75 & - & 1\times 0.75 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0.75 & = & 0 \\ -1 & - & 0\times 0.75 & = & -1 \\ 0 & - & (-0.57\times 0.75) & = & 0.43 \\ 0.25 & - & (0.14)\times 0.75 & = & 0.15 \\ 1 & - & 0\times 0.75 & = & 1 \\ 0 & - & 0.57\times 0.75 & = & -0.43 \\ -0.25 & - & (-0.14)\times 0.75 & = & -0.15 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 50 & - & 80\times 0.25 & = & 30 \\ 0.25 & - & 1\times 0.25 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0.25 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 0.25 & = & 0 \\ 0 & - & (-0.57\times 0.25) & = & 0.14 \\ -0.25 & - & (0.14)\times 0.25 & = & -0.28 \\ 0 & - & 0\times 0.25 & = & 0 \\ 0 & - & 0.57\times 0.25 & = & -0.14 \\ 0.25 & - & -0.14\times 0.25 & = & 0.28 \end{cases}$$

	C_j			2	3	0	0	0	M	M	M	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	m_1	m_2	m_3	
$\longleftarrow$	M	m_1	20	0	0	-1	0.43*	0.15	1	-0.43	-0.15	
$\longrightarrow$	2	x_1	80	1	0	0	-0.57	0.14	0	0.57	-0.14	
	3	x_2	30	0	1	0	0.14	-0.28	0	-0.14	0.28	
		Z_j	20M	0M	0M	-M	-M	0.43M	0.15M	-0.43M	-0.15M	
		$Z_j - C_j$	—	0M	0M	-M	0.43M	0.15M	0	-1.43M	-1.15M	

TABLA IV:

De la fila $(Z_j - C_j)$ se toma el valor positivo 0,43M; es decir, que ingresa S_2 :

$$\frac{b_n}{S_2} = \begin{cases} \dfrac{20}{0.43} & = & 46.5 & \longrightarrow & 0.43^* & \textit{pivote} \\ \dfrac{80}{-0.57} & = & No & \longrightarrow & -0.57^\circ & \textit{semipivote} \\ \dfrac{30}{0.14} & = & 214.3 & \longrightarrow & 0.25^\circ & \textit{semipivote} \end{cases}$$

Sale la fila m_1 y en su lugar ingresa S_2. Al desaparecer las variables artificiales, las tres últimas columnas no intervienen en el proceso.

Coeficientes de S_2:

$$\begin{cases} 20 & \div & 0.43 & = & 46.51 \\ 0 & \div & 0.43 & = & 0 \\ 0 & \div & 0.43 & = & 0 \\ -1 & \div & 0.43 & = & -2.33 \\ 0.43 & \div & 0.43 & = & 1 \\ 0.15 & \div & 0.43 & = & 0.35 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 80 & - & 46.51\times(-0.57) & = & 106.51 \\ 1 & - & 0\times(-0.57) & = & 1 \\ 0 & - & 0\times(-0.57) & = & 0 \\ 0 & - & -2.33\times(-0.57) & = & -1.33 \\ -0.57 & - & (1\times(-0.57)) & = & 0 \\ 0.14 & - & (0.35)\times(-0.57) & = & 0.34 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 30 & - & 46.51\times 0.14 & = & 23.5 \\ 0 & - & 0\times 0.14 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0.14 & = & 1 \\ 0 & - & 2.33\times 0.14 & = & 0.33 \\ 0.14 & - & (1\times 0.14) & = & 0 \\ -0.28 & - & (0.35)\times 0.14 & = & -0.33 \end{cases}$$

	C_j			2	3	0	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
$\longleftarrow$	3	x_2	23.5	0	1	0.33	0	-0.33	
$\longrightarrow$	2	x_1	106.51	1	0	-1.33	0	0.34	
	0	S_2	46.51	0	0	-2.33	1	0.35	
		Z_j	20M	2	3	-1.67	0	-0.31	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	-1.67	0	-0.31	

La fila $(Z_j - C_j)$, se denomina criterio del simplex, cuando se tiene valores negativos o ceros; entonces, el proceso ha terminado.

Solución óptima:

Z(MÍN) = 183,5 Dólares.

$x_1 = 106{,}51$ Unidades del artículo A

$x_2 = 23{,}5$ Unidades del articulo B

$S_1 = 0$ Se utilice toda la capacidad de la maquina uno

$S_2 = 46{,}5$ Capacidad no utilizada de la maquina dos

$S_3 = 0$ Se utilice toda la capacidad de la maquina tres

Comprobación:

$x_1 + x_2 - S_1 = 130$

106.5 + 23.5 - 0 = 130

$2x_1 + x_2 - S_1 = 190$

2(106.5) + 23.5 - 46.5 = 190.

La solución del ejercicio se presenta en una sola tabla.

	C_j			2	3	0	0	0	M	M	M	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	m_1	m_2	m_3	
	M	m_1	130	1	1	-1	0	0	1	0	0	
	M	m_2	190	2	1	0	-1	0	0	1	0	
$\longleftarrow$	M	m_3	200	1	4*	0	0	-1	0	0	1	
		Z_j	520M	4M	6M	-M	-M	-M	M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	4M	6M	-M	-M	-M	0	0	0	
	C_j			2	3	0	0	0	M	M	M	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	m_1	m_2	m_3	
	M	m_1	80	0.75	0	-1	0	0.25	1	0	-0.25	
$\longleftarrow$	M	m_2	140	1.75*	0	0	-1	0.25	0	1	-0.25	
$\longrightarrow$	3	x_2	50	0.25	1	0	0	-0.25	0	0	0.25	
		Z_j	220M	2.5M	0M	-M	-M	0.5M	M	M	-0.5M	
		$Z_j - C_j$	—	2.75M	0M	-M	-M	0.5M	0	0	-1.5M	

	C_j			2	3	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
$\longleftarrow$	3	x_2	23.5	0	1	0.33	0	-0.33	
$\longrightarrow$	2	x_1	106.51	1	0	-1.33	0	0.34	
	0	S_2	46.51	0	0	-2.33	1	0.35	
		Z_j	20M	2	3	-1.67	0	-0.31	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	-1.67	0	-0.31	

2. Una compañía química esta diseñando una planta para producir dos tipos de minerales M y N. La planta debe sen capaz de producir al menos 100 unidades de M y 420 unidades de N cada día. Existen dos posibles diseños para las cámaras principales de reacción que vienen incluidas en la planta. Cada cámara tipo A cuesta 600 mil dólares y es capaz de producir 10 unidades de M y 20 unidades de N por día; el tipo B es un diseño mas económico, cuesta 300 mil dólares y es capaz de producir 4 unidades de M y 30 unidades de N por día. A causa de los costos de operación, es necesario tener al menos 4 cámaras de cada tipo en la planta. ¿Cuantas cámaras de cada tipo deben ser incluidas para minimizar el costo de construcción y satisfacer el programa de producción requerido?

   Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & \longrightarrow & Camaras \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número\ de\ Camaras \\ 600\ mil & 300\ mil & \longrightarrow & Costos \end{cases}$$

   Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 & \geq & 4 & Camaras\ tipo\ A \\ x_2 & \geq & 4 & Camaras\ tipo\ B \\ 10x_1 + 4x_2 & \geq & 100 & Produccion\ Mineral\ M \\ 20x_1 + 30x_2 & \geq & 420 & Produccion\ Mineral\ N \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

   Variables de holgura y Artificiales:

$$\begin{cases} x_1 - S1 + m_1 = 4 \\ x_2 - S_2 + m_2 = 4 \\ 10x_1 + 4x_1 - S_3 + m_3 \geq 100 \\ 20x_1 + 30x_2 - S_4 + m_4 \geq 420 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$Z(MIN) = 600X_1 + 300X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + Mm_1 + Mm_2 + Mm_3 + Mm_4$$

TABLA I:

La primera tabla se forma con los coeficientes originales de la función objetivo, las variables fundamentales, las variables de holgura y las variables artificiales. Los coeficientes de la fila $(Z_j - C_j)$, se obtienen sumando los productos de los coeficientes de cada columna con los coeficientes M de cada variable artificial: $M \times 4 + m \times 4 + M \times 100 + M \times 420 = 528M$.
El resto de valores se obtienen aplicando el mismo procedimiento.

	C_j			600	300	0	0	0	0	M	M	M	M	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	m_1	m_2	m_3	m_4	
$\longleftarrow$	M	m_1	4	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	
	M	m_2	4	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	
	M	m_3	100	10	4	0	0	-1	0	0	0	1	0	
	M	m_4	420	20	30	0	0	0	-1	0	0	0	1	
		Z_j	528M	31M	35M	-M	-M	-M	-M	M	M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	31M	35M	-M	-M	-M	-M	0	0	0	0	

TABLA II:

El mayor valor positivo de la fila del criterio simplex es 35M, de manera que la columna que ingresa es x_2 con un costo de 300. Para obtener la fila que sale, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \dfrac{4}{0} = No \longrightarrow 1^\circ \; semipivote \\[2ex] \dfrac{4}{1} = 4 \longrightarrow 1^* \; pivote \\[2ex] \dfrac{100}{4} = 25 \longrightarrow 4^\circ \; semipivote \\[2ex] \dfrac{420}{30} = 14 \longrightarrow 4^\circ \; semipivote \end{cases}$$

El menor cocientes es 4; por lo tanto, el pivote es 1, el resto son semipivotes. La fila que sale es m_2. Los coeficientes de la nueva fila x_2, se obtienen dividiendo los anteriores para el pivote 1:

Coeficientes de x_2:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr}
4 & \div & 1 & = & 4\\
0 & \div & 1 & = & 0\\
1 & \div & 1 & = & 1\\
0 & \div & 1 & = & 0\\
-1 & \div & 1 & = & -1\\
0 & \div & 1 & = & 0\\
0 & \div & 1 & = & 0\\
0 & \div & 1 & = & 0\\
1 & \div & 1 & = & 1\\
0 & \div & 1 & = & 0\\
0 & \div & 1 & = & 0
\end{array}\right.$$

Coeficientes de m_1 :

$$\left\{\begin{array}{rcl cr}
4 & - & 4\times 0 & = & 4\\
1 & - & 0\times 0 & = & 1\\
0 & - & 1\times 0 & = & 0\\
-1 & - & 0\times 0 & = & -1\\
0 & - & (-1\times 0) & = & 0\\
0 & - & (0)\times 0 & = & 0\\
0 & - & 0\times 0 & = & 0\\
1 & - & 0\times 0 & = & 1\\
0 & - & 1\times 0 & = & 0\\
0 & - & 0\times 0 & = & 0\\
0 & - & 0\times 0 & = & 0
\end{array}\right.$$

Coeficientes de m_3:

$$\left\{\begin{array}{rcl cr}
100 & - & 4\times 4 & = & 84\\
10 & - & 0\times 4 & = & 10\\
4 & - & 1\times 4 & = & 0\\
0 & - & 0\times 4 & = & 0\\
0 & - & (-1\times 4) & = & 4\\
-1 & - & (0)\times 4 & = & -1\\
0 & - & 0\times 4 & = & 0\\
0 & - & 0\times 4 & = & 0\\
0 & - & 1\times 4 & = & -4\\
1 & - & 0\times 4 & = & 1\\
0 & - & 0\times 4 & = & 0
\end{array}\right.$$

Coeficientes de m_4 :

$$\left\{\begin{array}{rcl cr}
420 & - & 4\times 30 & = & 300\\
20 & - & 0\times 30 & = & 20\\
30 & - & 1\times 30 & = & 0\\
0 & - & 0\times 30 & = & 0\\
0 & - & (-1\times 30) & = & 30\\
0 & - & (0)\times 30 & = & 0\\
-1 & - & 0\times 30 & = & -1\\
0 & - & 0\times 30 & = & 0\\
0 & - & 1\times 30 & = & -30\\
0 & - & 0\times 30 & = & 0\\
1 & - & 0\times 30 & = & 1
\end{array}\right.$$

	C_j			600	300	0	0	0	0	M	M	M	M	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	m_1	m_2	m_3	m_4	
	M	m_1	4	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	
⟶	300	x_2	4	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	
	M	m_3	84	10	0	0	4	-1	0	0	-4	1	0	
⟵	M	m_4	300	20	0	0	30	0	-1	0	-30	0	1	
		Z_j	388M	31M	0M	-M	34M	-M	-M	M	-34M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	34M	0M	-M	33M	-M	-M	0	25M	0	0	

TABLA III:

Se elimina el mayor valor positivo de la fila del criterio simplex, que es 34M; de manera que, la columna que ingresa es S_2 con un costo de 0. Para obtener la fila sale se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{S_2}=\left\{\begin{array}{rcllll}
4\div 0 & = & No & \longrightarrow & 4^{\circ} & \textit{semipivote}\\
4\div -1 & = & No & \longrightarrow & 1^{\circ} & \textit{semipivote}\\
84\div 4 & = & 21 & \longrightarrow & 0^{\circ} & \textit{semipivote}\\
300\div 30 & = & 10 & \longrightarrow & 30^{*} & \textit{pivote}
\end{array}\right.$$

En este análisis los números divididos para cero o negativos no se toman en consideración. El menor cocientes es 10; por lo tanto, el pivote es 30, el resto

son semipivotes. La fila que sale es m_4. Los coeficientes de la nueva fila S_2, se obtienen dividiendo los anteriores para el pivote 30.
Los coeficientes de m_1 son los mismos, que los anteriores, porque el semipivote correspondiente a esa fila es cero (0).

Coeficientes de S_2:

$$\begin{cases} 300 & \div & 30 & = & 10 \\ 20 & \div & 30 & = & 066 \\ 0 & \div & 30 & = & 0 \\ 0 & \div & 30 & = & 0 \\ 30 & \div & 30 & = & 1 \\ 0 & \div & 30 & = & 0 \\ -1 & \div & 30 & = & -0.03 \\ 0 & \div & 30 & = & 0 \\ -30 & \div & 30 & = & -1 \\ 0 & \div & 30 & = & 0 \\ 1 & \div & 30 & = & 0.03 \end{cases}$$

Coeficientes de m_1 :

$$\begin{cases} 4 & - & 10\times 0 & = & 4 \\ 1 & - & 0.66\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ -1 & - & 0\times 0 & = & -1 \\ 0 & - & (1\times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & -0.03\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & -1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0.03\times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_3:

$$\begin{cases} 84 & - & 10\times 4 & = & 44 \\ 10 & - & 0.66\times 4 & = & 7.36 \\ 0 & - & 0\times 4 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 4 & = & 0 \\ 4 & - & (1\times 4) & = & 0 \\ -1 & - & (0)\times 4 & = & -1 \\ 0 & - & -0.03\times 4 & = & 0.12 \\ 0 & - & 0\times 4 & = & 0 \\ -4 & - & -1\times 4 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 4 & = & 1 \\ 0 & - & 0.03\times 4 & = & -0.12 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 4 & - & 10\times(-1) & = & 14 \\ 0 & - & 0.66\times(-1) & = & 0.66 \\ 1 & - & 0\times(-1) & = & 1 \\ 0 & - & 0\times(-1) & = & 0 \\ -1 & - & (1\times(-1)) & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times(-1) & = & 0 \\ 0 & - & -0.03\times(-1) & = & 0.03 \\ 0 & - & 0\times(-1) & = & 0 \\ 1 & - & -1\times(-1) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times(-1) & = & 0 \\ 0 & - & 0.03\times(-1) & = & 0.03 \end{cases}$$

	C_j			600	300	0	0	0	0	M	M	M	M	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	m_1	m_2	m_3	m_4	
$\longleftarrow$	M	m_1	4	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	
	300	x_2	14	0.66	1	0	0	0	0.03	0	0	0	0.03	
	M	m_3	44	7.36	0	0	0	-1	0.12	0	0	1	-0.12	
$\longrightarrow$	0	S_2	10	0.66	0	0	1	0	-0.03	0	-1	0	0.03	
		Z_j	48M	8.36M	0M	-M	0M	-M	0.12M	M	0M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	8.36M	0M	-M	0M	-M	0.12M	0	-M	0	0	

TABLA IV:

Se elimina el mayor valor positivo de la fila del criterio simplex, que en este caso es 8.36M, de manera que la columna que ingresa es x_1 con un costo de 600, se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_1}=\begin{cases} \dfrac{4}{1} = 4 \longrightarrow 1^{*} & pivote \\[2ex] \dfrac{14}{0.66} = 21.21 \longrightarrow 0.66^{\circ} & semipivote \\[2ex] \dfrac{44}{7.36} = 5.97 \longrightarrow 7.36^{\circ} & semipivote \\[2ex] \dfrac{10}{0.66} = 15.15 \longrightarrow 10^{\circ} & semipivote \end{cases}$$

El menor de los cocientes es 4; por lo tanto, el pivote es 1, el resto son semipivotes. La fila que sale es m_1. Los coeficientes de la nueva fila x_1 se obtienen dividiendo los anteriores para el pivote 1.

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 4 \div 1 = 4 \\ 1 \div 1 = 1 \\ 0 \div 1 = 0 \\ -1 \div 1 = -1 \\ 0 \div 1 = 0 \\ 0 \div 1 = 0 \\ 0 \div 1 = 0 \\ 1 \div 1 = 1 \\ 0 \div 1 = 0 \\ 0 \div 1 = 0 \\ 0 \div 1 = 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_3:

$$\begin{cases} 44 - 4\times 7.36 = 14.56 \\ 7.36 - 1\times 7.36 = 0 \\ 0 - 0\times 7.36 = 0 \\ 0 - -1\times 7.36 = 7.36 \\ 0 - (0\times 7.36) = 0 \\ -1 - (0)\times 7.36 = -1 \\ 0.12 - 0\times 7.36 = 0.12 \\ 0 - 1\times 7.36 = -7.36 \\ 0 - 0\times 7.36 = 0 \\ 1 - 0\times 7.36 = 1 \\ -0.12 - 0\times 7.36 = -0.12 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 10 - 4\times 0.66 = 7.36 \\ 0.66 - 1\times 0.66 = 0 \\ 0 - 0\times 0.66 = 0 \\ 0 - (-1\times 0.66) = 0.66 \\ 1 - (0)\times 0.66 = 1 \\ 0 - 0\times 0.66 = 0 \\ -0.03 - 0\times 0.66 = -0.03 \\ 0 - 1\times 0.66 = -0.66 \\ -1 - 0\times 0.66 = -1 \\ 0 - 0\times 0.66 = 0 \\ 0.03 - 0\times 0.66 = 0.03 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 14 - 4\times (0.66) = 11.36 \\ 0.66 - 1\times (0.66) = 0 \\ 1 - 0\times (0.66) = 1 \\ 0 - -1\times (0.66) = 0.66 \\ 0 - (0\times (0.66)) = 0 \\ 0 - (0)\times (0.66) = 0 \\ 0.03 - 0\times (0.66) = 0.03 \\ 0 - 1\times (0.66) = -0.66 \\ 0 - 0\times (0.66) = 0 \\ 0 - 0\times (0.66) = 0 \\ 0.03 - 0\times (0.66) = 0.03 \end{cases}$$

La tabla IV esta en la siguiente pagina.

TABLA V:

Se elimina el mayor valor positivo de la fila del criterio simplex, que en este caso es 7.36M, de manera que la columna que ingresa es S_1 con un costo de cero, se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

	C_j			600	300	0	0	0	0	M	M	M	M	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	m_1	m_2	m_3	m_4	
$\longrightarrow$	600	x_1	4	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	
	300	x_2	11.36	0	1	0.66	0	0	0.03	-0.66	0	0	0.03	
$\longleftarrow$	M	m_3	14.56	0	0	7.36	0	-1	0.12	-7.36	0	1	-0.12	
	0	S_2	7.36	0	0	0.66	1	0	-0.03	-0.66	-1	0	0.03	
		Z_j	14.56M	0M	0M	7.36M	0M	-M	0.12M	-7.36M	0M	M	-0.12M	
		$Z_j - C_j$	—	0M	0M	7.36M	0M	-M	0.12M	-8.36M	-M	0	-1.12M	

$$\frac{b_n}{S_1} = \begin{cases} \dfrac{4}{-1} & = No & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ \dfrac{11.36}{-0.66} & = No & \longrightarrow & -0.66^\circ & semipivote \\ \dfrac{14.56}{7.36} & = 2 & \longrightarrow & 7.36^* & pivote \\ \dfrac{7.36}{0.66} & = 11.15 & \longrightarrow & 0.66^\circ & semipivote \end{cases}$$

El menor cocientes es 2; por lo tanto, el pivote es 7.36, el resto de elementos son semipivotes. La fila que sale es m_3. Se eliminan todas las variables artificiales, entonces en la tabla V, no tomamos en cuenta las cuatro últimas columnas:

Coeficientes de S_1:

$$\begin{cases} 14.56 & \div & 7.36 & = & 2 \\ 0 & \div & 7.36 & = & 0 \\ 0 & \div & 7.36 & = & 0 \\ 7.36 & \div & 7.36 & = & 1 \\ 0 & \div & 7.36 & = & 0 \\ -1 & \div & 7.36 & = & -0.13 \\ 0.12 & \div & 7.36 & = & 0.01 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 4 & - & 2\times -1 & = & 6 \\ 1 & - & 0\times -1 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times -1 & = & 0 \\ -1 & - & (1\times -1) & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times -1 & = & 0 \\ 0 & - & -0.13\times -1 & = & -0.13 \\ 0 & - & 0.01\times -1 & = & 0.01 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 11.36 & - & 2\times 0.66 & = & 10 \\ 0 & - & 0\times 0.66 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0.66 & = & 1 \\ 0.66 & - & 1\times 0.66 & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 0.66) & = & 0 \\ 0 & - & (-0.13)\times 0.66 & = & 0.08 \\ 0.03 & - & 0.01\times 0.66 & = & -0.03 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 7.36 & - & 2\times (0.66) & = & 6 \\ 0 & - & 0\times (0.66) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times (0.66) & = & 0 \\ 0.66 & - & 1\times (0.66) & = & 0 \\ 1 & - & (0\times (0.66)) & = & 1 \\ 0 & - & (-0.13)\times (0.66) & = & 0.08 \\ -0.03 & - & 0.01\times (0.66) & = & -0.03 \end{cases}$$

Tabla V esta en la siguiente pagina.

Como en la fila del criterio simplex ($Z_j - C_j$), solo hay valores negativos y ceros; entonces, el proceso ha concluido.

	C_j			600	300	0	0	0	0	Tabla V
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
	600	x_1	6	1	0	0	0	-0.13	0.01	
	300	x_2	10	0	1	0	0	0.08	-0.03	
	0	S_1	2	0	0	1	0	-0.13	0.01	
	0	S_2	6	0	0	0	1	0.08	-0.03	
		Z_j	6.600	600	300	0	0	0	-3	
		$Z_j - C_j$	—	0M	0M	0	0	0	-3	

Solución óptima:

$Z(MIN) = 6.600$ dólares

$x_1 = 6$ Cámaras tipo A

$x_2 = 10$ Cámaras tipo B

$S_1 = 2$ Se tiene 2 cámaras mas del limite

$S_2 = 6$ Cámaras mas del limite

$S_3 = 0$ Se ha cubierto la producción de P_1

$S_4 = 0$ Se ha cubierto la producción de P_2.

El estudiante debe presentar la solución del ejercicio en una sola tabla.

3. Se fabrican dos clases de muebles A y B, se dispone de madera para 80 muebles por lo menos, toma 2 horas preparar 10 muebles tipo A y 4 horas preparar 10 muebles tipo B, se dispone hasta de 20 horas. La demanda de A es de un total de 70. Cada mueble tipo A deja una utilidad de 10 dólares y 8 dólares cada mueble tipo B. ¿Cuántos muebles tipo A y B se deben fabricar para obtener la máxima ganancia?

Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & \longrightarrow & Muebles \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número\ de\ Muebles \\ 10 & 8 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq & 80 & Cantidad\ de\ madera \\ \frac{2}{10}x_1 + \frac{4}{10}x_2 & \leq & 20 & Tiempo \\ x_1 & = & 70 & Demanda\ de\ A \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Variables de holgura y Artificiales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & - S1 & & +m_1 & & = & 80 \\ x_1 + 2x_2 & & + S_2 & & & = & 100 \\ x_1 & & & & +m_3 & = & 70 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MIN) = 10X_1 + 8X_2 + 0S_1 + 0S_2 + Mm_1 + Mm_3$

TABLA I:

	C_j			10	8	0	0	M	M	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	m_1	m_3	
	M	m_1	80	1	1	-1	0	1	0	
$\longleftarrow$	M	m_3	70	1*	0	0	0	0	1	
	0	S_2	100	1	2	0	1	0	0	
		Z_j	150M	2M	M	-M	0M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	2M	M	-M	0	0	0	

TABLA II:

Se elimina el mayor valor positivo de la fila del criterio simplex, que en este caso es 2M, de manera que la columna que ingresa es x_1 con una utilidad de diez, se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} \dfrac{80}{1} & = & 80 & \longrightarrow & 1^{\circ} & semipivote \\ \dfrac{70}{1} & = & 70 & \longrightarrow & 1^{*} & pivote \\ \dfrac{100}{1} & = & 100 & \longrightarrow & 1^{\circ} & semipivote \end{cases}$$

A pesar de que la función objetivo es de maximización, el problema se empieza a resolver como un problema de minimización, por haber variables artificiales; sin embargo, al final del proceso en la fila $(Z_j - C_j)$ deben quedar valores positivos o ceros.

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 70 & \div & 1 & = & 70 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de m_1 :

$$\begin{cases} 80 & - & 70 \times 1 & = & 10 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 1 & = & 1 \\ -1 & - & (0 \times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (0) \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 1 & = & 1 \\ 0 & - & 1 \times 1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2:

$$\begin{cases} 100 & - & 70 \times 1 & = & 30 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 2 & - & 0 \times 1 & = & 2 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0) \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 1 & = & -1 \end{cases}$$

La tabla II esta en la siguiente pagina.

	C_j			10	8	0	0	M	M	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	m_1	m_3	
	M	m_1	10	0	1	-1	0	1	-1	
$\longleftarrow$	10	x_1	70	1^*	0	0	0	0	1	
	0	S_2	30	0	2	0	1	0	-1	
		Z_j	10M	0	M	-M	0M	M	-M	
		$Z_j - C_j$	—	0	M	-M	0	0	-2M	

TABLA III:

Se elimina el mayor valor positivo de la fila del criterio simplex, que en este caso es M, de manera que la columna que ingresa es x_2 con una utilidad de ocho dolares, se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \frac{10}{1} & = & 10 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\ \\ \frac{70}{0} & = & No & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ \\ \frac{30}{2} & = & 15 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \end{cases}$$

Las variables artificiales, m_1, m_3 ya no se les considera en el análisis; ya que, en la columna x_i no están.

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 10 & \div & 1 & = & 10 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 70 & - & 10 \times 0 & = & 70 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (-1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (0) \times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2:

$$\begin{cases} 30 & - & 10 \times 2 & = & 10 \\ 0 & - & 0 \times 2 & = & 0 \\ 2 & - & 1 \times 2 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2:

$$\begin{cases} 0 & - & -1 \times 2 & = & 2 \\ 1 & - & (0 \times 2) & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			10	8	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	
$\longrightarrow$	8	x_2	10	0	1	-1	0	
	10	x_1	70	1^*	0	0	0	
	0	S_2	10	0	0	2	1	
		Z_j	780	10	8	-8	0M	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	-8	0	

TABLA IV:

Se escoje el valor negativo de la fila del criterio simplex, que en este caso es -8; ya que, en esta fila deben constar de valores positivos o ceros. De manera que, la columna que ingresa es S_1 con una utilidad de cero dolares, se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{S_1} = \begin{cases} \frac{10}{-1} & = \quad No \quad \longrightarrow \quad -1^\circ \quad semipivote \\ \frac{70}{0} & = \quad No \quad \longrightarrow \quad 0^\circ \quad semipivote \\ \frac{10}{2} & = \quad 5 \quad \longrightarrow \quad 2^* \quad pivote \end{cases}$$

Coeficientes de S_1:

$$\begin{cases} 10 & \div & 2 & = & 5 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 2 & \div & 2 & = & 1 \\ 1 & \div & 2 & = & 0.5 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 70 & - & 5 \times 0 & = & 70 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (0.5) \times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 10 & - & 5 \times -1 & = & 15 \\ 0 & - & 0 \times -1 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times -1 & = & 1 \\ -1 & - & 1 \times -1 & = & 0 \\ 0 & - & (0.5 \times -1) & = & 0.5 \end{cases}$$

	C_j			10	8	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	
$\longrightarrow$	8	x_2	15	0	1	0	0.5	
	10	x_1	70	1^*	0	0	0	
	0	S_1	5	0	0	1	0.5	
		Z_j	820	10	8	0	4	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	4	

SOLUCIÓN ÓPTIMA:

Z (MÁX) = 820 dólares

x_1= 70 Número de muebles tipo A

x_2= 15 Número de muebles tipo B

S_1= 5

$S_2 = 0$

El valor $S_1 = 5$ significa que, se esta produciendo 5 mas de lo previsto, que tiene como limite mínimo 80.

Comprobación:

$x_1 + x_2 - S_1 = 80 \longrightarrow 70 + 15 - 5 = 80$

$x_1 + 2x_2 + S_2 = 100 \longrightarrow 70 + 2(15) + 0 = 100.$

4. Se producen tres productos a través de tres operaciones diferentes, los tiempos requeridos (en minutos) por unidad de cada producto son: Operación I, 1 minuto por producto de A; 2 minutos por producto de B y 1 minuto por producto C. Operación II, 3 minutos por producto de A y 2 minutos por producto de C. Operación III, 1 por producto de A y 4 minutos por producto de B, la capacidad diaria de las operaciones es 430, 460 y 420 minutos respectivamente. El producto A da una utilidad de 3 dólares, el producto B da una utilidad de 2 dólares y el de C, 5 dólares. Determinar la producción diaria óptima para los tres productos que maximice el beneficio?.

Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & C & \longrightarrow & Productos \\ x_1 & x_2 & x_3 & \longrightarrow & Tiempo\ de\ Operacion \\ 3 & 2 & 5 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 430 & Operacion\ I \\ 3x_1 + 2x_3 & \leq & 460 & Operacion\ II \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 420 & Operacion\ III \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Variables de holgura y Artificiales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & + S1 & & & = & 430 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 & & + S_2 & & = & 460 \\ x_1 + 4x_2 + 0x_3 & & & + S_3 & = & 420 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MIN) = 3X_1 + 2X_2 + 5x_3 + 0S_1 + 0S_2 + S_3$

TABLA I:

	C_j			3	2	5	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
	0	S_1	430	1	2	1	1	0	0	
$\longleftarrow$	0	S_2	460	3	0	2^*	0	1	0	
	0	S_3	420	1	4	0	0	0	1	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-3	-2	-5	0	0	0	

TABLA II:

Se escoje el menor de los valores negativos de la fila del criterio simplex, que en este caso es -5; ya que, en esta fila deben constar de valores positivos o ceros. De manera que, la columna que ingresa es x_3 con una utilidad de cinco dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_3} = \begin{cases} 430 \div 1 & = & 430 & \longrightarrow & 1^{\circ} & semipivote \\ 460 \div 2 & = & 230 & \longrightarrow & 2^{*} & pivote \\ 430 \div 0 & = & NO & \longrightarrow & 0^{\circ} & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_3:

$$\begin{cases} 460 & \div & 2 & = & 230 \\ 3 & \div & 2 & = & 1.5 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 2 & \div & 2 & = & 1 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 1 & \div & 2 & = & 0.5 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 430 & - & 230 \times 1 & = & 200 \\ 1 & - & 1.5 \times 1 & = & -0.5 \\ 2 & - & 0 \times 1 & = & 2 \\ 1 & - & (1 \times 1) & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0.5) \times 1 & = & -0.5 \\ 0 & - & (0) \times 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 420 & - & 230 \times 0 & = & 420 \\ 1 & - & 1.5 \times 0 & = & 1 \\ 4 & - & 0 \times 0 & = & 4 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0.5 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 0) & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			3	2	5	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
	0	S_1	200	-0.5	2	0	1	-0.5	0	
$\longleftarrow$	5	x_3	230	1.5	0	1	0	0.5	0	
	0	S_3	420	1	4	0	0	0	1	
		Z_j	1150	7.5	0	5	0	2.5	0	
		$Z_j - C_j$	—	4.5	-2	0	0	2.5	0	

TABLA III:

Se escoje el menor de los valores negativos de la fila del criterio simplex, que en este caso es -2; ya que, en esta fila deben constar de valores positivos o ceros. De manera que, la columna que ingresa es x_2 con una utilidad de dos dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \frac{200}{2} & = & 100 & \longrightarrow & 1^{*} & pivote \\ \frac{230}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^{\circ} & semipivote \\ \frac{420}{4} & = & 105 & \longrightarrow & 4^{\circ} & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 200 & \div & 2 & = & 100 \\ -0.5 & \div & 2 & = & -0.25 \\ 2 & \div & 2 & = & 1 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 1 & \div & 2 & = & 0.5 \\ -0.5 & \div & 2 & = & -0.25 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_3 :

$$\begin{cases} 230 & - & 100\times 0 & = & 230 \\ 1.5 & - & -0.25\times 0 & = & 1.5 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (0.5\times 0) & = & 0 \\ 0.5 & - & (-0.25)\times 0 & = & 0.5 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 420 & - & 100\times 4 & = & 20 \\ 1 & - & -0.25\times 4 & = & 2 \\ 4 & - & 1\times 4 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 4 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 0 & - & 0.5\times 4 & = & -2 \\ 0 & - & -0.25\times 4 & = & 1 \\ 1 & - & (0\times 4) & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			3	2	5	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
	2	x_2	100	-0.25	1	0	0.5	-0.25	0	
$\longleftarrow$	5	x_3	230	1.5	0	1	0	0.5	0	
	0	S_3	20	2	0	0	-2	1	1	
		Z_j	1350	7.0	2	5	1	2.0	0	
		$Z_j - C_j$	—	3.5	0	0	1	2.25	0	

Solución óptima:

Z(MÁX) = 1350 Dólares de utilidad

$x_1 = 0$ S1 = 0

$x_2 = 100$ S2 = 0

$x_3 = 230$ S3 = 20 minutos.

El valor de S_3 significa que existe 20 minutos de la Operación que no han sido utilizados.

5. Una empresa puede fabricar con determinada máquina trabajando 45 horas semanales tres productos diferentes A, B y C. El articulo A deja un beneficio neto de 4 dólares, B un beneficio de 12 dólares y C un beneficio de 3 dólares. La producción por hora de la maquina es para cada uno de Los tres productos de 50, 25 y 75 dólares respectivamente. Por último, las ventas posibles ascienden a 1.000 unidades de A, 500 unidades de B y 1.500 unidades. De C. ¿Cómo se deberá repartir la producción de manera que se maximice el beneficio de la empresa?

Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & C & \longrightarrow & Productos \\ x_1 & x_2 & x_3 & \longrightarrow & Número\ de\ Productos \\ 4 & 12 & 3 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 & \leq & 1000 & Venta\ Articulo\ A \\ x_2 & \leq & 500 & Venta\ Articulo\ B \\ x_3 & \leq & 1500 & Venta\ Articulo\ C \\ \frac{x_1}{50}+\frac{x_2}{25}+\frac{x_3}{75} & \leq & 45 & Tiempo \\ x_1,x_2,x_3 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Variables de holgura y Artificiales:

$$\begin{cases} x_1+0x_2+0x_3 & +S1 & & & & = & 1000 \\ 0x_1+x_2+0x_3 & & +S_2 & & & = & 500 \\ 0x_1+0x_2+x_3 & & & +S_3 & & = & 1500 \\ 3x_1+6x_2+2x_3 & & & & +S_4 & = & 6750 \end{cases}$$

En la cuarta restricción se obtuvo buscado el mínimo común denominador de los quebrados y realizando las operaciones necesarias (150).

Función Objetivo:

$Z(MIN) = 4X_1 + 12X_2 + 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 + S_3$

TABLA I:

	C_j			4	12	2	0	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	1000	1	0	0	1	0	0	0	
$\longleftarrow$	0	S_2	500	0	1	0	0	1	0	0	
	0	S_3	1500	0	0	1	0	0	1	0	
	0	S_3	6750	3	6	2	0	0	0	1	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-4	-12	-2	0	0	0	0	

TABLA II:

Se escoje el menor de los valores negativos de la fila del criterio simplex, que en este caso es -12; ya que, en esta fila deben constar de valores positivos o ceros. De manera que, la columna que ingresa es x_2 con una utilidad de doce dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \frac{1000}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ \frac{500}{1} & = & 500 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\ \frac{1500}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ \frac{6750}{6} & = & 1125 & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 500 & \div & 1 & = & 500 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 1000 & - & 500\times 0 & = & 1000 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 0) & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (1)\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 1500 & - & 500\times 0 & = & 1500 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 0) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_4:

$$\begin{cases} 6750 & - & 500\times 6 & = & 3750 \\ 3 & - & 0\times 6 & = & 3 \\ 6 & - & 1\times 6 & = & 0 \\ 2 & - & 0\times 6 & = & 2 \\ 0 & - & 0\times 6 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 6 & = & -6 \\ 0 & - & 0\times 6 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 6) & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			4	12	2	0	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	1000	1	0	0	1	0	0	0	
$\longleftarrow$	12	x_2	500	0	1	0	0	1	0	0	
	0	S_3	1500	0	0	1	0	0	1	0	
	0	S_4	3750	3	0	2	0	-6	0	1	
		Z_j	6000	0	12	0	0	12	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-4	0	-2	0	12	0	0	

TABLA III:

Se escoje el menor de los valores negativos de la fila del criterio simplex, que en este caso es -4; ya que, en esta fila deben constar de valores positivos o ceros. De manera que, la columna que ingresa es x_1 con una utilidad de cuatro dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} \dfrac{1000}{1} & = & 1000 & \longrightarrow & 1^\circ & pivote \\[2ex] \dfrac{500}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\[2ex] \dfrac{1000}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\[2ex] \dfrac{3750}{3} & = & 1250 & \longrightarrow & 3^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 1000 & \div & 1 & = & 1000 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 500 & - & 1000\times 0 & = & 500 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (1\times 0) & = & 0 \\ 1 & - & (0)\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 1500 & - & 1000\times 0 & = & 1500 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 0) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_4:

$$\begin{cases} 3750 & - & 1000\times 3 & = & 750 \\ 3 & - & 1\times 3 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 3 & = & 0 \\ 2 & - & 0\times 3 & = & 2 \\ 0 & - & 1\times 3 & = & -3 \\ -6 & - & 0\times 3 & = & -6 \\ 0 & - & 0\times 3 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 3) & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			4	12	2	0	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
$\longleftarrow$	4	x_1	1000	1	0	0	1	0	0	0	
	12	x_2	500	0	1	0	0	1	0	0	
	0	S_3	1500	0	0	1	0	0	1	0	
	0	S_4	750	0	0	2	-3	-6	0	1	
		Z_j	10000	4	12	0	4	12	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	-2	4	12	0	0	

TABLA IV:

Se escoje el menor de los valores negativos de la fila del criterio simplex, que en este caso es -2; ya que, en esta fila deben constar de valores positivos o ceros. De manera que, la columna que ingresa es x_3 con una utilidad de dos dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_3} = \begin{cases} \dfrac{1000}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ \dfrac{500}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ \dfrac{1500}{1} & = & 1500 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ \dfrac{750}{2} & = & 375 & \longrightarrow & 2^* & pivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_3:

$$\begin{cases} 750 & \div & 2 & = & 375 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 2 & \div & 2 & = & 1 \\ -3 & \div & 2 & = & -1.5 \\ -6 & \div & 2 & = & -3 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 1 & \div & 2 & = & 0.5 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 500 & - & 375\times 0 & = & 500 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (1\times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (-1.5\times 0) & = & 0 \\ 1 & - & (-3)\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0.5)\times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 1500 & - & 375\times 1 & = & 1125 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & -1.5\times 1 & = & 1.5 \\ 0 & - & -3\times 1 & = & 3 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0.5\times 1) & = & -0.5 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 1000 & - & 375\times 0 & = & 1000 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & -1.5\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & -3\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0.5\times 0) & = & 0 \end{cases}$$

	C_j			4	12	2	0	0	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
$\longleftarrow$	4	x_1	1000	1	0	0	1	0	0	0	
	12	x_2	500	0	1	0	0	1	0	0	
	0	S_3	1125	0	0	0	1.5	3	1	-0.5	
	2	x_3	375	0	0	1	-1.5	-3	0	0.5	
		Z_j	10750	4	12	2	1	6	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	1	6	0	0	

Solución optima:

Z(MÁX) = 10.750 Utilidad

A = x_1 = 1000

B = x_2 = 500

C = x_3 = 375

$S_1 = 0$

$S_2 = 0$

$S_3 = 1125$

$S_4 = 0$

El valor de $S_3 = 1125$ significa que, no se ha vendido lo previsto del producto C; es decir, se ha vendido 375 unidades de las 1.500 unidades.

Comprobación:

$x_1 + S_1 = 1000 \quad \longrightarrow \quad 1000 + 0 = 1000$

$$x_2 + S_2 = 500 \quad \longrightarrow \quad 500 + 0 = 500$$
$$x_3 + S_3 = 1500 \quad \longrightarrow \quad 375 + 1125 = 1500$$
$$\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{25} + \frac{x_3}{75} + S_4 = 45$$
$$\frac{1000}{50} + \frac{500}{25} + \frac{375}{75} + S_4 = 45 \quad \longrightarrow \quad 20 + 20 + 5 + 0 = 45.$$

6. Un comerciante de frutas transporta sus productos en un camión, que tiene una capacidad de 800 cajas de frutas. El comerciante debe transportar al menos 200 cajas de naranjas, que le rendirán 20 dólares por caja, al menos 100 de toronjas, que le rendirán una ganancia de 10 dólares por caja y cuando mucho 200 cajas de mandarinas, que le rendirán 30 dólares de ganancia por caja. ¿Cómo debe distribuirse el cargamento del camión para obtener la máxima ganancia?

Formulación del problema:

$$\begin{cases} Naranjas & Toronjas & Mandarinas & \longrightarrow & Frutas \\ x_1 & x_2 & x_3 & \longrightarrow & Número\ de\ Cajas \\ 20 & 10 & 30 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 800 & Capacidad\ Cajas \\ x_1 & \geq & 200 & Cajas\ de\ Naranjas \\ x_2 & \geq & 100 & Cajas\ de\ Toronjas \\ x_3 & \leq & 200 & Cajas\ de\ Mandarinas \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Variables de Holgura y Artificiales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + S1 & & & & & & = & 800 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 & - S_2 & & & +m_2 & & = & 200 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 & & - S_3 & & & +m_3 & = & 100 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 & & & + S_4 & & & = & 200 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$Z(MIN) = 20x_1 + 10x_2 + 30x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + Mm_2 + Mm_3$$

TABLA I:

	C_j			20	10	30	0	0	0	0	M	M	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	m_2	m_3	
	0	S_1	800	1	1	1	1	0	0	0	0	0	
$\longleftarrow$	M	m_2	200	1*	0	0	0	-1	0	0	1	0	
	M	m_3	100	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	
	0	S_4	200	0	0	1	0	0	0	1	0	0	
		Z_j	300M	M	M	0	0	-M	-M	0	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	M	M	0	0	-M	-M	0	0	0	

TABLA II:

Se escoje el mayor de los valores positivos de la fila del criterio simplex, que en este caso existe dos valores posibles , se escoje cualquiera de ellos, es 1; ya que, en esta fila deben constar de valores positivos o ceros. De manera que, la columna que ingresa es x_1 con una utilidad de veinte dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} \dfrac{800}{1} & = & 800 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\[2ex] \dfrac{200}{1} & = & 200 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\[2ex] \dfrac{100}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\[2ex] \dfrac{200}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 200 & \div & 1 & = & 200 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 800 & - & 200\times 1 & = & 600 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 1 & = & 1 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (-1)\times 1 & = & 1 \\ 0 & - & (0)\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (1)\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_3:

$$\begin{cases} 100 & - & 200\times 0 & = & 100 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & -1\times 0 & = & 0 \\ -1 & - & 0\times 0 & = & -1 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de S_4:

$$\begin{cases} 200 & - & 200\times 0 & = & 200 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 0) & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0) & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & -1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0) & = & 1 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \end{cases}$$

	C_j			20	10	30	0	0	0	0	M	M	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	m_2	m_3	
	0	S_1	600	0	1	1	1	1	0	0	0	0	
$\longleftarrow$	20	x_1	200	1^*	0	0	0	-1	0	0	1	0	
	M	m_3	100	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	
	0	S_4	200	0	0	1	0	0	0	1	0	0	
		Z_j	100M	0M	M	0M	0	0M	-M	0	0M	M	
		$Z_j - C_j$	—	0M	M	0M	0	0M	-M	0	-M	0	

TABLA III:

Se escoje el mayor de los valores positivos de la fila del criterio simplex, es M; ya que, en esta fila deben constar de valores positivos o ceros. De manera que, la columna que ingresa es x_2 con una utilidad de diez dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} 600 \div 1 &=& 600 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 200 \div 0 &=& No & \longrightarrow & 0^* & semipivote \\ 100 \div 1 &=& 100 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\ 200 \div 0 &=& No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 100 & \div & 1 & = & 100 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 600 & - & 100 \times 1 & = & 500 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 1 & - & (0) \times 1 & = & 1 \\ 0 & - & (-1) \times 1 & = & 1 \\ 0 & - & (0) \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (0) \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (1) \times 1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 200 & - & 100 \times 0 & = & 200 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ -1 & - & 0 \times 0 & = & -1 \\ 0 & - & -1 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_4:

$$\begin{cases} 200 & - & 100 \times 0 & = & 200 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 0) & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & -1 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 0) & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \end{cases}$$

	C_j			20	10	30	0	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	500	0	0	1	1	1	1	0	
	20	x_1	200	1*	0	0	0	-1	0	0	
⟵	10	x_2	100	0	1	0	0	0	-1	0	
	0	S_4	200	0	0	1	0	0	0	1	
		Z_j	5000	20	10	0	0	-20	-10	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	-30	0	-20	-10	0	

Como ya desaparecen los valores de M, del lado izquierdo de la table , se puede no considerar las dos ultimas columnas.

TABLA IV:

Ahora se escoje el menor de los valores negativos, de manera que, la columna que ingresa es x_3 con una utilidad de treinta dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \dfrac{500}{1} & = & 500 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ \dfrac{200}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^* & semipivote \\ \dfrac{100}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^* & semipivote \\ \dfrac{200}{1} & = & 200 & \longrightarrow & 1^* & pivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_3:

$$\begin{cases} 200 & \div & 1 & = & 200 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 500 & - & 200\times 1 & = & 300 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 1 & - & (1\times 1) & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \\ 1 & - & (0)\times 1 & = & 1 \\ 1 & - & (0)\times 1 & = & 1 \\ 0 & - & (1)\times 1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 200 & - & 200\times 0 & = & 200 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ -1 & - & 0\times 0 & = & -1 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 100 & - & 200\times 0 & = & 100 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (1\times 0) & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 0 & = & 0 \\ -1 & - & 0\times 0 & = & -1 \\ 0 & - & (1\times 0) & = & 0 \end{cases}$$

	C_j			20	10	30	0	0	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_1	300	0	0	0	1	1	1	-1	
	20	x_1	200	1*	0	0	0	-1	0	0	
$\longleftarrow$	10	x_2	100	0	1	0	0	0	-1	0	
	30	x_3	200	0	0	1	0	0	0	1	
		Z_j	11000	20	10	30	0	-20	-10	30	
		$Z_j - C_j$	—	0	0		0	-20	-10	30	

TABLA V:

Ahora se escoje el menor de los valores negativos, de manera que, la columna que ingresa es S_2 con una utilidad de cero dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{S_2} = \begin{cases} 300 \div 1 &= 300 &\longrightarrow 1^* & pivote \\ 200 \div -1 &= No &\longrightarrow -1^* & semipivote \\ 100 \div 0 &= No &\longrightarrow 0^* & semipivote \\ 200 \div 0 &= No &\longrightarrow 0^* & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de S_2:

$$\begin{cases} 300 & \div & 1 & = & 300 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_3 :

$$\begin{cases} 200 & - & 300 \times 0 & = & 200 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (1) \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (1) \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (-1) \times 0 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 200 & - & 300 \times -1 & = & 500 \\ 1 & - & 0 \times -1 & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times -1 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times -1 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times -1 & = & 1 \\ -1 & - & 1 \times -1 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times -1 & = & 1 \\ 0 & - & -1 \times -1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 100 & - & 300 \times 0 & = & 100 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (0 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ -1 & - & 1 \times 0 & = & -1 \\ 0 & - & (-1 \times 0) & = & 0 \end{cases}$$

	C_j			20	10	30	0	0	0	0	Tabla V
		x_i	b_n	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
	0	S_2	300	0	0	0	1	1	1	-1	
	20	x_1	500	1^*	0	0	1	0	1	-1	
$\longleftarrow$	10	x_2	100	0	1	0	0	0	-1	0	
	30	x_3	200	0	0	1	0	0	0	1	
		Z_j	17000	20	10	30	20	0	10	10	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	20	0	10	10	

Solución óptima:

Z(MÁX) = 17.000 dólares

$x_1 = 500$ Cajas de Naranjas

$x_2 = 100$ Cajas de Toronjas

$x_3 = 200$ Cajas de Mandarinas

$S_2 = 300$.

El valor $S_2 = 300$ significa que, el camión esta llevado 300 cajas de naranjas mas de lo previsto.

7. Una empresa desea preparar dos productos A y B, se dispone de materia prima para llenar 60 botellas de los dos productos por lo menos. Toma una hora llenar 10 botellas del producto A, y tres horas llenar 10 botellas del producto B, se dispone de 12 horas cuando mucho. Se estima que la demanda en el mercado es de 50 botellas del producto A cuando mucho. La capacidad de la empresa le permite llenar 80 botellas de A o 55 botellas de B. Cada botella de A deja una utilidad de 10 y 6 cada botella de B. ¿Cuantas botellas de A y B se deben llenar para que la empresa alcance la máxima utilidad?

   a) Resuelva gráficamente,

   b) Por el método simplex

   a) Solución gráfica:

   Formulación del problema:

$$\begin{cases} A & B & \longrightarrow & Productos \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número\ de\ botellas \\ 10 & 6 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

   Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq & 60 & Cantidad\ de\ Botellas \\ \dfrac{x_1}{10} + \dfrac{3x_2}{10} & \leq & 12 & Tiempo\ de\ LLenado \\ \dfrac{x_1}{80} + \dfrac{x_2}{55} & \leq & 1 & Capacidad\ de\ Empresa \\ x_1 & \leq & 50 & Demanda\ de\ A \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

   Abstracción:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 60 \\ x_1 + 3x_2 & = & 120 \\ 11x_1 + 16x_2 & = & 880 \\ x_1 & = & 50 \end{cases}$$

   Función Objetivo:

   $Z(MIN) = 10x_1 + 6x_2$

   Se gráfica cada una de las ecuaciones presentadas en abstracción, se encuentra cada uno de los puntos de intersección, resolviendo los respectivos sistemas entre cada par de funciones:

   Punto C (Ecuaciones 1 y 2):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 60 \\ x_1 + 3x_2 & = & 120 \end{cases} \longrightarrow \text{C(30,30)}$$

   Punto D (Ecuaciones 2 y 4):

$$\begin{cases} 11x_1 + 16x_2 & = & 880 \\ x_1 + 3x_2 & = & 120 \end{cases} \longrightarrow \text{D(42,26)}$$

   Punto E (Ecuaciones 3 y 4):

$$\begin{cases} 11x_1 + 16x_2 & = & 880 \\ x_1 & = & 50 \end{cases} \longrightarrow \text{E(50,21)}$$

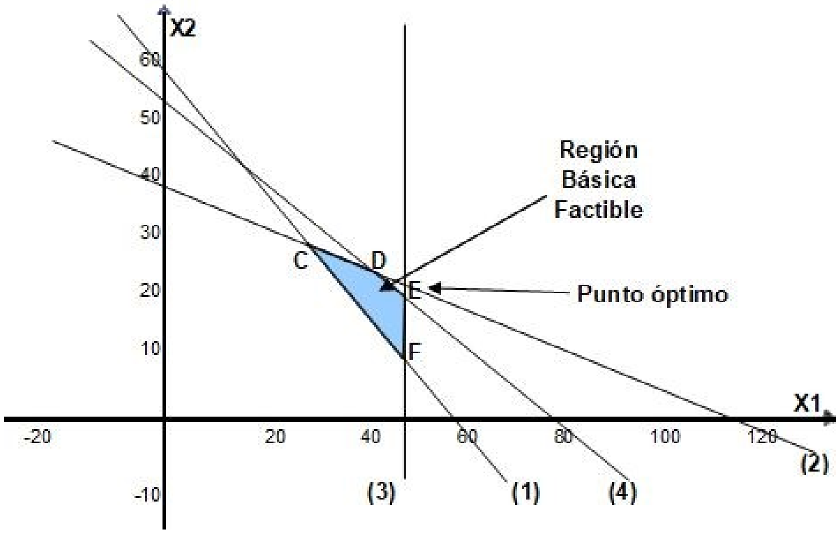

Figura 2.28 Solución Gráfica

Punto F (Ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 60 \\ x_1 &= 50 \end{cases} \longrightarrow \text{F(50,10)}$$

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 10x_1 + 6x_2$

$C(30,30) \longrightarrow Z = 10(30) + 6(30) = 480$

$D(42,26) \longrightarrow Z = 10(42) + 6(26) = 576$

$E(50,21) \longrightarrow Z = 10(50) + 6(21) = 626$ Óptimo

$F(50,10) \longrightarrow Z = 10(50) + 6(10) = 560$

Z = (MAX) = 626 Dólares

$x_1 = 50$ Botellas de A

$x_2 = 21$ Botellas de B.

Para que la empresa obtenga una utilidad de optima de 626 dólares, debe llenar 50 botellas de A y 21 botellas de B.

b) Método Simplex:

Formulación del Problema:

$$\begin{cases} A & B & \longrightarrow & Productos \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número\ de\ Botellas \\ 10 & 6 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq & 60 & Cantidad\ de\ Botellas \\ \dfrac{x_1}{10} + \dfrac{3x_2}{10} & \leq & 12 & Tiempo\ de\ LLenado \\ \dfrac{x_1}{80} + \dfrac{x_2}{55} & \leq & 1 & Capacidad\ de\ Empresa \\ x_1 & \leq & 50 & Demanda\ de\ A \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Variables de Holgura y Artificiales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & - S1 & & & & +m_1 & = & 60 \\ x_1 + 3x_2 & & + S_2 & & & & = & 120 \\ 11x_1 + 16x_2 & & & + S_3 & & & = & 880 \\ x_1 & & & & + S_4 & & = & 50 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MIN) = 10x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + Mm_1$

TABLA I:

	C_j			10	6	0	0	0	0	M	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	m_1	
	M	m_1	60	1	1	-1	0	0	0	1	
	0	S_2	120	1*	3	0	1	0	0	0	
	0	S_3	880	11	16	0	0	1	0	0	
⟵	0	S_4	50	1	0	0	0	0	1	0	
		Z_j	60M	M	M	-M	0M	0M	0M	M	
		$Z_j - C_j$	—	M	M	-M	0	0	0	0	

TABLA II:

Se escoje el mayor de los valores positivos, ya que el ejercicio consta de los dos signos de programación lineal. Como hay varios valores se escoje cualquiera de ellos de manera que, la columna que ingresa es x_1 con una utilidad de diez dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_1} = \begin{cases} 60 \div 1 & = & 60 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 120 \div 1 & = & 120 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 880 \div 11 & = & 88 & \longrightarrow & 11^\circ & semipivote \\ 50 \div 1 & = & 50 & \longrightarrow & 1^* & pivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 50 & \div & 1 & = & 50 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_1 :

$$\begin{cases} 60 & - & 50 \times 1 & = & 10 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 1 & = & 1 \\ -1 & - & (0 \times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (0 \times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (0) \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (1) \times 1 & = & -1 \\ 1 & - & (0) \times 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2:

$$\begin{cases} 120 & - & 50 \times 1 & = & 70 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 3 & - & 0 \times 1 & = & 3 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 1 & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 1 & = & -1 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 880 & - & 50 \times 11 & = & 330 \\ 11 & - & 1 \times 11 & = & 0 \\ 16 & - & (0 \times 11) & = & 16 \\ 0 & - & (0 \times 11) & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 11 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 11 & = & 1 \\ 0 & - & 1 \times 11 & = & -11 \\ 0 & - & (0 \times 11) & = & 0 \end{cases}$$

la tabla II en la siguiente pagina.

	C_j			10	6	0	0	0	0	M	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	m_1	
$\longleftarrow$	M	m_1	10	0	1	-1	0	0	-1	1	
	0	S_2	70	0	3	0	1	0	-1	0	
	0	S_3	330	0	16	0	0	1	-11	0	
$\longrightarrow$	10	x_1	50	1	0	0	0	0	1	0	
		Z_j	10M	10	M	-M	0M	0M	-M	M	
		$Z_j - C_j$	—	0	M	-M	0	0	-M	0	

TABLA III:

Se escoje el mayor de los valores positivos, como hay varios valores se escoje cualquiera de ellos de manera que, la columna que ingresa es x_2 con una utilidad de seis dolares, ademas la columna de m_1 ya no se considera Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} 10 \div 1 & = & 10 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\ 70 \div 3 & = & 23.3 & \longrightarrow & 3^\circ & semipivote \\ 330 \div 16 & = & 20.6 & \longrightarrow & 16^\circ & semipivote \\ 50 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 10 & \div & 1 & = & 10 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 70 & - & 10 \times 3 & = & 40 \\ 0 & - & 0 \times 3 & = & 0 \\ 3 & - & 1 \times 3 & = & 0 \\ 0 & - & (-1 \times 3) & = & 3 \\ 1 & - & (0 \times 3) & = & 1 \\ 0 & - & (0) \times 3 & = & 0 \\ -1 & - & (-1) \times 3 & = & 2 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 330 & - & 10 \times 16 & = & 170 \\ 0 & - & 0 \times 16 & = & 0 \\ 16 & - & 1 \times 16 & = & 0 \\ 0 & - & -1 \times 16 & = & 16 \\ 0 & - & 0 \times 16 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 16 & = & 1 \\ -11 & - & -1 \times 16 & = & 5 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 50 & - & 10 \times 0 & = & 50 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (-1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & -1 \times 0 & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			10	6	0	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
$\longrightarrow$	6	x_2	10	0	1	-1	0	0	-1	
	0	S_2	40	0	0	3	1	0	2	
$\longleftarrow$	0	S_3	170	0	0	16	0	1	5	
	10	x_1	50	1	0	0	0	0	1	
		Z_j	560	10	6	-6	0	0	4	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	-6	0	0	4	

TABLA IV:

Se escoje el menor de los valores negativos, de manera que, la columna que ingresa es S_1 con una utilidad de cero dolares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{S_1} = \begin{cases} 10 \div -1 & = & No & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 40 \div 3 & = & 13.3 & \longrightarrow & 3^\circ & semipivote \\ 170 \div 16 & = & 10.6 & \longrightarrow & 16^* & pivote \\ 50 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de S_1:

$$\begin{cases} 170 & \div & 16 & = & 10.6 \\ 0 & \div & 16 & = & 0 \\ 0 & \div & 16 & = & 0 \\ 16 & \div & 16 & = & 1 \\ 0 & \div & 16 & = & 0 \\ 1 & \div & 16 & = & 0.06 \\ 5 & \div & 16 & = & 0.3 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 40 & - & 10.6 \times 3 & = & 8.2 \\ 0 & - & 0 \times 3 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 3 & = & 0 \\ 3 & - & (1 \times 3) & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 3) & = & 1 \\ 0 & - & (0.06) \times 3 & = & -0.18 \\ 2 & - & (0.3) \times 3 & = & 1.1 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 10 & - & 10.6 \times -1 & = & 20.6 \\ 0 & - & 0 \times -1 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times -1 & = & 1 \\ -1 & - & 1 \times -1 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times -1 & = & 0 \\ 0 & - & 0.06 \times -1 & = & 0.06 \\ -1 & - & 0.3 \times -1 & = & -0.7 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 50 & - & 10.6 \times 0 & = & 50 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (0 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0.06 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0.3 \times 0 & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			10	6	0	0	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
$\longrightarrow$	6	x_2	20.6	0	1	0	0	0.06	-0.7	
	0	S_2	8.2	0	0	0	1	-0.18	1.1	
$\longleftarrow$	0	S_1	10.6	0	0	1	0	0.06	0.3	
	10	x_1	50	1	0	0	0	0	1	
		Z_j	623.6	10	6	0	0	0.48	5.8	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	0	0.48	5.8	

Solución óptima: Por el método simplex:

Z(MÁX) = 623.6 Dólares

$x_1 = 50$ Botellas de A

$x_2 = 20.6$ Botellas de B

$S_1 = 10.6$

$S_2 = 8.2$

El valor $S_1 = 10.6$ nos indica que se han llenado 10.6 botellas mas de lo previsto (60)

El valor $S_2 = 8.2$ significa que no se han utilizado 8.2 horas de un total de 12.

Comprobación:

$$x_1 + 3x_2 + S_2 = 120 \longrightarrow 50 + 3(20.6) + 8.2 = 120 \longrightarrow 120 = 120$$

8. La Compañía ECASA fábrica dos modelos de refrigeradoras: tipo normal y de doble puerta. El mercado puede absorber toda la producción a precios competitivos de 200.000 dólares y 260.000 dólares respectivamente. Los costos de los elementos unitarios se estiman en 170.000 dólares y 200.000 dólares respectivamente. Los insumos de los elementos unitarios se encuentran en cantidad ilimitada y a un costo constante, excepto los compresores.
Los dos tipos de refrigeradoras llevan el mismo compresor y la compañía tiene un cupo limitado de 100 compresores mensualmente. El sistema de doble puerta requiere de una línea especial de montaje y de pintura de unas 5 horas para cada refrigeradora, de las 350 horas disponibles por cada mes. Adicionalmente ambos tipos pasan por una línea común de montaje y pintura en la que el tipo normal consume el doble de tiempo que el de doble puerta, la capacidad de esta línea común permite completar mensualmente hasta 80 refrigeradoras de tipo normal.
Hallar la producción optima que permita obtener la máxima utilidad?

   a) Por el método gráfico

   b) Por el método simplex

   c) Si la capacidad de la línea común de pintura y montaje se incrementa en un 20 por ciento. ¿Aumentaría o disminuiría la producción de refrigeradoras normales?

   d) Asuma que la demanda creciente del mercado permite incrementar en 20 dólares el precio de venta de las refrigeradoras de doble puerta. Tendría eso algún efecto en la producción.

   a) Método gráfico:

Formulación del problema:

$$\begin{cases} Normal & Doble\ puerta & \longrightarrow & Refrigeradoras \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número\ de\ refrigeradoras \\ 30.000 & 60.000 & \longrightarrow & Utilidad = Precio\ de\ venta - Costos \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 100 & Compresores \\ 5x_2 & \leq & 350 & Linea\ especial \\ x_1 + 0.5x_2 & \leq & 80 & Linea\ comun \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 100 \\ 5x_2 & = & 350 \\ x_1 + 0.5x_2 & = & 80 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$Z(MIN) = 30x_1 + 60x_2 \quad (En\ miles)$$

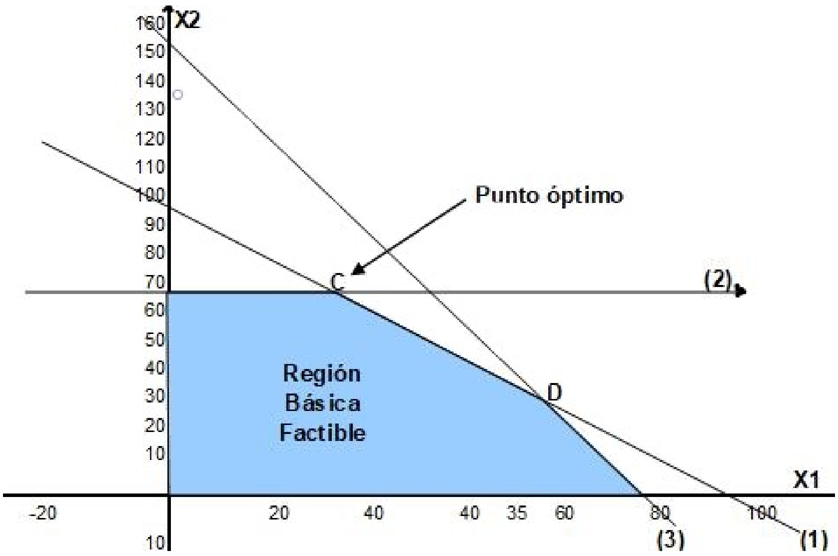

Figura 2.2 Solución Gráfica

Punto C (Ecuaciones 1 y 2):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 5x_2 = 350 \end{cases} \longrightarrow \text{C(30,70)}$$

Punto D (Ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 + 0.5x_2 = 80 \end{cases} \longrightarrow \text{D(40,60)}$$

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 30.000x_1 + 60.000x_2$

$C(30,70) \longrightarrow Z = 30.000(30) + 60.000(70) = 5.100.000$ Punto óptimo

$D(40,60) \longrightarrow Z = 30.000(40) + 60.000(60) = 4.800.000$

Z = (MÁX) = 5.100.000 Dólares

$x_1 = 30$ Refrigeradoras tipo normal

$x_2 = 70$ Refrigeradoras doble puerta

b) Método Simplex:

Formulación del problema:

$$\begin{cases} Normal & Doble\ \ puerta & \longrightarrow & Refrigeradoras \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número\ \ de\ \ refrigeradoras \\ 30.000 & 60.000 & \longrightarrow & Utilidad = Precio\ \ de\ \ venta - Costos \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 & Compresores \\ 5x_2 \leq 350 & Linea\ \ especial \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 80 & Linea\ \ comun \\ x_1, x_2 \geq 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Variables de Holgura:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 = 100 \\ 5x_2 + S_2 = 350 \\ x_1 + 0.5x_2 + S_3 = 80 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MIN) = 30x_1 + 60x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \quad (En\ \ miles)$

TABLA I:

	C_j			30	60	0	0	0	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
	0	S_1	100	1	1	1	0	0	
$\longleftarrow$	0	S_2	350	0	5	0	1	0	
	0	S_3	80	0.5	0	0	0	1	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-30	-60	0	0		

TABLA II:

Se escoje el menor de los valores negativos, de manera que, la columna que ingresa es x_2 con una utilidad de sesenta dólares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \dfrac{100}{1} & = & 100 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\[2ex] \dfrac{350}{5} & = & 70 & \longrightarrow & 5^* & pivote \\[2ex] \dfrac{80}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 350 & \div & 5 & = & 70 \\ 0 & \div & 5 & = & 0 \\ 5 & \div & 5 & = & 1 \\ 0 & \div & 5 & = & 0 \\ 1 & \div & 5 & = & 0.2 \\ 0 & \div & 5 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 100 & - & 70 \times 1 & = & 30 \\ 1 & - & 0 \times 1 & = & 1 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0.2 \times 1) & = & -0.2 \\ 0 & - & (0) \times 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 80 & - & 70 \times 0 & = & 80 \\ 0.5 & - & 0 \times 0 & = & 0.5 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0.2 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			30	60	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
	0	S_1	30	1	0	1	-0.2	0	
$\longrightarrow$	60	x_2	70	0	1	0	0.2	0	
	0	S_3	80	0.5	0	0	0	1	
		Z_j	4200	0	60	0	12	0	
		$Z_j - C_j$	—	-30	0	0	12	0	

TABLA III:

Se escoje el menor de los valores negativos, de manera que, la columna que ingresa es x_1 con una utilidad de treinta dólares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} \dfrac{30}{1} & = & 30 & \longrightarrow & 1^* & \textit{pivote} \\[2ex] \dfrac{70}{0} & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & \textit{semipivote} \\[2ex] \dfrac{80}{0.5} & = & 160 & \longrightarrow & 0.5^\circ & \textit{semipivote} \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 30 & \div & 1 & = & 30 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ -0.2 & \div & 1 & = & -0.2 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 70 & - & 30 \times 0 & = & 70 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 0.2 & - & (-0.2 \times 0) & = & 0.2 \\ 0 & - & (0) \times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3:

$$\begin{cases} 80 & - & 30 \times 0.5 & = & 65 \\ 0.5 & - & 1 \times 0.5 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0.5 & = & 0 \\ 0 & - & 1 \times 0.5 & = & -0.5 \\ 0 & - & -0.2 \times 0.5 & = & 0.1 \\ 1 & - & 0 \times 0.5 & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			30	60	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
$\longleftarrow$	30	x_1	30	1	0	1	-0.2	0	
$\longrightarrow$	60	x_2	70	0	1	0	0.2	0	
	0	S_3	65	0	0	-0.5	0.1	1	
		Z_j	5100	30	60	30	6	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	30	6	0	

Solución Óptima por el método simplex:

Z(MÁX) = 5.100.000 Dólares

$x_1 = 30$ Refrigeradoras normales

$x_2 = 70$ Refrigeradoras tipo doble puerta

$S_1 = 30$ No se han utilizado 30 compresores

$S_2 = 6$ horas no utilizadas en la linea especial

c) El aumento de la capacidad de la línea común, no afectara en la producción. Un incremento del 20 por ciento solo aumentaría el exceso de capacidad, pero no su utilidad.

d) Al incrementarse el precio de las refrigeradoras de doble puerta en 20 dólares, la producción hallada sigue siendo la ÓPTIMA.

9. La Empresa SONY del Ecuador Cia. Ltda. Ensambla televisores a color y en blanco y negro. Puede importar mensualmente hasta 500 tubos pantalla de los cuales hasta la mitad de ellos puede ser a color. La capacidad del taller y de la mano de obra le permite ensamblar mensualmente hasta 600 televisores en blanco-negro. El ensamble de un televisor a color requiere un 50 por ciento, más de tiempo que el de un televisor en blanco-negro. No existen a la fecha limitaciones de mercado sobre los televisores a color, sin embargo las ventas de televisores en blanco-negro se estima en 150 mensuales. Contratos previamente establecidos con algunos hoteles requieren la entrega de 300 televisores en blanco-negro en los próximos DOS meses. La utilidad estimada es de 150 dólares por cada televisor a color y de 60 dólares por cada televisor blanco-negro.

   a) Resuelva por el método gráfico y establezca cuantos televisores de cada tipo debe producir en los próximos dos meses y cual es la utilidad esperada?

   b) Resuelva por el método simplex

   c) ¿Cuáles son los recursos que se agotan y cuales sobran?

   d) Si puede obtener en un plazo de 3 meses un incremento de la cuota de importación. Solicitaría Ud. Aumentar el cupo global o mantener este y aumentar el de los televisores a color. ¿Por que?.

   e) Si el incrementar la cuota mensual de importación, requiere el pago adicional cada mes. Hasta que cantidad máxima debiera pagarse por incrementar esa cuota.

   a) Método gráfico:

   Formulación del Problema:

$$\left\{\begin{array}{llll} Color & Blanco\ Negro & \longrightarrow & Televisores \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número\ de\ Televisores \\ 150 & 60 & \longrightarrow & Utilidad \end{array}\right.$$

   Restricciones:

$$\left\{\begin{array}{rcll} x_1 + x_2 & \leq & 500 & Tubos\ de\ pantalla\ importados \\ x_1 & \leq & 250 & Tubo\ de\ pantalla\ a\ color \\ 1.5x_1 + x_2 & \leq & 600 & Capacidad\ de\ ensamblaje \\ x_2 & \leq & 300 & Contratos\ de\ pantalla\ a\ blanco-negro \\ x_2 & \geq & 150 & Demanda\ de\ pantalla\ a\ blanco-negro \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{array}\right.$$

   Las restricciones tienen que duplicarse, porque las preguntas están hechas para dos meses.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 1000 & Tubos\ de\ pantalla\ importados \\ x_1 & \leq & 500 & Tubo\ de\ pantalla\ a\ color \\ 1.5x_1 + x_2 & \leq & 1200 & Capacidad\ de\ ensamblaje \\ x_2 & \leq & 600 & Contratos\ de\ pantalla\ a\ blanco-negro \\ x_2 & \geq & 300 & Demanda\ de\ pantalla\ a\ blanco-negro \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Abstracción:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1000 & Tubos\ de\ pantalla\ importados \\ x_1 & = & 500 & Tubo\ de\ pantalla\ a\ color \\ 1.5x_1 + x_2 & = & 1200 & Capacidad\ de\ ensamblaje \\ x_2 & = & 600 & Contratos\ de\ pantalla\ a\ blanco-negro \\ x_2 & = & 300 & Demanda\ de\ pantalla\ a\ blanco-negro \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MIN) = 150x_1 + 60x_2$

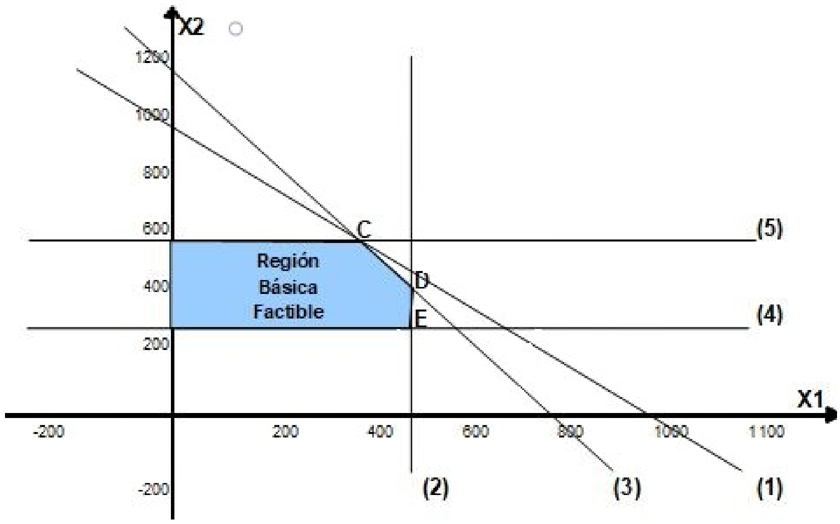

Figura 2.30 Solución Gráfica

Punto C (Ecuaciones 1 y 3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1000 \\ 1.5x_1 + x_2 & = & 1200 \end{cases} \longrightarrow \text{C(400,600)}$$

Punto D (Ecuaciones 3 y 2):

$$\begin{cases} 1.5x_1 + x_2 & = & 1200 \\ x_1 & = & 500 \end{cases} \longrightarrow \text{D(500,450)}$$

Punto E (Ecuaciones 2 y 4):

$$\begin{cases} x_2 & = & 300 \\ x_1 & = & 500 \end{cases} \longrightarrow \text{D(500,300)}$$

$P(x_1, x_2) \longrightarrow Z(MAX) = 150x_1 + 60x_2$

$C(400, 600) \longrightarrow$Z = 150(400) + 60(600) = 96.000

$D(500, 450) \longrightarrow Z = 150(500) + 60(450) = 102.000$ Punto óptimo

$E(500, 300) \longrightarrow Z = 150(500) + 60(300) = 93.000$

Z = (MÁX) = 102.000 dólares

x_1 = 500 Televisores a color

$x_2 = 450$ Televisores blanco-negro

b) Método simplex:

Formulación del problema:

$$\begin{cases} Color & Blanco\ Negro & \longrightarrow & Televisores \\ x_1 & x_2 & \longrightarrow & Número\ de\ televisores \\ 150 & 60 & \longrightarrow & Utilidad \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 1000 & Tubos\ de\ pantallas\ importados \\ x_1 & \leq & 500 & Tubos\ de\ pantalla\ a\ color \\ 1.5x_1 + x_2 & \leq & 1200 & Capasidad\ de\ ensamblaje \\ x_2 & \geq & 300 & Demanda\ de\ pantalla\ blanco-negro \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_2 & \leq & 600 & Contratos\ de\ pantalla\ a\ blanco-negro \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & No-negatividad \end{cases}$$

Variables de Holgura:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 & = & 1000 \\ x_1 + S_2 & = & 500 \\ 1.5x_1 + x_2 + S_3 & = & 1200 \\ x_2 - S_4 + m_4 & = & 300 \\ x_2 + S_5 & = & 600 \end{cases}$$

Función Objetivo:

$Z(MIN) = 150x_1 + 60x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 + Mm_1$

TABLA I:

	C_j			150	60	0	0	0	0	0	M	Tabla I
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	m_4	
	0	S_1	1000	1	1	1	0	0	0	0	0	
	0	S_2	500	1	0	0	1	0	0	0	0	
	0	S_3	1200	1.5	1	0	0	1	0	0	0	
$\longleftarrow$	M	m_4	300	0	1*	0	0	0	-1	0	1	
	0	S_5	600	0	1	0	0	0	0	1	0	
		Z_j	300M	0	M	0	0	0	-M	0	M	
		$Z_j - C_j$	—	0	M	0	0	0	-M	0	0	

TABLA II:

Se escoje el mayor de los valores positivos, de manera que, la columna que ingresa es x_2 con una utilidad de sesenta dólares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} 1000 \div 1 & = & 1000 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 500 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ 1200 \div 1 & = & 1200 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 300 \div 1 & = & 300 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\ 600 \div 1 & = & 600 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_2:

$$\begin{cases} 300 & \div & 1 & = & 300 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 1000 & - & 300\times 1 & = & 700 \\ 1 & - & 0\times 1 & = & 1 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (-1\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_2 :

$$\begin{cases} 500 & - & 300\times 0 & = & 500 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 1\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 0) & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (-1\times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 0) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3 :

$$\begin{cases} 1200 & - & 300\times 1 & = & 900 \\ 1.5 & - & 0\times 1 & = & 1.5 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ 1 & - & (0)\times 1 & = & 1 \\ 0 & - & (-1\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_5 :

$$\begin{cases} 600 & - & 300\times 1 & = & 300 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (-1\times 1) & = & 1 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			150	60	0	0	0	0	0	Tabla II
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	700	1	0	1	0	0	1	0	
$\longleftarrow$	0	S_2	500	1^*	0	0	1	0	0	0	
	0	S_3	900	1.5	0	0	0	1	1	0	
$\longrightarrow$	60	x_2	300	0	1	0	0	0	-1	0	
	0	S_5	300	0	0	0	0	0	1	1	
		Z_j	18000	0	60	0	0	0	-60	0	
		$Z_j - C_j$	—	-150	0	0	0	0	-60	0	

TABLA III:

Se escoje el menor de los valores negativos, de manera que, la columna que ingresa es x_1 con una utilidad de ciento cincuenta dólares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} 700 \div 1 & = & 700 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 500 \div 1 & = & 500 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\ 1200 \div 1.5 & = & 800 & \longrightarrow & 1.5^\circ & semipivote \\ 300 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \\ 300 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de x_1:

$$\begin{cases} 500 & \div & 1 & = & 500 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 700 & - & 500 \times 1 & = & 200 \\ 1 & - & 1 \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (1 \times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (0) \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0 \times 1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 300 & - & 500 \times 0 & = & 300 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (0 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (0) \times 0 & = & 0 \\ -1 & - & (0 \times 0) & = & -1 \\ 0 & - & (0 \times 0) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_3 :

$$\begin{cases} 900 & - & 500 \times 1.5 & = & 150 \\ 1.5 & - & 1 \times 1.5 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 1.5 & = & 0 \\ 0 & - & (0 \times 1.5) & = & 0 \\ 0 & - & (1 \times 1.5) & = & -1.5 \\ 1 & - & (0) \times 1.5 & = & 1 \\ 1 & - & (0 \times 1.5) & = & 1 \\ 0 & - & (0 \times 1.5) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_5 :

$$\begin{cases} 300 & - & 500 \times 0 & = & 300 \\ 0 & - & 1 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (0) \times 0 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 0) & = & 1 \\ 1 & - & (0 \times 0) & = & 1 \end{cases}$$

	C_j			150	60	0	0	0	0	0	Tabla III
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	200	0	0	1	-1	0	1	0	
	150	x_1	500	1*	0	0	1	0	0	0	
$\longleftarrow$	0	S_3	150	0	0	0	-1.5	1	1	0	
$\longrightarrow$	60	x_2	300	0	1	0	0	0	-1	0	
	0	S_5	300	0	0	0	0	0	1	1	
		Z_j	93000	150	60	0	150	0	-60	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	150	0	-60	0	

TABLA IV:

Se escoje el menor de los valores negativos, de manera que, la columna que ingresa es S_4 con una utilidad de cero dólares. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{x_2} = \begin{cases} 200 \div 1 & = & 200 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 500 \div 0 & = & 500 & \longrightarrow & 0^* & semipivote \\ 150 \div 1 & = & 150 & \longrightarrow & 1^* & pivote \\ 300 \div -1 & = & No & \longrightarrow & -1^\circ & semipivote \\ 300 \div 1 & = & 300 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de S_4:

$$\begin{cases} 150 & \div & 1 & = & 150 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1.5 & \div & 1 & = & -1.5 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 200 & - & 150 \times 1 & = & 50 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ -1 & - & (-1.5 \times 1) & = & 0.5 \\ 0 & - & (1) \times 1 & = & -1 \\ 1 & - & (1 \times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (0 \times 1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_2 :

$$\begin{cases} 300 & - & 150 \times -1 & = & 450 \\ 0 & - & 0 \times -1 & = & 0 \\ 1 & - & 0 \times -1 & = & 1 \\ 0 & - & (0 \times -1) & = & 0 \\ 0 & - & (-1.5 \times -1) & = & -1.5 \\ 0 & - & (1) \times -1 & = & 1 \\ -1 & - & (1 \times -1) & = & 0 \\ 0 & - & (0 \times -1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de x_1 :

$$\begin{cases} 500 & - & 150 \times 0 & = & 500 \\ 1 & - & 0 \times 0 & = & 1 \\ 0 & - & 0 \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (0 \times 0) & = & 0 \\ 1 & - & (-1.5 \times 0) & = & 1 \\ 0 & - & (1) \times 0 & = & 0 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (0 \times 0) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de S_5 :

$$\begin{cases} 300 & - & 150 \times 1 & = & 150 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0 \times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (0 \times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (-1.5 \times 1) & = & 1.5 \\ 0 & - & (1) \times 1 & = & -1 \\ 1 & - & (1 \times 1) & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \end{cases}$$

Solución óptima por el método simplex:

Z(MÁX) = 102.000 Dólares

x_1 = 500 Televisores a Color

x_2 = 450 Televisores Blanco- Negro

S_1 = 50 Existe 50 tubos de pantalla no utilizadas.

c) Si $S_2 = 0$ Se agota el cupo de importación de los tubos de color.

$S_3 = 0$ Se agota la capacidad de ensamblaje

$S_1 = 50$ Existe en stock 50 tubos para televisores blanco-negro

	C_j			150	60	0	0	0	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	0	S_1	50	0	0	1	0.5	-1	0	0	
$\longleftarrow$	60	x_2	450	0	1	0	-1.5	1	0	0	
	150	x_1	500	1	0	0	0	0	0	0	
$\longrightarrow$	0	S_4	150	0	0	0	-1.5	1	1	0	
	0	S_5	150	0	0	0	1.5	-1	0	1	
		Z_j	102000	150	60	0	90	0	60	0	
		$Z_j - C_j$	—	0	0	0	90	0	60	0	

$S_4 = 150$ Hay un exceso de 150 televisores blanco-negro en el mercado.

$S_5 = 150$ Falta cubrir 150 contratos de televisores.

d) Aumentar el cupo global no interesa, porque hay un exceso de 50 tubos para televisor blanco-negro, pero convendría.ªumentar el cupo de tubos de pantalla a color que se agoto.

e) El pago debe ser menos a 60 dólares, que es el valor que deja utilidad los televisores blanco-negro, caso contrario no tendría sentido.

f) No pagaría publicidad, puesto que hay un exceso de mercado tanto en la demanda como en los contratos.

2.14. Análisis del Dual en Programación Lineal

Programación lineal es un herramienta matemática, que ha permitido, en los últimos años, resolver muchos problemas de carácter técnico-económico. Estos problemas están muy relacionados con los procesos y problemas que suceden cada día, en una empresa de tipo productivo, académico o de tipo administrativo.
Este es el motivo, por el cual la popularidad de la aplicación de este modelo ha crecido casi en forma exponencial últimamente y muy probablemente siga creciendo de la mismo forma en los próximos años. Programación lineal esta muy unida a las técnicas informáticas-digitales y conforme estas técnicas vayan mejorando, cosa que es muy dinámica actualmente, los modelos matemáticos aplicados en programación lineal irán mejorando.
Los procesos técnicos-económicos de los diferentes tipos de empresas, que se desarrollan en el mundo actual, tienen muchas variables y con el tiempo este número de variables se irán incrementando, para estar al acorde con las necesidades de la empresa.
Con el aumento del número de variables, en los diferentes procesos, va a provocar la aplicación de técnicas informáticas mas avanzadas. Esto podría causar una baja en la popularidad de la aplicación de programación lineal en las empresas y/o industrias. Este problema ha determinado la necesidad de mejorar o encontrar nuevas técnicas, que se apliquen en los diferentes modelos matemáticos, que se encuentran en programación lineal. El modelo matemático, simplex, es un modelo recursivo, que permite eficientemente asignar recursos limitados, para poder alcanzar un objetivo, que es: maximizar o minimizar un proceso dado, pero en el momento que

estamos alcanzando ese objetivo, maximizar, ese mismo objetivo se lo podría representar, como el deseo de alcanzar un mínimo, y viceversa.
Esta asociación de los dos problemas se conoce como ”Dualidad.º ”Problema dual”.
El estudio del problema dual tiene un interés matemático - económico porque:

1. Permite entender mejor el método de la programación lineal.
2. Puede ayudar a disminuir el tamaño de un modelo lineal; con el consiguiente ahorro de trabajo al resolverlo a través del dual.
3. Es una herramienta adicional para realizar los análisis post-óptimales.
4. Complementa y facilita la interpretación económica de las variables, de los coeficientes de la función objetivo y de los términos independientes de las restricciones.

Lo escrito nos permite definir los objetivos del problema dual, que son:

1. Formular los diferentes procesos e interpretarlos con ayuda de los modelos de programación dual.
2. Explicar la importancia de resolver los diferentes problemas técnicos-económicos, de negocios y administrativos aplicando programación lineal utilizando el dual.

2.14.1. Características del Dual en Programación Lineal

La programación lineal aplicando el dual se caracteriza por:

1. Si el primal implica maximización, el dual se lo define con minimización, y viceversa.
2. Los coeficientes de la función objetivo del dual están formados por los términos independientes de las restricciones del primal.
3. El dual tiene restricciones como variables tiene el primal.
4. Si las restricciones del primal son del tipo $\geq$, las restricciones del dual serán del tipo $\leq$ y viceversa.
5. Los términos independientes en el dual están formados por los coeficientes de la función objetivo del primal.
6. El coeficiente de la variable j_{esima} en la restricción j_{esima} del primal, se transforma en el coeficiente de la variable j_{esima} de la restricción j_{esima} de la j_{esima} del dual.

Máximo del Primal = Mínimo Dual”

En el lenguaje matemático nos ayuda a representara cada una de las características escritas anteriormente, las cuales nos ayudan y permiten resolver los diferentes tipos de ejercicios, que se presentan en la vida practica, y que además, fácilmente nos

Primal	Dual
Función Objetivo $Z(max) = \sum_{j=1}^{p} C_j X_j$ Restricciones $\sum_{j=1}^{p} A_{i,j} X_j \leq b_j$ i=(1,2,$\cdots$p) No-negatividad $X_j \geq 0$ j=(1,2,$\cdots$p) $X_j = variables\ \ primales$	Función Objetivo $Z(min) = \sum_{j=1}^{p} b_j Y_j$ Restricciones $\sum_{j=1}^{p} A_{i,j} Y_j \geq C_j$ j=(1,2,$\cdots$p) No-negatividad $Y_j \geq 0$ i=(1,2,$\cdots$p) $Y_j = variables\ \ duales$

permite apreciar el ahorro de tiempo, la facilidad y la ventaja de estas características, que se tiene al aplicarlas.

Para mejor comprensión , se escribe un ejercicio. Dados los siguientes primales escribir sus duales, respectivos:

1. **Problema primal:**

   $Z(Max) = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3$

   Restricciones:

   $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 16$

   $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 25$

   $x_j \geq 0$

   EL dual sera:

   Siendo la función objetivo del primal de maximización, entonces la del dual será minimización. Los términos independientes del primal pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del dual:

   $Z(MIN) = 16y_1 + 25y_2$

   Para formar las restricciones del dual se toma s los coeficientes de las restricciones del primal en sentido vertical:

   $y_1 + 7y_2 \geq 4$

   $y_1 + 5y_2 \geq 5$

   $2y_1 + 3y_2 \geq 9$

   $y_j \geq 0$

   Los términos independientes de las restricciones del dual son los coeficientes de la función objetivo del primal.

   Se ha planteado el problema dual, pero no se ha resuelto, para hallar el valor de las variables del dual, es necesario el método simplex.

2. Primal:

   $Z(MIN) = 2x_1 + 3x_2$

   Restricciones:

   $x_1 + 2x_2 \geq 130$

   $2x_1 + x_2 \geq 190$

   $x_1 + x_2 \geq 200$

   $x_j \geq 0$

   El dual sera:

   $Z(MAX) = 130y_1 + 190y_2 + 200y3$

   Restricciones:

   $y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2$

   $2y_1 + y_2 + y_3 \leq 3$

   $y_j \geq 0$

3. Cuando el primal este formado por todos los símbolos matemáticos conocidos; es decir: $\leq$, $\geq$ y $=$, en ese caso se resuelve de la siguiente manera:

   $Z(MAX) = 8x_1 + 5x_2$

   Restricciones:

   $4x_1 + 3x_2 \geq 120$

   $2x_1 + 8x_2 \leq 160$

   $x_1 + 2x_2 = 60$

   $x_j \geq 0$

   Siendo el primal un problema de maximización, todas las restricciones deben ser puestas en la forma $\leq$.

   La primera se multiplica por (-1) para que cambie de sentido de la inecuación:

   $-4x_1 - 3x_2 \leq -120$

   La tercera restricción por ser una igualdad se remplazara por dos: una con signo $\geq$ y la otra con signo $\leq$.

   $x_1 + 2x_2 \leq 60$ $\qquad y \qquad$ $x_1 + 2x_2 \geq 60$

   La segunda ecuación le multiplicamos por (-1) para que, cambia de signo de la desigualdad para igualar al resto de inecuaciones; por lo tanto se obtiene: $-x_1 - 2x_2 \leq -60$.

   Por lo tanto, el primal transformado a su forma canónica de maximización es:

   $Z(MAX) = 8x_1 + 5x_2$

   Restricciones:

   $-4x_1 - 3x_2 \leq -120$

   $2x_1 + 8x_2 \leq 160$

   $x_1 + 2x_2 \leq 60$

   $-x_1 - 2x_2 \leq -60$

   $x_j \geq 0$

   Después de haber transformado el primal, el dual tendrá la siguiente forma:

   $Z(MIN) = -120y_1 + 160y_2 + 60y_3 - 60y_4$

   Restricciones:

   $-4y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 \geq 8$

$-3y_1 + 8y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 5$

$y_j \geq 0$

Solución del Dual a través del primal: Una de las aplicaciones de la dualidad existente en programación lineal es la posibilidad de obtener la solución de un modelo lineal a partir o por inspección de la solución de su dual o de su primal.

Esto significa que habiendo resuelto un problema, implícitamente esta resuelto el otro.

Entonces, esto da la posibilidad de trabajar con aquel modelo que tenga menor número de restricciones, disminuyendo por tanto el tiempo de solución.

Con un análisis sencillo se establece las relaciones entre la solución óptima del primal y la solución óptima de su dual.

La relación entre las funciones objetivas óptimas:

Utilizando la notación matricial se puede expresar un modelo de maximización, como:

$$Primal = \begin{cases} Funcion\ \ Objetivo \\ Z(max) = C_j X_j \\ Restricciones: \\ A \cdot X_j \leq b_n \end{cases}$$

En donde:

C_j = matriz de una sola fila.

X_j = matriz de una sola columna (variables primales).

A = matriz de los coeficientes tecnológicos.

b_n matriz de una sola columna que representa a los términos independientes.

Le corresponde un dual:

$$Dual = \begin{cases} Funcion\ \ Objetivo \\ Z(max) = b_n^T y_j \\ Restricciones: \\ A^T \cdot Y_j \geq C^T \end{cases}$$

En donde:

C_j^T = matriz transpuesta de C de una sola fila.

Y_j = matriz de una sola columna (variables duales).

A^T = matriz transpuesta de A que son los coeficientes tecnológicos.

Supongamos que X sea una solución factible cualquiera, reemplazando en el primal se tiene:

$CX = X^T C^T \leq X^T(A^T Y),\ \ porque\ \ C^T \leq A^T Y$

Pero, $X^T(A^T Y) = (AX)^T Y$

Por lo tanto: $CX \leq (AX)^T Y$

Se tiene que: $AX \leq b_n \longrightarrow (AX)^T \leq b_n^T$.

lo que se puede escribir que:: $Z(MAX) \leq Z(MIN)$

Lo que significa que: Z(MÁX) no puede sobrepasar el valor de Z(MÍN), y esta a su vez no puede ser menor que Z(MÁX).

Una vez desarrollado el problema primal se puede obtener los valores de las variables principales y de holgura del dual de la siguiente manera: Las variables

óptimas principales del dual son numéricamente iguales al valor absoluto de los correspondientes elementos de las variables de holgura, que se encuentran en la fila del criterio simplex en la tabla óptima del primal. Ya se indico que, un problema de maximización esta asociado matemáticamente a otros de minimización, y como matemáticamente el problema dual puede extraerse del primal.
Los dos problemas: Primal Y Dual; son en realidad modelos que representan la asignación eficiente, optima de recursos limitados de una empresa. Por tanto, es natural que también deben estar asociados en su interpretación económica. La interpretación económica nos permite:

1. Explicar por qué las desigualdades de las restricciones se invierten.
2. Dar una interpretación del papel de los C_j y b_n en uno y en el otro problema.

2.14.2. Ejercicios Resueltos con Dual

Los ejercicios aquí presentados, ya han sido resueltos por el método gráfico y el método simplex (método primal), mi interés es que, se observe que al aplicar el método dual, también se llega al mismo resultado y ver la facilidad, que presenta al aplicarlo o no.

1. Un taller fabrica dos clases de cinturones de piel. En cada cinturón A de alta calidad gana 40 dólares y en cada cinturón B de baja calidad gana 30 dólares. El taller puede producir diariamente 500 cinturones de tipo B o 250 cinturones de tipo A. Solo se dispone de piel para 400 cinturones diarios A y B combinados y de 200 hebillas elegantes para el cinturón A y de 350 hebillas diarias para el cinturón B. ¿Qué producción maximiza la ganancia?

   Método Primal:

   Función Objetivo:

   $Z(MAX.) = 40X_1 + 30X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$

   Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 400 & \textit{Cantidad de piel} \\ x_1 & \leq & 200 & \textit{Hebillas elegantes} \\ x_2 & \leq & 350 & \textit{Capacidad} \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 500 & \\ x_1; x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

   Variables de Holgura:

   $Z(MAX.) = 40X_1 + 30X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 & = 400 \\ x_1 + S_2 & = 200 \\ x_2 + S_3 & = 350 \\ 2x_1 + x_2 + S_4 & = 500 \end{cases}$$

   Se presenta hasta aquí, lo que se ha realizado por el método simples, método primal, ahora se aplica el método del dual:

   Solución del ejercicio aplicando el método del Dual:

   Función objetivo:

$Z(MIN) = 400y_1 + 200y_2 + 350y_3 + 500y_4$

Restricciones o limitaciones:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_4 & \geq & 40 & \textit{Costo incorporado a A} \\ y_1 + y_3 + y_4 & \geq & 30 & \textit{Costo incorporado a B} \\ y_j & \geq & 0 & \end{cases}$$

Variables de holgura:

$Z(MIN) = 400y_1 + 200y_2 + 350y_3 + 500y_4 + 0S_1 + 0S_2 + Mm_1 + Mm_2$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_4 - S_1 + m_1 = 40 \\ y_1 + y_3 + y_4 - S_2 + m_2 = 30 \end{cases}$$

Tabla I:

	C_j			400	200	350	500	0	0	M	M	Tabla I
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	m_1	m_2	
$\longleftarrow$	M	m_1	40	1	1	0	2	-1	0	1	0	
	M	m_2	30	1	0	1	1	0	-1	0	1	
		Z_j	70M	2M	M	M	3M	-M	-M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	2M	M	M	3M	-M	-M	0	0	

Se escoje el mayor de los valores positivos de M que, en este caso es 3M de manera que, la columna que ingresa es y_4 con un valor de 500. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_4} = \begin{cases} 40 \div 2 & = & 20 & \longrightarrow & 2^* & \textit{pivote} \\ 30 \div 1 & = & 30 & \longrightarrow & 1^\circ & \textit{semipivote} \end{cases}$$

Coeficientes de y_4:

$$\begin{cases} 40 & \div & 2 & = & 20 \\ 1 & \div & 2 & = & 0.5 \\ 1 & \div & 2 & = & 0.5 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 2 & \div & 2 & = & 1 \\ -1 & \div & 2 & = & -0.5 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \\ 1 & \div & 2 & = & 0.5 \\ 0 & \div & 2 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_2 :

$$\begin{cases} 30 & - & 20 \times 1 & = & 10 \\ 1 & - & 0.5 \times 1 & = & 0.5 \\ 0 & - & 0.5 \times 1 & = & -0.5 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 1 & - & (1 \times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (-0.5) \times 1 & = & 0.5 \\ -1 & - & (0 \times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (0.5 \times 1) & = & -0.5 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \end{cases}$$

Tabla II:

	C_j			400	200	350	500	0	0	M	M	Tabla II
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	m_1	m_2	
$\longrightarrow$	500	y_4	20	0.5	0.5	0	1	-0.5	0	0.5	0	
$\longleftarrow$	M	m_2	10	0.5	-0.5	1	0	0.5	-1	-0.5	1	
		Z_j	10M	0.5M	-0.5M	M	500	0.5M	-M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	0.5M	-0.5M	M	0	0.5M	-0.5M	0	0	

Se escoje el mayor de los valores positivos de M que, en este caso es M, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_3 con un valor de 350. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_4} = \begin{cases} 20 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^{\circ} & semipivote \\ 10 \div 1 & = & 10 & \longrightarrow & 1^{*} & pivote \end{cases}$$

Coeficientes de y_3**:**

$$\begin{cases} 10 & \div & 1 & = & 10 \\ 0.5 & \div & 1 & = & 0.5 \\ -0.5 & \div & 1 & = & -0.5 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0.5 & \div & 1 & = & 0.5 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ -0.5 & \div & 1 & = & -0.5 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de y_4 **:**

$$\begin{cases} 20 & - & 10 \times 0 & = & 20 \\ 0.5 & - & 0.5 \times 0 & = & 0.5 \\ 0.5 & - & -0.5 \times 0 & = & 0.5 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 0) & = & 1 \\ -0.5 & - & (0.5) \times 0 & = & -0.5 \\ 0 & - & (-1 \times 0) & = & 0 \\ 0.5 & - & (-0.5 \times 0) & = & 0.5 \\ 0 & - & (1 \times 0) & = & 0 \end{cases}$$

Tabla III:

Las dos ultimas columnas se puede no tomarlas encuenta; ya que, las variables artificiales de la columna y_j se han eliminado.

	C_j			400	200	350	500	0	0	Tabla III
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	
	500	y_4	20	0.5	0.5	0	1	-0.5	0	
$\longleftarrow$	350	y_3	10	0.5	-0.5	1	0	0.5	-1	
		Z_j	13.500	425	75	350	500	-75	-350	
		$Z_j - C_j$	—	25	-125	0	0	-75	-350	

Se escoje el mayor de los valores positivos que, en este caso es 25, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_1 con un valor de 400. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_1} = \begin{cases} 20 \div 0.5 & = & 40 & \longrightarrow & 0.5^{\circ} & semipivote \\ 10 \div 0.5 & = & 20 & \longrightarrow & 0.5^{*} & pivote \end{cases}$$

Coeficientes de y_1**:**

$$\begin{cases} 10 & \div & 0.5 & = & 20 \\ 0.5 & \div & 0.5 & = & 1 \\ -0.5 & \div & 0.5 & = & -1 \\ 1 & \div & 0.5 & = & 2 \\ 0 & \div & 0.5 & = & 0 \\ 0.5 & \div & 0.5 & = & 1 \\ -1 & \div & 0.5 & = & -2 \end{cases}$$

Coeficientes de y_4 **:**

$$\begin{cases} 20 & - & 20 \times 0.5 & = & 10 \\ 0.5 & - & 1 \times 0.5 & = & 0 \\ 0.5 & - & -1 \times 0.5 & = & 1 \\ 0 & - & (2 \times 0.5) & = & -1 \\ 1 & - & (0 \times 0.5) & = & 1 \\ -0.5 & - & (1) \times 0.5 & = & -1 \\ 0 & - & (-2 \times 0.5) & = & 1 \end{cases}$$

Tabla IV:

El ejercicio es de minimización; por lo tanto, en la fila de decisión, $Z_j - C_j$ debe constar de ceros o números negativos. Como este es el caso, el proceso ha terminado.

	C_j			400	200	350	500	0	0	Tabla III
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	
	500	y_4	10	0	1	-1	1	-1	1	
$\longrightarrow$	400	y_1	20	1	-1	2	0	1	-2	
		Z_j	13.000	400	100	300	500	-100	-300	
		$Z_j - C_j$	—	0	-100	-50	0	-100	-300	

Solución óptima:

$Z(MIN) = 13.000 \;\; Dolares$

$y_1 = 20 \;\; y_3 = 0$ Son los mismos valores

$y_2 = 0 \quad y_4 = 10$

2. Se producen dos artículos A y B los mismos que son procesados por 3 maquinas $M_1, M_2 \; y \; M_3$ que disponen de 130, 190, 200, horas semanales al menos respectivamente. La M_1 procesa 1 unidad de A y 1 de B, M_2 procesa 2 de A y 1 de B, M_3 procesa 1 de A y 4 de B. El costo de procesar es 2 dólares por cada unidad del articulo A y 3 dólares por cada unidad del articulo B. ¿Cuantas unidades de A y B se deben procesar para que el costo sea mínimo?.

Método Primal:

Función Objetivo:

$Z(MIN.) = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq & 130 & Capasidad \; de \; M_1 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 190 & Capasidad \; de \; M_2 \\ x_1 + 4x_2 & \geq & 200 & Capacidad \; de \; M_3 \\ x_1 ; x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

Variables de Holgura:

$Z(MAX.) = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \; -S_1 \; +Mm_1 = 130 \\ 2x_1 + x_1 \; -S_2 \; +Mm_2 = 190 \\ x_1 + 4x_2 \; -S_3 \; +Mm_3 = 200 \end{cases}$$

Solución óptima del problema primal: El lector debe verificar las respuestas.

Z(MÍN) = 283,5 Dólares

$x_1 = 106{,}51$ Unidades del articulo A

$x_2 = 23{,}5$ Unidades del articulo B

$S_1 = 1.7$ Capacidad no utilizada de M_1

$S_2 = 0$ Capacidad no utilizada de M_2

$S_3 = 1.6$ Capacidad no utilizada de M_3

Método dual:

Función objetivo:

$Z(Max) = 130y_1 + 190y_2 + 200y_3$

Restricciones o limitaciones:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 & \leq & 2 & \quad Utilidad\ incorporada\ \ de\ A \\ y_1 + y_2 + 4y_3 & \leq & 3 & \quad Utilidad\ incorporado\ de\ B. \\ y_j & \geq & 0 & \end{cases}$$

Variables de holgura:

$Z(Max) = 130y_1 + 190y_2 + 200y_3 + 0S_1 + 0S_2$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \quad +S_1 \qquad\qquad = 2 \\ y_1 + y_2 + 4y_3 \qquad\qquad +S_2 \quad = 3 \end{cases}$$

Tabla I:

	C_j			130	190	200	0	0	Tabla I
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	
	0	S_1	2	1	2	1	1	0	
$\longleftarrow$	0	S_2	3	1	1	4	0	1	
		Z_j	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	—	-130	-190	-200	0	0	

Se escoje el menor de los valores negativos que, en este caso es -200, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_3 con un valor de 200. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_3} = \begin{cases} 2 \div 1 & = & 2 & \longrightarrow & 1^\circ & semipivote \\ 3 \div 4 & = & 0.75 & \longrightarrow & 4^* & pivote \end{cases}$$

Coeficientes de y_3:

$$\begin{cases} 3 & \div & 4 & = & 0.75 \\ 1 & \div & 4 & = & 0.25 \\ 1 & \div & 4 & = & 0.25 \\ 4 & \div & 4 & = & 1 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ 1 & \div & 4 & = & 0.25 \end{cases}$$

Coeficientes de S_1 :

$$\begin{cases} 2 & - & 0.75 \times 1 & = & 1.25 \\ 1 & - & 0.25 \times 1 & = & 0.75 \\ 2 & - & 0.25 \times 1 & = & 1.75 \\ 1 & - & (1 \times 1) & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0.25) \times 1 & = & -0.25 \end{cases}$$

Tabla II:

	C_j			130	190	200	0	0	Tabla II
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	
$\longleftarrow$	0	S_1	1.25	0.75	1.75	0	1	-0.25	
$\longrightarrow$	200	y_3	0.75	0.25	0.25	1	0	0.25	
		Z_j	150	50	50	200	0	50	
		$Z_j - C_j$	—	-80	-140	0	0	50	

Se escoje el menor de los valores negativos que, en este caso es -140, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_2 con un valor de 190. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_2} = \begin{cases} 1.25 \div 1.75 & = & 0.71 & \longrightarrow & 1.75^{*} & pivote \\ 0.75 \div 0.25 & = & 3 & \longrightarrow & 0.25^{\circ} & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de y_2:

$$\begin{cases} 1.25 & \div & 1.75 & = & 0.71 \\ 0.75 & \div & 1.75 & = & 0.43 \\ 1.75 & \div & 1.75 & = & 1 \\ 0 & \div & 1.75 & = & 0 \\ 1 & \div & 1.75 & = & 0.57 \\ -0.25 & \div & 1.75 & = & -0.14 \end{cases}$$

Coeficientes de y_3 :

$$\begin{cases} 0.75 & - & 0.71 \times 0.25 & = & 0.57 \\ 0.25 & - & 0.43 \times 0.25 & = & 0.14 \\ 0.25 & - & 1 \times 0.25 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 0.25) & = & 1 \\ 0 & - & (0.57 \times 0.25) & = & -0.14 \\ 0.25 & - & (-0.14) \times 0.25 & = & 0.28 \end{cases}$$

Tabla III:

	C_j			130	190	200	0	0	Tabla III
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	
$\longrightarrow$	190	y_2	0.71	0.43	1	0	0.57	-0.14	
	200	y_3	0.57	0.14	0	1	-0.14	0.28	
		Z_j	248.9	110	190	200	80.3	29.4	
		$Z_j - C_j$	—	-20	0	0	80.3	29.4	

Todavía hay valores negativos, se escoje el menor de los valores negativos que, en este caso es -20, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_1 con un valor de 190. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_2} = \begin{cases} 0.71 \div 0.43 & = & 1.6 & \longrightarrow & 0.43^{*} & pivote \\ 0.57 \div 0.14 & = & 4.1 & \longrightarrow & 0.14^{\circ} & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de y_1:

$$\begin{cases} 0.71 & \div & 0.43 & = & 1.65 \\ 0.43 & \div & 0.43 & = & 1 \\ 1 & \div & 0.43 & = & 2.3 \\ 0 & \div & 0.43 & = & 0 \\ 0.57 & \div & 0.43 & = & 1.3 \\ -0.14 & \div & 0.43 & = & -0.32 \end{cases}$$

Coeficientes de y_3 :

$$\begin{cases} 0.57 & - & 1.6 \times 0.14 & = & 0.34 \\ 0.14 & - & 1 \times 0.14 & = & 0 \\ 0 & - & 2.3 \times 0.14 & = & -0.32 \\ 1 & - & (0 \times 0.14) & = & 1 \\ -0.14 & - & (1.3 \times 0.14) & = & -0.32 \\ 0.28 & - & (-0.32) \times 0.14 & = & 0.32 \end{cases}$$

Tabla IV:

	C_j			130	190	200	0	0	Tabla III
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	
$\longrightarrow$	130	y_1	1.65	1	2.3	0	1.3	-0.32	
	200	y_3	0.34	0	-0.32	1	-0.32	0.32	
		Z_j	283.5	130	235	200	105	22.4	
		$Z_j - C_j$	—	0	45	0	105	22.4	

Solución óptima del problema dual:

Z(MÍN) = 282,5 Dólares

$x_1 = 105{,}51$ Unidades del articulo A

$x_2 = 22{,}5$ Unidades del articulo B

La diferencia con el problema primal, se debe a los decimales usados en los cálculos respectivos, que en caso de Z(máx) = 283.5; x_1 = 106,5, x_2= 23.5.

3. Se fabrican dos clases de muebles A y B, se dispone de madera para 80 muebles por lo menos, toma 2 horas preparar 10 muebles tipo A y 4 horas preparar 10 muebles tipo B, se dispone hasta 20 horas. La demanda de A es de un total de 70. Cada mueble tipo A deja una utilidad de 10 dólares y 8 dólares cada mueble tipo B. ¿Cuántos muebles tipo A y B se deben fabricar para obtener la máxima ganancia?.

Método primal:

Función Objetivo:

$Z(MIN.) = 10X_1 + 8X_2$

Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq & 80 & \textit{Cantidad de madera} \\ \frac{2}{10}x_1 + \frac{4}{10}x_2 & \leq & 20 & \textit{Tiempo} \\ x_1 & = & 70 & \textit{Demanda de A} \\ x_1 ; x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

El presente problema primal tiene restricciones de diferente sentido, para encontrar su dual es necesario que, todas las limitaciones estén en el mismo sentido; para lo cual, la primera se multiplica por (-1) y la tercera la reemplazamos por dos, una con un signo ≤ y la otra con ≥.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 & \leq & -80 & \textit{Cantidad de madera} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq & 200 & \textit{Tiempo} \\ x_1 & \geq & 70 & \textit{Demanda de A} \\ x_1 & \leq & 70 \\ x_1 ; x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la última por (-1) y se obtiene:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 & \leq & -80 & \textit{Cantidad de madera} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq & 200 & \textit{Tiempo} \\ -x_1 & \leq & -70 & \textit{Demanda de A} \\ x_1 & \leq & 70 \\ x_1 ; x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Función Objetivo del Dual:

$Z(MIN) = -80y_1 + 200y_2 + 70y_3 - 70y_4$

Restricciones o Limitaciones:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 & \geq & 10 & \textit{Costo incorporado a A} \\ -y_1 + 4y_2 & \geq & 8 & \textit{Costo incorporado a B} \\ y_1 ; y_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Variables de Holgura:

$Z(MIN) = -80y_1 + 200y_2 + 70y_3 - 70y_4 + 0S_1 + 0S_2 + Mm_1 + Mm_2$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 \quad -S_1 \qquad +Mm_1 \qquad = 10 \\ \qquad -y_1 + 4y_2 \qquad -S_2 \qquad +Mm_2 \qquad = 8 \end{cases}$$

Tabla I:

	C_j			-80	200	70	-70	0	0	M	M	Tabla I
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	m_1	m_2	
	M	m_1	10	-1	2	1	-1	-1	0	1	0	
$\longleftarrow$	M	m_2	8	-1	4	0	0	0	-1	0	1	
		Z_j	18M	-2M	6M	M	-M	-M	-M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	-2M	6M	M	-M	-M	-M	0	0	

Se escoje el mayor de los valores positivos que, en este caso es 6M, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_2 con un valor de 200. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_3} = \begin{cases} 10 \div 2 & = & 5 & \longrightarrow & 2^{\circ} & semipivote \\ 8 \div 4 & = & 2 & \longrightarrow & 4^{*} & pivote \end{cases}$$

Coeficientes de y_2:

$$\begin{cases} 8 & \div & 4 & = & 2 \\ -1 & \div & 4 & = & -0.25 \\ 4 & \div & 4 & = & 1 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ -1 & \div & 4 & = & -0.25 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \\ 0 & \div & 4 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_1 :

$$\begin{cases} 10 & - & 2 \times 2 & = & 6 \\ -1 & - & -0.25 \times 2 & = & -0.5 \\ 2 & - & 1 \times 2 & = & 0 \\ 1 & - & (0 \times 2) & = & 1 \\ -1 & - & (0 \times 2) & = & -1 \\ -1 & - & (0) \times 2 & = & -1 \\ 0 & - & (-0.25 \times 2) & = & 0.5 \\ 1 & - & (0 \times 2) & = & 1 \\ 0 & - & (0) \times 2 & = & 0 \end{cases}$$

Tabla II:

	C_j			-80	200	70	-70	0	0	M	M	Tabla II
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	m_1	m_2	
$\longleftarrow$	M	m_1	6	-0.5	0	1	-1	-1	0.5	1	0	
$\longrightarrow$	200	y_2	2	-0.25	1	0	0	0	-0.25	0	0	
		Z_j	6M	-0.5M	200	M	-M	-M	0.5M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	-0.5M	0	M	-M	-M	0.5M	0	0	

Se escoje el mayor de los valores positivos que, en este caso es M, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_3 con un valor de 70. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_3} = \begin{cases} 6 \div 1 & = & 6 & \longrightarrow & 1^{\circ} & pivote \\ 2 \div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^{\circ} & semipivote \end{cases}$$

Coeficientes de y_3:

$$\begin{cases} 6 & \div & 1 & = & 6 \\ -0.5 & \div & 1 & = & -0.5 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \end{cases}$$

Coeficientes de y_2 :

$$\begin{cases} 2 & - & 6\times 0 & = & 2 \\ -0.25 & - & -0.5\times 0 & = & -0.25 \\ 1 & - & 0\times 0 & = & 1 \\ 0 & - & (1\times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (-1\times 0) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de y_3:

$$\begin{cases} -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0.5 & \div & 1 & = & 0.5 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de y_2 :

$$\begin{cases} 0 & - & (-1)\times 0 & = & 0 \\ -0,25 & - & (0.5\times 0) & = & -02.5 \\ 0 & - & (1\times 0) & = & 0 \\ 0 & - & (0)\times 0 & = & 0 \end{cases}$$

Tabla III:

	C_j			-80	200	70	-70	0	0	M	M	Tabla III
		y_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	m_1	m_2	
$\longrightarrow$	70	y_3	6	-0.5	0	1	-1	-1	0.5	1	0	
	200	y_2	2	-0.25	1	0	0	0	-0.25	0	1	
		Z_j	820	-85	200	70	-70	-70	-15	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	-85	0	0	0	-70	-15	0	0	

El proceso ha terminado; ya que, en la fila $(Z_j - C_j)$ contiene solo números negativos y ceros. El ejercicio pide minimizar y por lo tanto debe cumplir las condiciones de mínimo, en el método de simplex.

Solución óptima:

$Z(MIN) = 820$ Dólares

$y_1 = 0$; $y_2 = 2$; $y_3 = 6$; $y_4 = 0$

$S_1 = x_1 = 70$; $S_2 = x_2 = 15$ (Valor absoluto).

4. Un comerciante de frutas transporta sus productos en un camión que tiene una capacidad de 800 cajas de frutas. El debe transportar al menos 200 cajas de naranjas, que le rendirán 20 dólares por caja; al menos 100 cajas de toronjas, que le rendirán una ganancia de 10 dolares por caja y cuando mucho 200 cajas de mandarinas con 30 dólares de ganancia por caja. ¿Cómo debe distribuirse el cargamento del camión para obtener la máxima ganancia?.

   Función Objetivo:

   $Z(MAX) = 20x_1 + 10x_2 + 30x_3$

   x_1 = Cajas de naranjas

   x_2 = Cajas de toronjas

   x_3 = Cajas de mandarinas

   Restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 800 & \textit{Capasidad del camion} \\ x_1 & \geq & 200 & \textit{Cajas de naranjas} \\ x_2 & \geq & 100 & \textit{Cajas de toronjas} \\ x_3 & \leq & 200 & \textit{Cajas de mandarinas} \\ x_1;x_2;x_3 & \geq & 0 & \end{cases}$$

Para transformar a su forma dual, el ejercicio requiere tener todas las desigualdades en una sola dirección; para lo cual, se multiplica por (-1) a las ecuaciones que se desee cambiar la dirección de la desigualdad.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 800 & \textit{Capasidad del camion} \\ -x_1 & \leq & -200 & \textit{Cajas de naranjas} \\ -x_2 & \leq & -100 & \textit{Cajas de toronjas} \\ x_3 & \leq & 200 & \textit{Cajas de mandarinas} \\ x_1;x_2;x_3 & \geq & 0 & \end{cases}$$

Restricciones con los Cambios en Primal:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 800 & \textit{Capasidad del camion} \\ -x_1 + 0x_2 + 0x_3 & \leq & -200 & \textit{Cajas de naranjas} \\ 0x_1 - x_2 + 0x_3 & \leq & -100 & \textit{Cajas de toronjas} \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 & \leq & 200 & \textit{Cajas de mandarinas} \\ x_1;x_2;x_3 & \geq & 0 & \end{cases}$$

Función Objetivo en Dual:

$Z(Min.) = 800y_1 - 20y_2 - 100y_3 + 200y_4$

Variables de Holgura en Dual :

$Z(Min.) = 800y_1 - 200y_2 - 100y_3 + 200y_4 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 + Mm_1 + Mm_2 + Mm_3$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 0y_3 + 0y_4 - S_1 + Mm_1 = 20 \\ y_1 + 0y_2 - y_3 + 0y_4 - S_2 + Mm_2 = 10 \\ y_1 + 0y_2 + 0y_3 + y_4 - S_3 + Mm_3 = 30 \end{cases}$$

Tabla I:

	C_j			800	-200	-100	200	0	0	0	M	M	M	Tabla I
		x_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	S_3	m_1	m_2	m_3	
	M	m_1	20	1	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	
$\longleftarrow$	M	m_2	10	1	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	
	M	m_3	30	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	
		Z_j	60M	3M	-M	-M	M	-M	-M	-M	M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	3M	-M	-M	M	-M	-M	-M	0	0	0	

Se escoje el mayor de los valores positivos que, en este caso es 3M, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_1 con un valor de 800. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_1} = \begin{cases} 20 \div 1 & = & 20 & \longrightarrow & 1^{\circ} & \textit{semipivote} \\ 10 \div 1 & = & 10 & \longrightarrow & 1^{*} & \textit{pivote} \\ 30 \div 1 & = & 30 & \longrightarrow & 1^{\circ} & \textit{semipivote} \end{cases}$$

Coeficientes de y_1:

$$\begin{cases} 10 & \div & 1 & = & 10 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_1 :

$$\begin{cases} 20 & - & 10\times 1 & = & 10 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ -1 & - & 0\times 1 & = & -1 \\ 0 & - & (-1\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ -1 & - & (0\times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (-1\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (1\times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_3:

$$\begin{cases} 30 & - & 10\times 1 & = & 20 \\ 1 & - & 1\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & (-1\times 1) & = & 1 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_3 :

$$\begin{cases} 0 & - & (-1\times 1) & = & 1 \\ -1 & - & (0\times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (0\times 1) & = & 0 \\ 0 & - & (1\times 1) & = & -1 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \end{cases}$$

Tabla II:

	C_j			800	-200	-100	200	0	0	0	M	M	M	Tabla II
		x_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	S_3	m_1	m_2	m_3	
$\longleftarrow$	M	m_1	10	0	-1	1	0	-1	1	0	1	-1	0	
$\longrightarrow$	800	y_1	10	1	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	
	M	m_3	20	0	0	1	1	0	1	-1	0	-1	1	
		Z_j	30M	800	-M	2M	M	-M	2M	-M	M	M	M	
		$Z_j - C_j$	—	0	-M	2M	M	-M	2M	-M	0	0	0	

Se escoje el mayor de los valores positivos que, en este caso es 2M, de la fila $Z_j - C_j$ de manera que, la columna que ingresa es y_3 con un valor de -100. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{y_3} = \begin{cases} 10 \div 1 & = & 10 & \longrightarrow & 1^* & \textit{pivote} \\ 10 \div -1 & = & No & \longrightarrow & -1^\circ & \textit{semipivote} \\ 20 \div 1 & = & 20 & \longrightarrow & 1^\circ & \textit{semipivote} \end{cases}$$

Coeficientes de y_3:

$$\begin{cases} 10 & \div & 1 & = & 10 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de y_1 :

$$\begin{cases} 10 & - & 10\times -1 & = & 20 \\ 1 & - & 0\times -1 & = & 1 \\ 0 & - & -1\times -1 & = & -1 \\ -1 & - & (1\times -1) & = & 0 \\ 0 & - & (0\times -1) & = & 0 \\ 0 & - & (-1\times -1) & = & -1 \\ -1 & - & (1\times -1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de y_3:

$$\begin{cases} 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_3:

$$\begin{cases} 20 & - & 10\times 1 & = & 10 \\ 0 & - & 0\times 1 & = & 0 \\ 0 & - & -1\times 1 & = & 1 \\ 1 & - & (1\times 1) & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \\ 0 & - & (-1\times 1) & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de y_1 :

$$\begin{cases} 0 & - & (0\times -1) & = & 0 \\ 0 & - & (1\times -1) & = & 1 \\ 1 & - & (-1\times -1) & = & 0 \\ 0 & - & (0\times -1) & = & 0 \end{cases}$$

Coeficientes de m_3 :

$$\begin{cases} 1 & - & (1\times 1) & = & 0 \\ -1 & - & (0\times 1) & = & -1 \\ 0 & - & (1\times 1) & = & -1 \\ -1 & - & (-1\times 1) & = & 0 \\ 1 & - & (0\times 1) & = & 1 \end{cases}$$

Tabla III:

	C_j			800	-200	-100	200	0	0	0	M	M	M	Tabla III
		x_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	S_3	m_1	m_2	m_3	
	800	y_1	20	1	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	
$\longrightarrow$	-100	y_3	10	0	-1	1	0	-1	1	0	1	-1	0	
	M	m_3	10	0	1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	
		Z_j	10M	800	M	-100	M	M	-100	-M	-M	100	M	
		$Z_j - C_j$	—	0	M	0	M	M	-100	-M	-2M	-M	0	

Se escoje el mayor de los valores positivos que, en este caso es M, como hay tres valores M, se escoje el de y_4 ya que existen dos valores ceros en esta columna, lo cual facilitara los cálculos. En la fila $Z_j - C_j$ se toma la columna para que ingrese y_4 con un valor de 200. Ademas, las variables artificiales ya no se les considera. Se determina la fila que sale, para lo cual, se busca el menor cociente de dividir:

$$\frac{b_n}{S_2} = \begin{cases} 20\div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^{\circ} & semipivote \\ 10\div 0 & = & No & \longrightarrow & 0^{\circ} & semipivote \\ 20\div 1 & = & 20 & \longrightarrow & 1^{*} & pivote \end{cases}$$

Coeficientes de y_4:

$$\begin{cases} 10 & \div & 1 & = & 10 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ -1 & \div & 1 & = & -1 \\ 0 & \div & 1 & = & 0 \\ 1 & \div & 1 & = & 1 \end{cases}$$

Coeficientes de y_1 y_4 :

Los valores de y_1 e y_4 son los mismos ; ya que, el semipivote de estos elementos es cero.

Tabla IV:

	C_j			800	-200	-100	200	0	0	0	Tabla IV
		x_i	b_n	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	S_3	
	800	y_1	20	1	-1	0	0	-1	0	0	
$\longrightarrow$	-100	y_3	10	0	-1	1	0	-1	1	0	
	200	y_4	10	0	1	0	1	1	0	-1	
		Z_j	17.000	800	-500	-100	200	-500	-100	-200	
		$Z_j - C_j$	—	0	-300	0	0	-500	-100	-200	

El ejercicio requiere obtener un mínimo; para lo cual, todos los elementos de la fila$(Z_j - C_j)$ tienen que ser valores negativos o ceros. Se observa que dicha fila cumple con la condición de minimización en el método simples. El proceso se ha acabado.

Solución del problema dual:

Z(MÁX) = 17.000 Dólares

$S_1 = x_1 = 500$ (Valor absoluto) Cajas de naranjas.

$S_2 = x_2 = 100$ (Valor absoluto) Cajas de toronjas.

$S_3 = x_3 = 200$ (Valor absoluto) Cajas de mandarinas.

2.15. Ejercicios Propuestos de Programación Lineal Método Simplex

1. Se procesan tres productos A, B y C a través de tres operaciones diferentes I, II y III, los tiempos (en minutos) requeridos por unidad de cada producto, la capacidad diaria de las operaciones (en minutos) por día y el beneficio por unidad vendida de cada producto (en dólares) son como sigue:

Operación	Tiempo			Capacidad en minutos dia
	A	B	C	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
Ganancias	3	2	5	Dólares

   a) Determinar la producción diaria óptima para los tres productos que maximice el beneficio.

   b) Suponga que, un cuarto producto debe fabricarse con las mismas operaciones. Los tiempos por unidad en las tres operaciones son 3, 5 y 1. El beneficio por unidad es igual a 6. Vuelva a formular el modelo de programación lineal. Si además debe utilizarse la capacidad total de la operación 3 ¿Cómo cambiaría esto la formulación?.

   c) Suponga que, la suma de las capacidades no utilizadas de las tres operaciones no debe exceder de 10 minutos por día. Muestre como esta restricción puede ser implantada en la formulación.

   d) Suponga que, un estudio de mercado indica que la relación del número de unidades del producto A al número de unidades de los productos B y C debe ser al menos igual a 0.4. Muestre como esta restricción puede ser tomada en cuenta en la formulación.

2. Se procesan cuatro productos sucesivamente en dos maquinas. Los tiempos de manufacture en horas por unidad de cada producto se tabulan a continuación para las dos maquinas:

Máquina	Tiempo por Unidad (horas)			
	Producto A	Producto B	Producto C	Producto D
I	2	3	4	2
II	3	2	1	2

   El costo total de producir una unidad de cada producto esta basado directamente en el tiempo de maquina. Suponga que: el costo por hora para las maquinas I y II es 10 dólares y 15 dólares. Las horas totales presupuestadas para todos los productos en las maquinas I y II son 500 y 380. Si el precio de venta por unidad para los productos A, B, C y D es 65 dólares, 70 dólares, 55 dólares y 45 dólares, formule el problema como un modelo de programación lineal para maximizar el beneficio neto total.

3. Una compañía produce dos tipos de sombreros vaquero. Cada sombrero del primer tipo requiere el doble de tiempo en mano de obra que el segundo tipo. Si todos los sombreros son solamente del segundo tipo, la compañía puede producir un total de 500 sombreros al día. El mercado limita las ventas diarias del primero y segundo tipos a 150 y 250 sombreros. Suponga que los beneficios por sombrero son 8 dólares para el tipo A y 5 dólares para el tipo B. Determine el número de sombreros que deben producirse de cada tipo a fin de maximizar el beneficio.

4. Un fabricante produce tres modelos (I, II y III) de un cierto producto, y usa dos tipos de materia prima (A y B) de los cuales se tiene disponibles 2000 y 3000 unidades, respectivamente. Los requisitos de materia prima por unidad de los tres modelos son:

Materia Prima	Requisitos		
	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

   El tiempo de mano de obra para cada unidad del modelo I es dos veces que del modelo II y tres veces del modelo III. La fuerza laboral completa de la fábrica puede producir el equivalente de 700 unidades del modelo I. Una encuesta de mercado indica que la demanda mínima de los tres modelos es 200, 250 y 150 unidades respectivamente. Sin embargo, las relaciones del número de unidades producidas debe ser igual a 3: 2: y 5. Suponga que los beneficios por unidad de los modelos I, II y III son 30, 20 y 50 unidades monetarias. Formule el problema como un modelo de programación lineal a fin de determinar el número de unidades de cada producto que maximizaran el beneficio.

5. Un empresario tiene la opción de invertir su dinero en 2 planes. El plan A garantiza que cada unidad monetaria invertida ganará 70 cts. Dentro de un año, mientras que el plan B garantiza que cada unidad monetaria invertida ganar 2 dólares dentro de 2 anos. En el plan B se permiten únicamente las inversiones para periodos que sean múltiples de dos años. ¿Cómo se deberán invertir 100.000 dólares a fin de maximizar las ganancias al final de tres altos?. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

6. Para una cafetería que trabaja 24 horas., se requieren las siguientes meseras:

Horas día	Número meseras
2-6	4
6-10	8
10-14	10
14-18	7
18-22	12
22-2	4

Cada mesera trabaja 8 horas, consecutivas por día. El objetivo es encontrar el número más pequeño requerido para cumplir los requisitos anteriores. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

7. Suponga que, el numero mínimo de autobuses requerido en la i-estima hora del día es b_i, donde $i = (1, 2 \cdots 24)$. Cada autobús trabaja 6 horas consecutivas, si el número de autobuses en el periodo i excede el mínimo requerido bi, se incurre en un costo por exceso, ci, por autobús-hora. Formule el problema como un modelo de programación lineal de tal manera que se minimice el exceso del costo tal originado.

8. Considere el problema de asignar tres tamaños diferentes de avión a cuatro rutas. La tabla siguiente da la capacidad máxima (en numero de pasajeros) y el numero de aviones disponible para cada tipo, el numero de viajes diarios que cada avión puede hacer en una ruta dada y el numero diario de clientes esperados para cada ruta.

Tipo de aviones	Capacidad de pasajeros	Número de aviones	viajes diarios			
			I	II	III	IV
A	50	5	3	2	2	1
B	30	8	4	3	3	1
C	20	10	5	5	4	2
Número diario de pasajeros			100	200	90	120

Los costos asociados de operación por viaje en las diferentes rutas junto con el costo de penalización (beneficio perdido), por no servir a un cliente, se resumen a continuación:

Tipo de Avión	Costo en una ruta dada			
	I	II	III	IV
A	1000	1100	1200	1500
B	800	900	1000	1000
C	600	800	800	1000
Recargo por cliente	40	50	45	70

Formule el problema como un modelo de programación lineal, para determinar la asignación de aviones a rutas que minimizara el costo total del sistema.

9. Una fabrica de papel recibió tres pedidos de rollos de papel con los anchos y longitudes incluidos en la tabla siguiente:

Pedido $N°$	Anchura (pies)	Longitud (pies)
1	5	10.000
2	7	30.000
3	9	20.000

Los rollos se producen en la fábrica con dos anchos estándar; 10 y 20 pies. Los cuales hay que recortar a los tamaños especificados por los pedidos. No existe

Límite sobre la longitud de los rollos estándar; ya que, para propósitos prácticos los rollos de longitud limitada pueden unirse para proporcionar las longitudes requeridas.

a) a) Determine el esquema de producción (modelos de corte) que minimice la perdida por ajuste y satisfaga la demanda dada.

b) b) Reformule el problema suponiendo solamente la disponibilidad de un rollo estándar con ancho de 15.

10. Re-formule el problema 9 según la hipótesis de que, los rollos de papel se reemplazan por troncos. Las longitudes estándar de los troncos son de 10 y 20 pies, los números de troncos requeridos de longitudes 5, 7 y 9, son 1.000, 3.000 y 2.000, respectivamente.

11. Dos aleaciones A y B se hacen de cuatro metales diferentes I, II, III, IV. De acuerdo con las especificaciones siguientes:

Aleación A	Especificaciones
	no mayor a 0.8 de I
	no mayor a 0.3 de II
	no mayor a 0.5 de IV
Aleación B	Especificaciones
	entre 0.4 y 0.6 de II
	al menos 0.3 de III
	a lo mas 0.7 de IV

Los cuatro metales se extraen de diferentes minerales cuyos constituyentes en porcentaje de estos metales, cantidad disponible y costo por tonelada se tabulan como siguen: Suponiendo que lo,s precios de venta de las aleaciones A y B son

Mineral	Cantidad máxima (tons)	Constituyentes (Por centaje)					Precio (Ton)
		1	2	3	4	otros	
I	1000	20	10	30	30	10	30
II	2000	10	20	30	30	10	40
III	3000	5	5	70	20	0	50

200 y 300 unidades monetarias por tonelada. Formule el problema como un modelo de programación lineal eligiendo, la función objetiva apropiada, que hará el mejor uso de la información dada [Sugerencia: sea X_p la cantidad (en toneladas) del metal i (i = I, II, III, IV) obtenida de mineral j, (j = 1, 2, 3) y asignada en la aleación k-estima (k = A, B)

12. Un jugador interviene en un juego que requiere dividir su dinero entre cuatro elecciones diferentes. El juego tiene tres resultados. La tabla siguiente da la ganancia o perdida correspondiente por unidad monetaria depositada en cada una de las cuatro elecciones para los tres resultados:

Suponga que el jugador tiene un total de 500 dólares, con los cuales puede jugar únicamente una vez. El resultado exacto del juego no se conoce a prior, y en vista de esta incertidumbre el jugador decide hacer la asignación que maximizaría

Resultado	Ganancia o Perdida			
	1	2	3	4
I	-3	4	-7	15
II	5	-3	9	4
III	3	-9	10	-8

su rendimiento mínimo. Formule el problema como un modelo de programación lineal. (Sugerencia: El rendimiento del jugador puede ser negativo, cero o positivo).

13. La Sta. Cristina Polo es una estudiante emprendedora de tercer año de la Javierana. Comprende que: "solo el trabajo y nada de diversión hacen de Cristina una muchacha aburrida". Como resultado, Cristina quiere distribuir su tiempo disponible, de alrededor de 10 horas al día, entre el trabajo y la diversión. Calcula que, el juego es dos veces más divertido que el trabajo. También quiere, estudiar por lo menos tanto como jugar. Sin embargo, Cristina comprende, que si quiere terminar todas sus tareas universitarias, no puede jugar más de cuatro horas al día. ¿Cómo debe distribuir Cristina su tiempo para maximizar su satisfacción tanto en el trabajo como en el juego?.

14. Tamy debe trabajar por lo menos 20 horas a la semana para completar su ingreso mientras asiste a la Universidad. Tiene la oportunidad de trabajar en dos tiendas al detalle: en la tienda 1 Tamy puede trabajar entre 5 y 12 horas a la semana, y en la tienda 2 le permiten trabajar entre 6 y 10 horas. Ambas tiendas pagan el mismo salario por hora. De manera que Tamy quiere basar su decisión acerca de cuántas horas debe trabajar en cada tienda en un criterio diferente; el factor del estrés en el trabajo. Basándose en entrevistas con los empleados actuales, Tamy calcula que, en una escala de 1 a 10, los factores del estrés son de 8 y 6 en las tiendas 1 y 2, respectivamente. Debido a que el estrés aumenta por hora, ella supone que el estrés total al final de la semana es proporcional al número de horas que trabaja en la tienda. ¿Cuántas horas debe trabajar en cada tienda?

15. Dos productos se fabrican en un centro de industrial. Los tiempos de producción por unidad de los productos A y B son de 10 y 12 minutos. El fabricante vende entre 150 y 180 respectivamente. El tiempo regular total de la maquina es de 2.500 minutos por día. En un día cualquiera, es 200 unidades del producto A, pero no más de 45 unidades del producto B. Se pueden emplear horas extras para satisfacer la demanda a un costo adicional de 0.50 de dólar por minuto.

    a) Suponiendo que las utilidades por unidad de los productos A y B son de 6 y 7.50 dólares, respectivamente, formule un modelo y determine el nivel óptimo de fabricación para cada producto; así como, cualesquier número de horas extras necesarias en el centro.

    b) Si el costo por minuto de hora extra se incrementa a 1.50 dólares, ¿la compañía debe utilizar horas extras?

16. La tienda de comestibles Dimitri vende dos tipos de bebidas no alcohólicas: la marca de sabor de cola A_1 y la marca propia de la tienda, Dimitri de colas, más económica. El margen de utilidad en la bebida de cola A_1 es de alrededor de 5

centavos de dólar por lata, mientras que la de la bebida de cola Dimitri suma una ganancia bruta de 7 centavos por lata. En promedio, la tienda no vende más de 500 latas de ambas bebidas de cola al día. Aún cuando A_1 es una marca más conocida, los clientes tienden a comprar mas latas de marca Dimitri, porque es considerablemente más económica. Se calcula que la venta de la marca Dimitri superan a las de la marca A_1 en una razón de 2 a 1 por lo menos. Sin embargo, Dimitri vende, como mínimo, 100 latas de A_1 al día.

a) ¿Cuantas latas de cada marca debe tener en existencia la tienda diariamente para maximizar su utilidad?

b) Determine la razón de las utilidades por lata de A_1 y Dimitri que mantendrá inalterada la solución de (a).

17. Mueblina emplea a cuatro carpinteros durante 10 días para ensamblar mesas y sillas. Se requieren 2 horas para ensamblar una mesa y 30 minutos para ensamblar una silla. Por lo común, los clientes compran entre cuatro y seis sillas con cada mesa. Las utilidades son de 13.5 dólares por mesa y 5 dólares por silla. La compañía opera un tumo de 8 horas al día:

    a) Determine gráficamente y por el método simplex la mezcla de producción óptima de los 10 días.

    b) Determine el rango de la razón de utilidades por unidad, que mantendrá inalterada la optima (a).

    c) Si las utilidades actuales por cada mesa y silla se reducen 10 por ciento, utilice la respuesta en (b) para mostrar la forma en la cual este cambio afecta la solución optima obtenida en (a).

    d) Si las utilidades actuales por cada mesa y silla cambia a 12 y 2.5 dólares, utilice el resultado de sensibilidad en (b) para determinar si cambiara o no la solución en (a).

18. Electrolux produce dos tipos de motores eléctricos, cada uno en una línea de ensamble separada. Las respectivas capacidades diarias de las dos líneas son de 600 y 750 motores. El motor tipo A emplea 10 unidades de cierto componente electrónico y el motor tipo B solo utiliza 8 unidades. El proveedor del componente puede proporcionar 8.000 piezas al día. Las utilidades por motor para los tipos A y B son de 60 y 40 dólares, respectivamente. Determine la mezcla optima para la producción diaria.

19. El Supermaxi tiene un contrato para recibir 60.000 libras de tomates maduros a 7 centavos de dólar por libra, con las cuales produce jugo de tomate enlatado, así como pasta de tomate. Los productos enlatados se empacan en cajas de 24 latas. Una lata de jugo requiere una libra de tomates frescos y una lata de pasta solo requiere 1/3 de libra. La participación de mercado de la compañía se limita a 2.000 cajas de jugo y 6.000 cajas de pasta. Los precios de mayoreo por caja de jugo y de pasta son de 18 y 9 dólares, respectivamente:

    a) Desarrolle un programa de producción óptima para Supermaxi.

    b) Determine la razón del precio por caja con el precio por caja de pasta que permitirá que Supermaxi produzca más cajas de jugo que de pasta. limita a

2.000 cajas de jugo y 6.000 cajas de pasta. Los precios de mayoreo por caja de jugo y de pasta son de 18 y 9 dólares, respectivamente

20. Mueblina ensambla dos tipos de gabinetes de cocina de madera precortada: regulares y de lujo. Los gabinetes regulares están pintados de blanco y los de lujo están barnizados. Tanto la pintura como el barnizado se llevan a cabo en un departamento. La capacidad diaria del departamento de ensamble puede producir un máximo de 200 gabinetes regulares y 150 gabinetes de lujo. El barnizado de un gabinete de lujo se lleva el doble de tiempo que pintar uno regular. Si el departamento de pintura /barnizado se dedica únicamente a las unidades de lujo, terminaría 180 unidades diarias. La compañía calcula que las utilidades por unidad de los gabinetes regulares y de lujo son de 100 y 140 dólares, respectivamente.

    a) Formule el problema como un programa lineal y encuentre el programa de producción óptima por día.

    b) Supongamos que, debido a la competencia, las utilidades por unidad de las unidades regulares y de lujo deben reducirse a 80 y 110 dólares, respectivamente. Utilice el análisis de sensibilidad para determinar si la solución optima en (a) se mantiene inalterada o no.

21. Se producen dos tipos de sombreros estilo vaquero. El sombrero tipo 1 requiere el doble de tiempo de trabajo que el de tipo 2. Si todos los sombreros producidos únicamente son del tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros al día. Los limites diarios del mercado son de 150 y 200 sombreros de los tipos 1 y 2, respectivamente. La utilidad del sombrero tipo 1 es de 8 dólares y la del sombrero tipo 2 es de 5 dólares:

    a) Utilice la solución gráfica y el método simples para determinar el número de sombreros de cada tipo que se debe producir

    b) Determine el valor de incrementar la capacidad de producción de la compañía en un sombrero tipo 2 y el rango para la cual es aplicable este resultado

    c) Si el límite de la demanda del sombrero tipo 1 disminuye a 120, determine el efecto correspondiente en la utilidad óptima, utilizando el valor unitario del recurso.

    d) ¿Cuál es el incremento en el valor por unidad en la participación de mercado del sombrero tipo 2? ¿En cuanto se puede incrementar la participación de mercado, al mismo tiempo que rinde el valor calculado por unidad?

22. Una compañía fabrica dos productos, A y B. El volumen de ventas de A es por lo menos 80 por ciento de las ventas totales de A y B. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 100 unidades de A por días. Los dos productos utilizan una materia prima, cuya disponibilidad máxima diaria se limita a 24 Iibras al día. Las proporciones de utilización de la materia prima son 2 Iibras para cada unidad de A y 4 libras para cada unidad de B. Los precios unitarios de A y B son de 20 y 50 dólares, respectivamente.

    a) Determine la mezcla óptima de los dos productos.

   b) Utilice el análisis de sensibilidad para determinar el efecto de cambiar la demanda máxima del producto A por ± 10 unidades.

23. Una compañía que opera 10 horas al día fabrica cada uno de los productos en tres procesos en secuencia. La siguiente tabla resume los datos del problema:

   a) Determine la mezcla óptima de los dos productos.

   b) Supongamos que, se están considerando los tres procesos para una expansión y usted necesita determinar su prioridad. Diseñe una forma lógica para lograr esta meta

24. Un almacén Familiar puede anunciar sus productos en la radio o la televisión locales. El presupuesto para anuncios esta limitado a 10.000 dólares al mes. Cada minuto de anuncios por radio cuesta 154 dólares y cada minuto de comerciales por televisión cuesta 300 dólares. A la empresa le agrada utilizar los anuncios por radio por lo menos el doble de los anuncios por televisión. Por lo pronto, no es práctico utilizar más de 400 minutos de anuncios por radio. La experiencia pasada muestra que se calcula que los anuncios por televisión son 25 veces más efectivos que los de la radio.

   a) Determine la asignación óptima del presupuesto para los anuncios por radio y televisión.

   b) Determine el valor por unidad de incrementar el límite mensual en la publicidad por radio.

   c) Si el presupuesto mensual se aumenta a 15.000 dólares, utilice la definición de valor de la unidad para determinar la medida resultante de la efectividad publicitaria.

25. La división de Educación Continua ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Los cursos que ofrece generalmente son de dos tipos: prácticas, como trabajos en madera, procesador de palabras y mantenimiento de automóviles; y humanísticos, como historia, música y bellas artes. Para satisfacer las demandas de la comunidad, es necesario ofrecer por lo menos 10 cursos de cada tipo, cada semestre. La división calcula que los ingresos por ofrecer esos cursos prácticos y humanísticos son aproximadamente de 500 y 1000 dólares por curso, respectivamente:

   a) ¿Como debe asignar la división sus cursos?

   b) Determine el ingreso, si se incrementa el requerimiento mínimo de los cursos prácticos con un curso más.

   c) Determine el ingreso si se incrementa el requerimiento mínimo de los cursos humanísticos con un curso más

26. Una camisera Inglesa fabrica camisas para caballero y blusas para damas, para Almacenes, como el, El Globo. Este aceptara toda la producción que le proporcione la camisera Inglesa. El proceso de producción que incluye corte, costura y empacado. La camisera Inglesa emplea a 25 trabajadores en el Departamento de corte, a 35 en el Departamento de costura y a 5 en el departamento de empacado. La fábrica trabaja un turno de 8 horas, solo 5 días a la semana. La siguiente tabla proporciona los requerimientos de tiempo y las utilidades por unidad para las dos prendas:

Producto	Minutos por Unidad			
	Corte	Costura	Empacado	Utilidad
Camisas	20	70	12	3
Blusas	60	60	4	3.5

a) Determine el programa de producción semanal óptimo.

b) Si los requerimientos mínimos diarios de Almacenes el Globo son de 2.000 camisas y 3.000 blusas, ¿es posible que la camisera Inglesa proporcione estas cantidades con su semana de trabajo actual de 5 días? De no ser así, ¿puede usted sugerir alguna forma para que satisfaga estos requerimientos? ¿Cual será el programa de producción óptimo en este caso?

c) Determine el valor por hora de los procesos de corte, costura y empacado.

d) Supongamos que, se puedan trabajar horas extra en los departamentos de corte y costura, ¿cual debe ser la tarifa máxima por hora que debe pagar la fábrica por las horas extra?

27. Se fabrican dos productos de limpieza para el hogar, A y B procesando dos tipos de materia prima, I y II. El procesamiento de una unidad de materia prima I cuesta 8 dólares y produce.5 unidad de solución A y .5 unidad de solución B. Además, el procesamiento de una unidad de materia prima II cuesta 5 dólares y produce 6 unidad de solución A y 4 unidades de solución B. La demanda diaria de la solución A es entre 10 y 15 unidades y la de la solución es entre 12 y 20 unidades.

    a) Encuentre la mezcla óptima de A y B que se debe producir.

    b) Determine el valor por cambio de unidad en los límites de la demanda de los productos A y B.

28. Una línea de ensamble que consta de tres estaciones consecutivas produce dos modelos de radios: A y B. La siguiente tabla proporciona los tiempos de ensamble para las tres estaciones de trabajo. El mantenimiento diario de las estaciones 1,

Estación de trabajo	Minutos por Unidad	
	A	B
1	6	4
2	5	5
3	4	6

    2 y 3 consume 10 por ciento. 14 por ciento y 12 por ciento respectivamente, del máximo de 480 minutos disponibles para casa estación, cada día.

    a) La compañía desea determinar la mezcla optima de productos que minimizara los tiempos inactivos (o no utilizados) en las tres estaciones de trabajo.

    b) Determine el valor de disminuir 1 punto de porcentaje el tiempo diario de mantenimiento para cada estación.

Dados los siguientes problemas primales, plantear el problema dual y resolverlo, hallar los valores de las variables fundamentales y de la función objetivo del dual.

29. Almacenes Chimborazo fabrica bolsos, estuches para afeitar y mochilas. La fabricación de los tres productos requiere piel y material sintético y la piel es la materia prima limitante. El proceso de fabricación utiliza dos tipos de mano de obra calificada: costura y acabado. La siguiente tabla proporciona la disponibilidad de los recursos, su utilización en los tres productos y las utilidades por unidad: Formule el problema como un programa lineal y encuentre la solución

Recurso	Requerimientos por unidad			Disponibilidad diaria
	Bolsa	Mochila	Estuche	
piel ($pies^2$)	2	1	3	42
Costura (horas)	2	1	2	40
Acabado (horas)	1	0.5	1	45
Precio venta (dólares)	24	22	45	

óptima del problema dual. Después indique si los siguientes cambios en los recursos mantendrán factible la solución actual. Para los casos donde se mantiene la factibilidad, determine la nueva solución óptima del primal (valores de las variables y de la función objetivo).

a) La piel disponible se incrementa a 45 $pies^2$.

b) La piel disponible se disminuye en 1 pie^2.

c) Las horas de costura disponibles se cambian a 38 horas.

d) Las horas de costura disponibles se cambian a 46 horas.

e) Las horas de acabado disponibles se disminuyen a 15 horas.

f) Las horas de acabado disponibles se incrementan a 50 horas.

30. Electrolux produce los modelos de artefactos electrónicos que utilizan resistores, capacitores y chips. La siguiente tabla resume los datos de la situación:

Producto	Requerimiento por unidad		Disponibilidad maxima por unidad
	Modelo I	Modelo II	
Resistor	2	3	1200
Capasitor	2	1	1000
Chips	0	4	800
Utilidad por unidad	3	4	

a) Encuentre la solución del primal y el dual.

b) Si el número disponible de resistores se incrementa a 1.300 unidades, encuentre la nueva solución óptima.

c) Si el número disponible de chips se reduce a 350 unidades, ¿podrá usted determinar la nueva solución óptima directamente de la información proporcionada?

d) Un nuevo contratista ofrece vender a almacenes el Foco resistores adicionales a 40 centavos de dólar cada uno; pero solo si, el Foco compra por lo menos 500 unidades. ¿Debe aceptar la oferta el Foco?.

31. Estatex tiene un presupuesto diario de 320 horas de mano de obra y 350 unidades de materia prima para fabricar dos productos. De ser necesario, la compañía puede emplear hasta 10 horas diarias de tiempo extra de mano de obra a un costo adicional de 2 dólares por hora. Se necesitan una hora de mano de obra y tres unidades de materia prima para producir una unidad del producto 1, y dos horas de mano de obra y una unidad de materia para producir una unidad del producto 2. La utilidad por unidad del producto 1 es de 10 dólares y la del producto 2 es de 12 dólares. Sea que X_1 y X_2 defina el numero diario de unidades producidas de los productos 1 y 2 y que X_3 sea las horas extras diarias utilizadas:

    a) Determine la solución óptima del problema primal y dual.

    b) Determine los precios duales y los rangos de aplicabilidad de sus recursos asociados.

    c) Examine los precios duales de las horas de mano de obra (restricción 1) y de las horas extra (restricción 3). ¿No deberían ser iguales estos dos valores?

    d) En la actualidad, Estatex paga 2 dólares adicionales por hora extra. ¿Cuanto es lo más que debe estar dispuesta a pagar la compañía?.

    e) Si Estatex puede adquirir diariamente 100 unidades adicionales de materia prima a 1.50 dólares por unidad, ¿aconsejaría usted a la compañía que lo hiciera?.

    f) Suponiendo que, Estatex esta experimentado una escasez de materia prima y que no puede adquirir más de 200 unidades al día, determine la solución óptima asociada.

    g) Suponiendo que, Estatex no puede utilizar más de 8 horas extras diariamente, encuentre la nueva solución optima.

Bibliografía

[1] Zakoswki Wojciech *Matematyka*, editorial Técnico-científica,Polonia, Lodz 2006.

[2] Steinhaus Hugon *105 Zadan z Matematiki*, Gis Wroclaw 2005.

[3] Roman Leitner y Wojciech Zakowski *Matematyka* editorial técnico-científico, Varsovia, 1980.

[4] Roman Leitner *Zaris Matematyki Wyzszej*, editorial técnico-científico, Varsovia, 1981.

[5] H. Hall y R. Knight *Algebra Superior*, editorial Hispano Americana, Mexico, 1980,2005,2015.

[6] Jose Luis Mataix *Mil Problemas de Aritmetica y Algebra*, editorial Dossat, Madrit, España, 1970,1983,2015.

[7] Andrzej Flisowski y Radoslaw Grzymkowski *Matematyka*, Polonia, Gliwice, 2002.

[8] Richard Johnsonbaugh *Matemáticas Discretas* editorial Iberoaméricana, Mexico,2012.

[9] Oswin Crespo *Ejercicios y Problemas de Algebra* editorial Alameda, España, Madrid 1970.

[10] Izydor Dziubinski y Lucjan Siewierski *Elementy Matematyki Wyzszej* editorial Politechniki lodzkiej, Polonia, Lodz 1980, 1997.

[11] Waclaw Leksinski Bohdan Macukow y Wojciech Zakowski *Matematyka dla maturzystow* editorial Técnico-científico Varsovia, 1991

[12] Raymond A. Barnett *Algebra y Trigonométria* editorial McGraw-Hill, Mexico,1988.

[13] Yakovliev G. N *Algebra y Principios del Análisis* editorial MIR, Moscu 1985.

[14] Jack R. Britton y Ignacio Bello editorial Latinoamericana, Mexico, 1979.

[15] Norbert Drobka y *Matematyka* editorial Técnico-científico,Polonia, Varsovia 1991

[16] Popov A. Danko P. y Kozhevnikova *Matemáticas Superiores* editorial MIR, Moscu, 1985.

[17] Demidovich B. Yampolski A. Efimov A. Bolgov V. y Pospelov S. *Problemas de las Matemáticas Superiores* editorial MIR, Moscu 1981.

[18] Deborah Hughes y Andrew M. Gleason *Cálculo* editorial Continental, Mexico,2000.

[19] Lech Wlodarski y Ewa Hens *Matematyka na Wyzsze Uczelnnie* editorial Técnico-científico, Polonia, Varsovia, 2005.

[20] Grimaldi Ralph *Matemáticas Discretas* editorial Iberoamericana, Mexico,2015.

[21] Sullivan Michael *Precálculo* sexta edision, Mexico, 2009.

[22] C. Liu *Matemáticas Discretas* editorial McGraw-Hill, Mexico, 2007.

[23] Macukow Bohdan *Matematyka w Zadaniach* editorial Técnico-científica, Polonia, Varsovia,2008.

[24] Arcos Garcia Joe *Problemas de Lógica*; *Mil Problemas en Matemática* editorial ESPE, Ecuador, Quito,2008, 2009.

[25] kielbase Andrzej *zadan z matematyki* editorial Técnico-científico Polonia, Varsovia 2015.

[26] W. Krysicki y L. Wlodarski *Analiza Matematyczna w Zadaniach* editorial Técnico-científico, Polonia, Varsovia,2015.

[27] Edwin Dimitri Nieto Guerrero *Cálculo de Proposiciones y de Predicados* editorial Casadelpolo, Ecuador, Manabi, 2016.

[28] Edwin Dimitri Nieto Guerrero *Compendio de Matemáticas Volumen I* editorial Mawil Publicaciones de Ecuador, 2018.

[29] Bartosznski R. Czaplinski W. Dziubinski I. Kacki E. Kolupa M. Otto E. Srodka T. Swiatkowski T. Waliszewski W y Wlodarski L *Poradnik Matematyczny* editorial Técnico-científico Polonia, Varsovia 1982.

[30] Piskunov N. *Cálculo Diferencial e Integral* editorial MIR, Moscu 1973,1985,2006.

[31] Kurosch A.G. *Curso de Algebra Superior* editorial MIR, Moscu 1981, 1998.

[32] Kudriavtsev L. D. *Curso de Análisis Matemático* editorial MIR, Moscu, 1984, 2010.

COMPENDIO DE MATEMÁTICAS

VOLUMEN III

Edwin Dimitri Nieto Guerrero
Fernando Alonso Vaca de la Torre
Eduardo Lázaro Rodríguez Rodríguez

ISBN: 978-9942-826-22-0

9 789942 826220

Crossref

CÁMARA ECUATORIANA DEL LIBRO

MAWIL Publicaciones Impresas y Digitales