MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

1 EDICIÓN

Q.F. Anita Dora Medina Bailón MAE.
Ing. Rubén Bernardo Manrique Pincay
CPA. Walter Giovanni Villamar Piguave MAE.
Ec. Eduardo Erasmo Morán Quijije Msc.
Ing. Jorge Enrique Ordoñez García Msc.
Ing. Jesús Mauricio Mora Roca

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

1 EDICIÓN

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

AUTORES

Q.F. Anita Dora Medina Bailón MAE.
Magister en administracion de empresas; Quimica y farmaceutica
Escuela Superior Politecnica del Litoral
amedinab@espol.edu.ec

Ing. Rubén Bernardo Manrique Pincay
Ingeniero en Ciencias Empresariales, Ingeniero en Petróleo
Universidad de Guayaquil
ruben.manriquep@ug.edu.ec

CPA. Walter Giovanni Villamar Piguave MAE.
Magister en Administración de Empresas mención Recursos Humanos y Marketing; Contador Público Autorizado; Licenciado en Ciencias de la Educación mención Informática; Profesor de Segunda Enseñanza Especialización Informática; Tecnólogo Pedagógico en Informática Especialización Informática
Universidad de Guayaquil
walter.villamarpi@ug.edu.ec

Ec. Eduardo Erasmo Morán Quijije Msc.
Economista; Máster en Docencia y Gerencia en Educación Superior
Universidad de Guayaquil
eduardo.moranq@ug.edu.ec

Ing. Jorge Enrique Ordoñez García Msc.
Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones;
Magister en Automatización y Control Industrial;
Máster en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachiller
Universidad de Guayaquil
jordonez.garcia@ug.edu.ec

Ing. Jesús Mauricio Mora Roca
Ingeniero en Logística y Transporte
Escuela Superior Politécnica del Litoral
jemamora@espol.edu.ec

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

1 EDICIÓN

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

REVISORES

PhD. Parrales Poveda María Leonor Mg. Dpl.
Doctor en Ciencias Pedagógicas; Magister en Administración de Empresas; Magister en Docencia Universitaria e Investigación Educativa; Diplomado en Autoevaluación y Acreditación Universitaria; Economista
Universidad Estatal del Sur de Manabí
maria.parrales@unesum.edu.ec

PhD. Baque Cantos Miguel Augusto Mg. Dpl.
Doctor en Administración;
Magister en Docencia Universitaria e Investigación Educativa;
Diplomado en Autoevaluación y Acreditación Universitaria;
Ingeniero Comercial
Universidad Estatal del Sur de Manabí
miguel.baque@unesum.edu.ec

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

DATOS DE CATALOGACIÓN

AUTORES:
Q.F. Anita Dora Medina Bailón MAE.
Ing. Rubén Bernardo Manrique Pincay
CPA. Walter Giovanni Villamar Piguave MAE
Ec. Eduardo Erasmo Morán Quijije Msc.
Ing. Jorge Enrique Ordoñez García Msc.
Ing. Jesús Mauricio Mora Roca

Título: Matemáticas aplicadas a la economía y los negocios

Descriptores: Matemáticas; Estadística; Finanzas; Economía de la Empresa; Ciencias Administrativas.

Edición: 1era

ISBN: 978-9942-787-63-7

Editorial: Mawil Publicaciones de Ecuador, 2019

Área: Educación Superior

Formato: 148 x 210 mm.

Páginas: 188

DOI: https://doi.org/10.26820/978-9942-787-63-7

Texto para Docentes y Estudiantes Universitarios

El proyecto didáctico *Matemáticas aplicadas a la economía y los negocios*, es una obra colectiva creada por sus autores y publicada por *MAWIL*; publicación revisada por el equipo profesional y editorial siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento de publicaciones de *MAWIL* de New Jersey.

*Director General: MBA. Vanessa Pamela Qhisphe Morocho Ing.
*Dirección Central MAWIL: Office 18 Center Avenue Caldwell; New Jersey # 07006
*Gerencia Editorial MAWIL-Ecuador: Aymara Galanton.
*Editor de Arte y Diseño: Lic. Eduardo Flores

PROLOGO

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales
www.mawil.us

El texto presente es parte del esfuerzo realizado en la labor docente, a través de la revisión de los programas de matemática dirigidos a los estudiantes de ciencias económicas y administrativas cuya exigencia es afianzar los conocimientos que se obtienen con el estudio de funciones, derivadas e integrales como parte del cálculo diferencial e integral, complementados con el estudio de la recta y algebra matricial. Todos los cuales aportan a la economía y a las ciencias sociales aplicaciones que resultan de aprovechamiento máximo a los participantes de la educación universitaria, cuyo campo de especialización toma a la matemática como una herramienta de utilidad.

Este libro se escribe teniendo en cuenta características intermedias, donde los ejercicios resueltos como ejemplos se desarrollaron siguiendo una serie de procedimientos basados en aspectos de la matemática básica, sin llegar a un formalismo extremo, de modo que el lector pueda hacer un seguimiento de los mismos y pueda concienciar que la matemática es una herramienta más. La disposición de los ejercicios resueltos seguidos de los propuestos ha sido en la búsqueda de la claridad en la solución y la alternativa de poder aplicar los conocimientos adquiridos de lo desarrollado en los ejercicios siguientes.

Al inicio de los capítulos se incluyen algunos tópicos referentes a pasajes históricos, con la intención de que el lector tenga conocimiento sobre conceptos inherentes y sus principales protagonistas. Es importante también destacar la presencia de problemas para ilustrar las aplicaciones de ciertos conceptos expuestos en la mayoría de los capítulos, con los cuales se le exhorta al estudiante la utilización de la herramienta matemática, con el previo dominio de los alcances y limitaciones de los instrumentos matemáticos, conociendo sus facetas teóricas y teoremas relacionados.

La escogencia de cada tema en este texto, ha sido tomando en cuenta tanto el nivel educativo de los participantes como también aquellos elementos matemáticos básicos que son de especial interés a estudiantes que se especializan en ciencias económicas y sociales, utilizando aplicaciones particularizadas a tales áreas y en complemento a las mismas.

Se ha dividido el presente libro en seis capítulos, respetando el orden lógico de los temas expuestos que se visualizarán en bloques de contenidos, con el objeto de facilitar el estudio independiente que pueda hacerse de cada tópico en particular.

En el **CAPÍTULO I**, se presenta una breve introducción a la geometría analítica, destacando de manera narrativa la presencia de la misma en el origen del cálculo. Se define segmento de recta, la recta, la ecuación de la recta y se identifican sus componentes a través de la gráfica de la recta.

En el **CAPÍTULO II**, se presentan las funciones algebraicas definiéndolas y clasificándolas. Así mismo, en su clasificación se precisa la relaciones de algunas de ellas con las variables económicas y se muestran algunas aplicaciones en el campo de la economía y la administración.

En el **CAPÍTULO III**, se encuentra lo relativo al cálculo diferencial, iniciando con el estudio de límite y continuidad; para dar paso al concepto y definición de derivada, se aborda la idea geométrica de la misma.. Acá también, se disponen no en su mayoría las técnicas de derivación, aplicación de la derivada en la construcción de gráficas, derivadas parciales y multiplicadores de Lagrange.

El **CAPÍTULO IV**, trata sobre el cálculo integral. En él se define la integral indefinida; se dispone su simbología, sus propiedades y reglas básicas de integración. Tambien se define integral definida y se disponen sus aplicaciones en el cálculo de área y su correspondiente al área de la economía.

El **CAPÍTULO V**, se dedica al estudio de las ecuaciones diferenciales, iniciando la definición de diferencial, para luego definir ecuación diferencial y clasificarlas.

En el **CAPÍTULO VI**, se presentan casos específicos del extenso campo de las matrices, para seguidamente disponer propiedades generales y operaciones básicas con matrices, producto matricial y citan algunos casos particulares de matrices y determinantes.

En cada uno de los capítulos se disponen ejercicios resueltos como ejemplos para la comprensión de los temas, y ejercicios para que sean resueltos por el lector con miras a incrementar la habilidad del mismo en la resolución de ejercicios y problemas matemáticos aplicables al área de estudio.

Los Autores

ÍNDICE

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales
www.mawil.us

CAPÍTULO I

INTRODUCCION A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

MAWIL
Publicaciones Impresas
y Digitales
www.mawil.us

1.1. Definición de geometría analítica y segmento rectilíneo

El siglo XVII fue muy prolífico para la ciencia en general y en especial para la Matemática y la Física. Es el siglo de R. Descartes, P. Fermat, Galileo Galilei, Ch. Huyghens, W. G. Leibniz e I. Newton, entre otros eminentes científicos. A dos de ellos, R. Descartes y P. Fermat, se les atribuye el mérito de ser los fundadores de la geometría analítica.

En el siglo XVII se producirá la conjunción entre el álgebra y la geometría, dando nacimiento a una nueva rama de la matemática: la geometría analítica. Desde las más remotas civilizaciones que crearon la matemática: los sumerios, los babilonios y los egipcios pasando por los griegos, y en las etapas posteriores el álgebra y la geometría se desarrollaron de manera independiente una de la otra. De un lado estaba la geometría y del otro la aritmética y el álgebra, esta última con un desarrollo más lento que el de la geometría, en parte debido a la falta de una notación adecuada.

El simbolismo algebraico que hoy nos es tan familiar desde la escuela básica, como son los símbolos de las operaciones más elementales: +, -, x, ÷, √, an, las letras para denotar las incógnitas, tardaron muchos siglos en ser creados. La lenta evolución de la notación en álgebra fue una traba para su desarrollo cuando la comparamos con la geometría, ya que el mismo era descrito en latín.

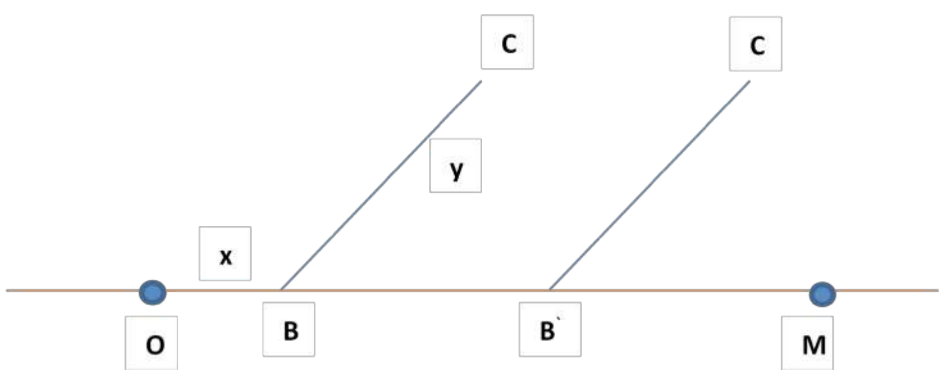
Se puede concluir, que mientras el álgebra y la geometría viajaban por caminos separados, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando estas dos ciencias se unieron, se intercambiaron una fresca vitalidad y desde entonces marcharon con paso rápido hacia la perfección. Debemos a Descartes la aplicación del álgebra a la geometría, una aplicación que ha proporcionado la clave para los mayores descubrimientos en todas las ramas de la matemática. Esta breve reseña ha sido tomada textualmente del Módulo II, Matemática I de la UNA.

Geometría Analítica

La geometría analítica es una de las ramas de la matemática que posee como objeto de estudio de manera profunda a las proporciones y singularidades de las figuras geométricas (sus distancias, sus áreas, puntos de intersección, ángulos de inclinación, puntos de división, volúmenes, entre otras) ubicadas en un plano o en el espacio

Por otro lado se hace mención que la misma como disciplina, tiene por objeto analizar las figuras geométricas a partir de un sistema denominado, sistema de coordenadas, a través de la aplicación de métodos propios del ámbito del álgebra y del análisis matemático; de allí que pretende también, obtener la ecuación de los sistemas de coordenadas en función de su lugar geométrico.

Para tener conocimiento del concepto de segmento rectilíneo, es importante destacar el aporte de Descartes en este sentido. Utilizó una recta OM como una línea de base (llamada eje de referencia) con origen en un punto. O que es el origen de segmentos variables y, de esta manera los valores de x son longitudes de estos segmentos y los valores de y corresponden a longitudes medidas desde la recta OM sobre segmentos que forman un cierto ángulo constante con dicha recta.



Segmento

En geometría segmento o segmento rectilíneo, hace referencia a una determinada porción de una recta debidamente limitada por dos puntos conocidos como extremos. También es conocido como segmento, aquella parte de un círculo contenido entre un arco y una cuerda. En la figura anterior OM representa un segmento rectilíneo.

1.2. Ecuación de la recta

Para presentar la expresión que corresponde a la ecuación de la recta, es i portante en este sentido mostrar la definición de recta:

Definición de Recta

Se define una recta como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos. También conocida como la figura mediatriz del segmento que une dos puntos de un plano.

Sean dos puntos del plano A(a,b) y B(c,d), tales que c≠a y P(x,y) un punto sobre la recta, la distancia entre A, B y P denotada por:

$$d(A,P) = d(B,P)$$

$$\sqrt{(x-a)^{(2)}+(y-b)^{2}}=\sqrt{(x-c)^{(2)}+(y-d)^{2}}$$

Que al desarrollar y simplificar resulta:

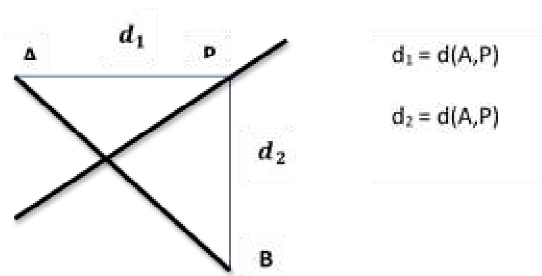
$$(2c-2a)x + (2d-2b)y + a2 + c2 - b2 - d2 = 0$$

Si A = 2c-2a, B = 2d-2b y C = a2 + c2 – b2 – d2 se obtiene la ecuación general de la recta:

$$Ax + By = 0$$

Supongamos c = a y y = k , corresponde a la recta horizontal; Supongamos b = d y x = k, corresponde a la recta vertical.

Para comprender lo anterior, observemos la siguiente figura:



Componentes de la ecuación de la recta

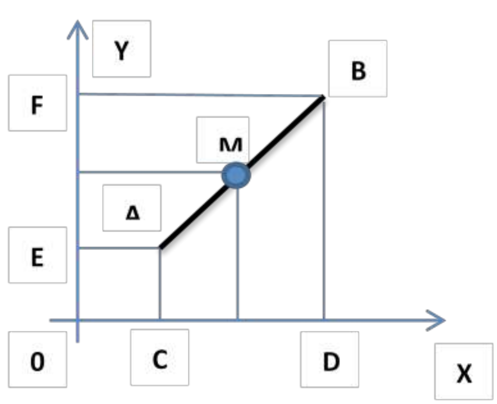
Punto

Sean A(x1,y1) y B(x2,y2) dos puntos del plano. Si al proyectar un segmento (AB)¯sobre el eje OX , se determina otro segmento (CD)¯; verificándose un punto en la recta que recibe el nombre de punto medio en este caso. Algebraicamente se expresa:

$$X_1 + \frac{1}{2}(X_2 - X_1) = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

Por otro lado, el segmento (AB)¯sobre el eje OY se obtiene el segmento (EF) ¯con punto medio $\frac{y_1 + y_2}{2}$

Con la figura siguiente podemos ilustrar lo antes descrito.



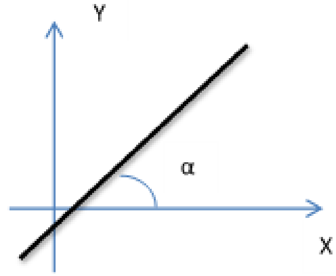
Disponiendo como coordenadas $\left(\frac{x_1+x_2}{2}.\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ = M, siendo M el punto medio del segmento de recta dada.

Pendiente

Se denomina pendiente de una recta a la tangente del ángulo de inclinación; siendo el ángulo de inclinación de una recta, el ángulo ente la dirección positiva del eje de coordenadas OX y la recta, medido en sentido antihorario.

La pendiente de una recta se define algebraicamente a través de dos puntos cualesquiera P(x1,y1) y Q(x2,y2), tales que x1 $\neq$ x2 como:

$$m = \tan \propto = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ecuaciones de la recta:

General:

Ax + By = 0

Conocidos un punto y su pendiente:

Sea Q(x1,y1) el punto dado y P(x,y) cualquier otro sobre la recta, luego $m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ de donde $y - y_1 = m(x - x_1)$

Si m toma valores en R se tendrá un haz de rectas o familia de rectas que pasan por el punto (x_1,y_1). Si el punto es (0,b) su ecuación es: y=mx + b , donde b es la ordenada del punto de intersección entre la recta y el eje OY.

Conocido dos puntos y recta vertical:

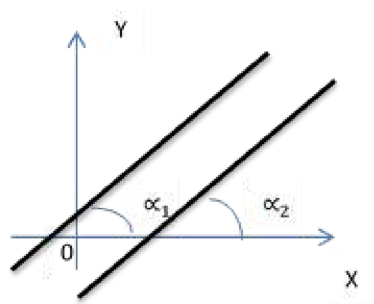
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ con } x \neq x_1$$

x=c para todo cϵR

1.4. Paralelismo y perpendicularidad en la recta

Paralelismo:

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen igual ángulo de inclinación.

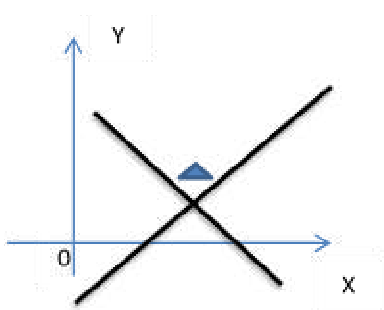


$\propto_1 = \propto_2$

Dos rectas son paralelas si y solo si tienen igual pendiente, o bien ambas son paralelas al eje OY (verticales).

Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si forman entre ellas ángulos de 90 grados.



Dos rectas de pendientes m_1 y m_2, son perpendiculares si y solo si $m_1 . m_2 = -1$, o bien una es vertical y la otra es horizontal.

1.5. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

Recta

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (-5,3) y tiene pendiente 4.

Para la solución tomaremos en cuenta los datos presentados, el punto por donde pasa la recta y su pendiente y lo sustituiremos en la formula,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 4(x - (-5))$$

$$y - 3 - 4x - 20 = 0$$

Para escribirla en su forma general:

$$4x - y + 23 = 0$$

2. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,2) y (-1,3).

Teniendo dos puntos como datos, usaremos para sustituir tales datos la formula,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{3 - 2}{-1 - 2}(x - 2)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y - 2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

Para escribirla en su forma general:

x + 3y - 8 = 0

3. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,2) y es paralela a la recta 2x + 4y - 1 = 0.

Por ser paralela posee la misma pendiente de la recta dada $m = -\frac{1}{2}$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}\left(x - (-4)\right)$$

$$y - 2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0$$

Su forma general es,

x + 2y = 0

Determine los valores de k para que las rectas k^2 x+y+2=0 y (k-1)x-3ky=0 sean perpendiculares. Se puede observar que las rectas poseen pendientes

$m_1 = -k^2$ y $m_2 = \frac{k-1}{3k}$ respectivamente.

Como son perpendiculares, $m_1 \cdot m_2 = -1$, de donde se obtiene la ecuación

de segundo grado $k^2 - k - 3 = 0$ cuyas soluciones son: $k = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

y para cuyos valores las rectas cumplen la condición pedida.

Propuestos

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,4) y es paralela a la recta 2x+4y-1=0.
2. Determine la ecuación de la recta que tiene pendiente 5 y corta al eje OY en -2.
3. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3,1) y tiene pendiente (-5).

4. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3,3) y (-1,2).
5. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,-2) y es perpendicular al segmento que une los puntos (-3,2) y (4,5).

CAPÍTULO II

FUNCIONES ALGEBRAICAS

MAWIL
Publicaciones Impresas
y Digitales
www.mawil.us

Matemáticos pioneros en dedicarse al estudio de las funciones: El primero en utilizar el símbolo de función y=f(x), introducido por Clairaut en 1734 fue el notable matemático suizo Leonhar Euler (1707-1783). Este definió el concepto de función como una expresión analítica constituida por variables y constantes.

El origen del concepto de función tiene lugar en el momento en el que se relacionan dos variables, remontándose hasta los egipcios y babilonios para encontrar las primeras manifestaciones matemáticas de función.

Sin embargo, si se desea fijar el momento en que la relación entre variables adquiere el rango de función, bastará con analizar el inicio del siglo XVII con los estudios realizados por Galileo Galilei (1564-1642) sobre mecánica.

La primera definición de función tal vez un poco tosca, pero importante en su momento, fue dada por el matemático James Gregory (1638-1675). El entiende como función una cantidad obtenida de otras, mediante operaciones algebraicas sucesivas.

Johann Bernoulli hace una formulación por primera vez, considerándola como una cantidad formada por variables y constantes.

Gottfried Leibniz (1646-1716), otra de las figuras más importantes de la historia de las matemáticas, utilizó el término de función, e introdujo otros más importantes en la evolución de las matemáticas, como constante, variables y parámetros. Copiado textualmente del libro actividades de matemáticas, Brett y Suarez 2007.

En matemáticas, la condición dados dos conjuntos A y B, se denomina función de A en B, a toda relación que hace corresponder a todo elemento de A un y solamente un elemento del conjunto B. De allí que, el término función es usado para denotar la dependencia de una cantidad con respecto a otra.

Formalmente la definición de función está dada por la expresión y=f(x) que ha resultado del elemento que f asocia con x; esto es, si dos conjuntos A y B cuyos elementos pertenecen al conjunto de los números reales, el valor x corresponde al conjunto A de partida llamado dominio D(f), x es una variable completamente independiente. La variable y se conoce como variable dependiente; la misma, es el resultado de la operación f(x) conocido como imagen o rango de la función R(f). En este mismo orden, se puede hacer referencia al conjunto de pares ordenados $G(f)=\{(x,y)/x\epsilon D(f),y=f(x)\}$ que recibe el nombre de gráfica de f y le corresponde un conjunto de puntos en el plano, su representación gráfica.

En la cotidianidad se presentan muchos casos donde el valor de una cierta cantidad depende del valor de otra. Si hacemos referencia a la administración y la economía, se hace preciso citar lo correspondiente al salario devengado por una persona en relación al número de horas trabajadas; el número de unidades que demandan los consumidores de una cierta clase de productos puede depender del precio de dicho producto; la producción total en una fábrica puede depender del número de máquinas que se utiliza, etc. Con frecuencia, una relación entre dichas cantidades se define por medio de una función.

En adelante se estará presentando aspectos que tienen que ver con la función, su definición, las variables intervinientes, su dominio, su rango, determinados tipos y sus gráficas, todos los cuales ilustraran notaciones y terminologías propias a ser utilizadas en el desarrollo del presente capítulo.

2.1 Función

Se define una función como el conjunto de parejas ordenadas de número, en el cual no existen dos parejas ordenadas distintas que tengan el mismo primer número. El conjunto de todos los valores para x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores posibles de y se llama contradominio, imagen o rango de la función.

El rango y el dominio de una función posee cada uno características específicas que invitan al cálculo de los mismos, fijando una variable que coincida con los valores a ser determinados; ellos son, los valores de la variable x corresponden al dominio y los valores para la variable y corresponden a la imagen o dominio de una determinada función.

Obsérvese las siguientes expresiones:

. $f = \{(x, y) / y = 3x^2 + 2\}$

Para poder determinar los valores de la variable para los cuales f es conjunto de todos los pares ordenados (x,y) , las variables deben satisfacer la ecuación:

$$y = 3x^2 + 2$$

El dominio de la función corresponde a todos los valores tomados por la variable independiente, para los cuales el conjunto de los números reales es representativo. De esta forma el intervalo $(-\infty, +\infty)$ simboliza el D(f). Por otro lado, obtener la imagen o rango de la función presentada destaca la aplicación de las operaciones aplicadas a continuación, luego de realizar un intercambio de variable, propio de una función inversa:

$$x = 3y^2 + 2$$

$$x - 2 = 3y^2$$

$$\frac{x-2}{3} = y^2$$

$$\sqrt{\frac{x-2}{3}} = y$$

Luego, los valores para la variable y resultaran de la operacionalización a la restricción:

$$\frac{x-2}{3} \geq 0$$

Así se concluye que el valor más pequeño que y puede asumir es 2 para cuando x=0. Por tanto la imagen o rango de la función es el conjunto de todos los números positivos mayores o iguales a 2. R(f) = $[5, +\infty)$

$$f = \{(x, y) / y = \sqrt{x^2 - 4}\}$$

En la siguiente expresión se debe tener presente que los valores correspondientes a cada una de las variables debe estar contenido en el conjunto de los números reales R. Obsérvese: $y = \sqrt{x^2 - 4}$, presenta la restricción $x^2 - 4 \geq 0$ para el cálculo del dominio de la función.

$x^2 - 4 \geq 0$

$x^2 \geq 4$

$x \geq \pm 2$

De allí que el dominio de la función D(f) = (-2 , 2).

Para el cálculo del rango a $y = \sqrt{x^2 - 4}$ la transformamos:

$y = \sqrt{x^2 - 4}$

$y^2 = x^2 - 4$

$y^2 + 4 = x^2$

$x = \sqrt{y^2 + 4}$

$y^2 + 4 \geq 0$

$y \geq \sqrt{-4}$

Resultando una raíz cuadrada de un numero negativo, que en consecuencia no pertenece al conjunto de los números reales.

2.2. Grafica de una Función

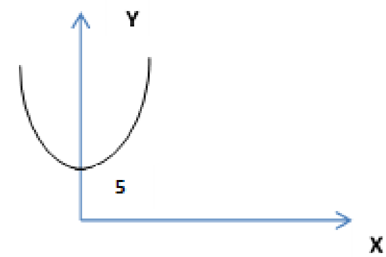
Se define la gráfica de una función como el conjunto de todos los puntos en el plano R^2 para los cuales es un par ordenado en f.

Se puede ilustrar lo indicado anteriormente disponiendo de las siguientes funciones:

$f = \{(x, y) / y = 3x^2 + 2\}$

Para graficar haremos uso de una tabla de valores cuyos puntos se dispondrán en el sistema de coordenadas.

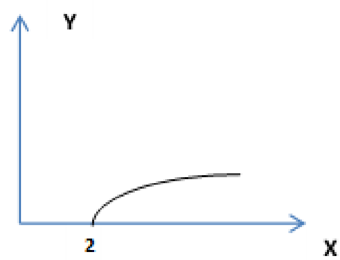
x	y
-2	15
-1	5
0	2
1	5
2	15



El D(f) es el conjunto de todos los números reales. Y la imagen o R(f) consta de los valores mayores o iguales a 5.

$$f = \left\{(x,y) \,/\, y = \sqrt{x^2 - 4}\right\}$$

x	y
-2	15
-1	5
0	2
1	5
2	15



El D(f) es el conjunto de todos los números mayores o iguales a 2. Y la imagen o R(f) está definida en R.

2.3. Ejercicios resueltos y propuestos

Imagen de una Función

Resueltos

Sea $f(x)=2x^2 - x$ Determinar y simplificar:

a) $$\begin{aligned} f(5) &= 2(5)^2 - (5) \\ &= 2(25) - 5 \\ &= 45 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f(5+h) &= 2(5+h)^2 - (5+h) \\ &= 2(25 + 10h + h^2) - 5 - h \\ &= 50 + 20h + 2h^2 - 5 - h \\ &= 2h^2 + 19h + 45 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} &= \frac{2h^2 + 19h + 45 - 45}{h} \\ &= \frac{h(2h+19)}{h} \\ &= 2h+19 \end{aligned}$$

Propuestos

1. Para $g(x) = \frac{1}{x}$ determine y simplifique:

   a) $g(3)$

   b) $g(a)$

   c) $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$

2. Para $f(x) = 2x^3 + 3(x)$ determine y simplifique:

   a) $f(-6)$

   b) $f(0)$

   c) $f(-2)$

   d) $f(k)$

   e) $f(g(x))$

   f) $f(\frac{1}{3})$

   g) $f(3t)$

   h) $f(2h)$

   i) $f(\frac{1}{h})$

   j) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Dominio, rango y grafica de una función.

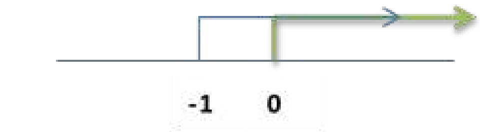
Resueltos

1. Dada la función $y = \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$, calcular dominio y rango de la misma.

Para calcular el Dominio identificamos la restricción de la función, para que la solución este contenida en el conjunto de los números reales. En este caso viene dada por la condición $\frac{x}{x+1} > 0$

I Si $x > 0$; $x + 1 > 0$

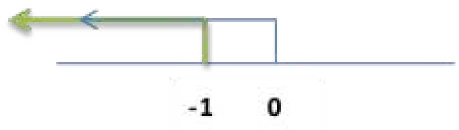
$x > -1$



$(0,+\infty)$

II Si $x < 0$; $x + 1 < 0$

$x < -1$



Para calcular el Rango intercambiamos las variables de la función y despejamos la variable y.

$$x = \log\left(\frac{y}{y+1}\right)$$

$$10^x\left(y+1\right) = y$$

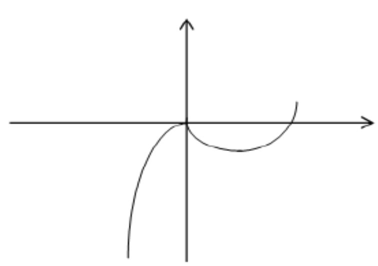
$$10^x y - y = -10^x$$

$$y = \frac{-10^x}{10^x - 1}$$

R(f)=R-

2. Bosqueje la gráfica de la función $y = x^2\left(x-2\right)$ e identifique dominio y rango.

x	Y
-2	-16
-1	-3
0	0
1	-1
2	0



D(f)=R
R(f)=R

Propuestos

1. Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$

b) $f(x) = \log\left(\sqrt{6x - 3}\right)$

c) $f(x) = \frac{7}{x-6}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$

e) $f(x) = \frac{\log(x+2)}{x^2-4} + \frac{3}{x-3} + \frac{8}{\sqrt{(x-1)}} + \frac{9}{\sqrt[3]{x+2}}$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+2}}$

2. Determine el rango de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 16$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$

c) $f(x) = \frac{\ln(x+1)-4}{\ln(x+1)}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + 1$

e) $f(x) = \frac{(x-3)}{(x-2)}$

f) $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{x-10}{x+6}$

g) $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{x+3}{x+5}$

3. Bosqueje la gráfica de las siguientes expresiones e indique dominio y rango de las mismas:

a. $y= -x^2 + 9$

b. $2x^2 + 3y = 0$

c. $y= 2x^2$

d. $y= x^3 - 3x$

e. $y= \dfrac{2}{x^2+1}$

f. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

g. $y^2+4=x$

2.4. Funciones polinomiales y función compuesta

Para argumentar sobre las funciones lineales y cuadráticas, es necesari hacer referencia a la clasificación de las funciones según su estructura.

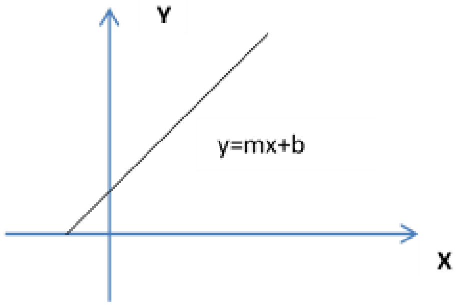
Función Polinomial

Las funciones polinomiales son de la forma $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$. Este tipo de expresiones no presentan restricciones en su dominio. Su dominio lo constituyen todo el conjunto de los números reales

Las más notables de estas funciones son la función constante $f(x)=k$, lineal $f(x)=mx+b$, cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, parábola cúbica $f(x)=ax^3$ y la función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}, para\,todo\,Q(x)\neq 0$

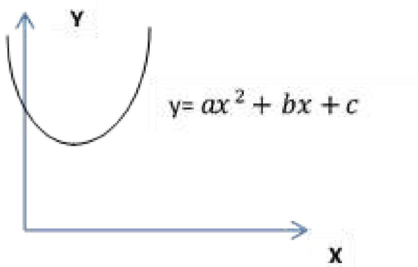
Al dar las especificaciones de cada función se pudo notar que las mismas se identifican de la forma F(x), con la cual se expresa la imagen de cada uno de los valores introducidos para x; bien sean dados de manera explícita o implícita.

La función lineal también conocida como función afín es aquella que presenta todos los coeficientes de términos de grado dos en adelante, como cero. La grafica de la función viene representada por una recta. Se denota como anteriormente fue presentada F(x)=mx+b, donde m representa la pendiente de la recta, y b, el corte o intercepción con el eje y.



Al observar la gráfica de esta función, las imágenes de la mismas están presentes a lo largo de todo el eje y, de alli que: D(f)=R y el R(f)=R

La función cuadrática es aquella que presenta todos los coeficientes de términos de grado tres en adelante, como cero. La grafica de la función viene representada por parábolas. Se denota como anteriormente fue presentada F(x)=ax^2+bx+c. Las parábolas pueden tener uno, dos, o ningún corte con el eje x, además de características como las siguientes: a) Si a>0 la parábola abre hacia arriba, si a<0 la parábola abre hacia abajo. En este caso mientras mayor sea su valor se presenta más cerrada. b) Generalmente indica el corte con el eje y.



En la gráfica de esta función, observamos que: D(f)=R y el R(f)= $a > 0$

Función Compuesta

Dadas dos funciones f º y g, la función compuesta, representada por f º , está definida por: (f ºg)(x) = f(g (x)) y el dominio de f ºg es el conjunto de todos los números de x en el dominio de g tales que g (x) se encuentra en el dominio de f.

2.5. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

Composición de Funciones

1. Sean $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \frac{x}{x+2}$ dos funciones, determine y simplifique: a) $(f^\circ g)(x)$ b) $(g^\circ f)(x)$

   a) $(f^\circ g)(x) = f(g(x))$

   $$= f\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

   $$= 2\left(\frac{x}{x+2}\right) - 3$$

   $$= \frac{2x-3x-6}{x+2}$$

   $$= \frac{-x-6}{x+2}$$

   b) $(g^\circ f)(x) = g(f(x))$

   $$= g(2x-3)$$

   $$= \frac{2x-3}{(2x-3)+2}$$

   $$= \frac{2x-3}{2x-1}$$

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = 3x - 2$ determine y simplifique:

$(f^\circ g)(x)$

$(g^\circ f)(x)$

2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, $r(x) = x^2 - 1,;$ $h(x) = x + 3$ determine y simplifique:

a. .$(f \circ g)(x)$

b. .$(g \circ f)(x)$

c. .$(r \circ g)(x)$

d. .$(g \circ r)(x)$

e. .$(r \circ h)(x)$

f. .$(h \circ r)(x)$

g. .$(g \circ h)(x)$

h. .$(f \circ g \circ h)(x)$

i. .D$(f \circ h)(x)$

2.6. Funciones y variables económicas

Existen diferentes campos donde las aplicaciones comprenden la dependencia de una variable con respecto a otra. En el campo de la economía se presentan fórmulas que se utilizan en tales casos y con frecuencia para determinar funciones. Tal es el ejemplo, si y es el interés simple percibido en un año por un principal x a una tasa del 15% anual, entonces: y=0,15x.

A un cierto valor no negativo de x corresponde un valor único de y, y así el valor de y depende del de x. Si f es la función definida por f(x)=0,15x y el dominio de f es el conjunto de los números reales no negativos, entonces la expresión anterior puede escribirse como: y=f(x).

Ahora bien, las variables económicas estudiadas en diversos asuntos del entorno social están ligadas con los aspectos: directamente proporcional, inversamente proporcional y conjuntamente proporcional.

Una variable y es directamente proporcional a una variable x si: y = kx , donde k es una constante distinta de cero. En términos más generales, se dice que una variable y es directamente proporcional a la n-ésima potencia de x(n>0) si y= kx^n la constante k se llama constante de proporcionalidad

Una variable y es inversamente proporcional a una variable x si: $y = \frac{k}{x}$, donde k es una constante distinta de cero. En términos más generales, se dice que una variable y es inversamente proporcional a la n-ésima potencia de $x(n>0)$ si $y = \frac{k}{x^n}$ la constante k se llama constante de proporcionalidad

Una variable y es inversamente proporcional a una variable x si: $z = kxy$, donde k es una constante distinta de cero. En términos más generales, se dice que una variable y es inversamente proporcional a la n-ésima potencia de $(n>0)\, y\, m>0$ si z=kx^n y^m la constante k se llama constante de proporcionalidad

1. El peso aproximado del cerebro de una persona es directamente proporcional al peso de su cuerpo, y una persona que pesa 68 kg observa un peso cerebral aproximado de 1,8 kg. a) Expresar el peso aproximado en kg del cerebro de una persona como función de su peso corporal. b) Calcular el peso aproximado del cerebro de una persona cuyo peso es 80 kg.

Solución a) Sea f(x) kg el peso aproximado del cerebro de una persona cuyo peso es x kg. Entonces:

f(x)=k.x

Como el peso de una persona es de 68 kg, esta tiene un peso cerebral aproximado de 1,8 kg.

4=k(150)

$$k = \frac{4}{150}$$

$$k = \frac{2}{75}$$

Al sustituir k en la expresión f(x)=k.x

$$f(x)=\frac{2}{75}.x$$

Solución b) Al estar definida f(x)= $\frac{2}{75}$.x Entonces:

$$f(176)=\frac{2}{75}.(176)$$
$$=4,7$$

Por lo tanto el peso aproximado del cerebro de una persona que pesa 80 kg, es de 2,13 kg.

Variable Inversamente Proporcional

1. La luminosidad producida por la luz de cierta fuente es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde ella. a) Expresar la luminosidad en pixeles (plx) como función de la distancia en metros a partir de la fuente si la iluminación vale 225 plx a una distancia de 5 mts. b) Hallar la magnitud en un punto a 12 mts de dicha fuente luminosa.

Solución a) Sea f(x)plx la iluminación a una distancia de x mts. Entonces:

$$f(x)=\frac{k}{x^2}$$

Como la iluminación vale 225 plx a una distancia de 5 mts de la fuente,

$$225=\frac{k}{5^2}$$

$$k=25(225)$$

$$k=5625$$

Al sustituir este valor en la función: $f(x)=\frac{k}{x^2}$

$$f(x)=\frac{5625}{x^2}$$

Solución b) Al disponer de la función sustituimos los valores entregados:

$$f(12)=\frac{5625}{(12)^2}$$

$$=\frac{5625}{144}$$

$$=\frac{625}{16}$$

Por lo tanto, la iluminancia en un punto situado a 12 mts de la fuente de luz es de 39,06 luxes.

Variable Conjuntamente Proporcional

En un medio ambiente limitado donde A es el número máximo de bacterias que soporta dicho medio, la tasa de crecimiento bacteriano es conjuntamente proporcional al número presente y a la diferencia entre A y el número presente. Supóngase que un millón de bacterias es el número máximo que soporta el medio ambiente y la tase de crecimiento es de 60 bacterias por minutos cuando hay 1000 bacterias en el medio. a) Expresar la tasa de crecimiento bacteriano como función del número de bacterias presentes. b) Determinar la tasa de crecimiento cuando hay 100 mil bacterias presentes.

Solución a) Sea f(x) bacterias por minuto la tasa de crecimiento cuando hay x bacterias presente. Entonces,

$$f(x)= kx(1000000-x)$$

Como la tasa de crecimiento es de 60 bacterias por minuto cuando hay 1000 en el medio, al sustituir en la formula anterior para obtener k se tiene,

$$60=k(1000)(1000000-x)$$

$$k=\frac{60}{999000000}$$

$$k=\frac{60}{999000000}$$

$k = \dfrac{1}{16650000}$

Seguidamente se sustituye k en: $f(x) = kx(1000000 - x)$

Así, $f(x) = \dfrac{x(1000000 - x)}{16650000}$

Solución b) Al hacer uso de $f(x) = \dfrac{x(1000000 - x)}{16650000}$, se obtiene:

$$f(100000) = \frac{100000(1000000 - 100000)}{16650000}$$

$$= \frac{100000(900000)}{16650000}$$

$$= 5405{,}4$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento es de 5405,4 bacterias por minuto cuando hay 100000 presentes.

Costos, Oferta y Demanda

Un fabricante de relojes puede producir un cierto reloj a un costo unitario de \$15. Se estima que si el precio de venta unitario del reloj es x, entonces el número de relojes vendido por semana es 125-x. a) Expresar el monto de las utilidades semanales del fabricante como función de x. b) Utilizarlos resultaos de la parte a) para determinar las utilidades semanales si el precio de venta unitario es de \$45.

Solución a) Las utlidades pueden obtenerse restando el costo total del ingreso total. Sea R el ingreso semanal. Como el ingreso es el producto del costo de cada reloj y el número de relojes vendidos,

$$R = x(125\text{-}x)$$

Sea C el costo total de los relojes vendidos cada semana. Ya que el costo total es el producto del costo de cada reloj y el número de relojes vendidos.

C = 15(125-x)

Si P(x) = R –C

Al sustituir R y C, se obtiene:

P(x) = x(125-x) - 15(125-x)

P(x) = (125-x)(x-15)

Solución b) Para el cálculo de las utilidades semanales si el precio de venta es \$45, usamos: P(x) = (125-x)(x-15)

Así, P(45) = (125-45)(45-15)

= 80.30

= 2400

Por lo tanto, las utilidades de la semana son \$2400 cuando los relojes se venden en \$45 cada uno.

Propuestos

Una compañía que fabrica dispositivos electrónicos introduce un nuevo producto en el mercado. Durante el primer año los costos fijos de la nueva corrida de producción ascienden a \$140000 y los costos variables destinados a la producción de cada unidad son de \$25. Durante el primer año el precio unitario de venta será \$65. a) Si se venden x unidades durante el primer año, exprese el monto de las utilidades del primer año como función de x. b) Se estima que se venderán 23000 unidades durante el primer año. Utilice el resultado de la parte a) para determinar las utilidades del primer año si se cumple la meta de ventas.

c) ¿ Cuantas unidades deben venderse en el primer año para que la compañía alcance el punto de equilibrio (es decir, no haya ni utilidad ni pérdida)?

2. Los costos fijos mensuales de una compañía que fabrica esquíes asciende a $4200 y los costos variables unitarios son de $55 (por cada par de esquíes). El precio unitario de venta es de $105. a) Si se venden x pares de esquíes en un mes, exprese el monto de la utilidad mensual como función de x. b) Emplee el resultado de la parte a) para determinar las utilidades del mes de diciembre si se venden 600 pares de esquíes en ese mes. C) ¿ Cuantos pares de esquíes deben venderse en un mes para que la compañía alcance el punto de equilibrio (que no haya perdida ni ganancia en el mes)?

3. La nómina diaria de un grupo de trabajadores es directamente proporcional al número de elementos y varios de ellos tienen un ingreso de $540. a) Exprese el monto de la nómina diaria como función del número de trabajadores. B) ¿Cuál es la nómina diaria para un grupo de 15 elementos?

4. Para un cable eléctrico de longitud fija, la resistencia es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro del cable. a) Si un cable de longitud fija tiene 0,5 cm de diámetro y una resistencia de 0,1 ohm, exprese la resistencia como función del diámetro. b) ¿Cuál es la resistencia de un cable de longitud fija y que tiene un diámetro de 0,66 cm?

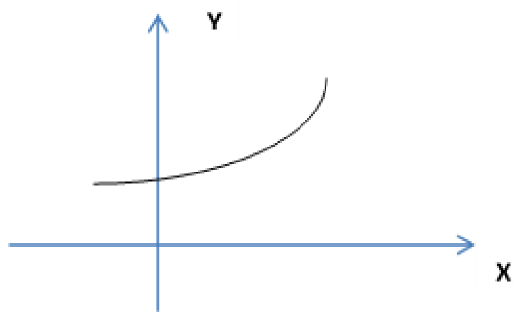
5. En una comunidad de 8000 personas, la intensidad a la cual se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de personas que han escuchado el rumor y al número de ellas que no lo han oído. a) Si el rumor se extiende a una intensidad de 20 personas por hora cuando 200 ya lo han escuchado, exprese la intensidad a la cual se difunde dicho rumor como función del número de personas que ya lo han escuchado. b) ¿Con que rapidez se esparce el rumor cuando ya lo han escuchado 500 personas?

2.8. Funciones exponenciales y logarítmicas

En la clasificación de las funciones según su estructura, tenemos también a las funciones trascendentes, como lo son las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas.

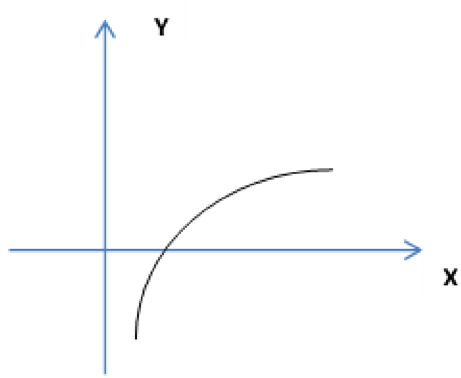
Función Exponencial

La función exponencial , con ,está definida para cualquier valor real x. es importante indicar que el dominio de estas funciones depende estrictamente de .



Función Logaritmo

La función logaritmo se define como la inversa de la función exponencial: $f(x) = \log_a P(x)$ si y solo si, $a^{f(x)} = P(x)$, con $a > 0\, y\, a \neq 1$. Es importante indicar que el dominio de estas funcione viene dado por: D(f)= $\{x \in R : P(x) > 0\}$ El logaritmo de un número negativo o cero $\nexists$



Cuando se trata de funciones exponenciales, el número e representa un valor considerado de importancia en el campo de la Economía, dado que el mismo se aplica en el cálculo de interés en una inversión. Los tipos de interés son diferentes, los cuales se pueden estudiar de manera más completa en las denominadas matemáticas financieras. En este caso, consideraremos el tipo de interés simple, el cual se define como el que se percibe únicamente sobre la cantidad original que se pide prestada; en este, no se paga ninguna cantidad por algún interés acumulado. Muchas veces se utiliza en préstamos a corto plazo en un período de, posiblemente, 30, 60 o 90 días. En tales casos a fin de simplificar los cálculos, se considera que un año tiene 360 días y se supone que cada mes consta de 30 días. En este sentido, una fórmula utilizada para el cálculo de este tipo de interés es:

$$A=P+Pni$$

$$A=P(1+ ni)$$

Por otro lado se hará referencia al interés compuesto, haciendo una distinción entre la tasa de interés anual, llamada nominal, y la tasa efectiva, que es la razón que da el mismo interés compuesto una vez al año que una tasa nominal compuesta m veces por año:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}=1+j$$

De donde,

$$A=P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

y

$$P=A\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt}$$

También

$$A=Pe^{it}$$

$$P=Ae^{-it}$$

2.9. Ejercicios resueltos y propuestos

Funciones Exponenciales

Resueltos

1. Se realiza un préstamo de \$500 en un plazo de 90 días a una tasa de interés simple del 16% anual. Determinar la cantidad que debe pagarse a término de los 90 días.

Para la solución, haremos uso de la fórmula: $A = P(1+ni)$, teniendo en cuenta los datos a ser sustituidos en la misma. Se tiene $P = 500, i = 0{,}16$ y n=$\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$, si A es la cantidad por pagar,

$$A = 500\left(1+\frac{1}{4}(0{,}16)\right)$$

A=520

2. Si V(t) dólares es el valor de una cierta pieza de equipo t años después de su compra, entonces V(t)=ae^(-0,20t), donde a es una constante. Si el equipo se compró en \$8000, ¿Cuál será su valor en 2 años?

Como el equipo se compró en \$8000, V(0)=8000 por lo tanto, si sustituimos en,

$V(0) = ae^{-0,20(0)}$

$8000 = ae^{0}$

$8000 = a$

Al sustituir a en la fórmula inicial,

$V(t)=8000e^{-0,20t}$

Ahora bien, el valor del equipo después de 2 años es V(2), así:

$V(2)=8000e^{-0,20(2)}$

$= 8000e^{-0,40)}$

$= 5362,56$

Por tanto, el valor del equipo en 2 años será $5362,56

3. Un obrero común de una cierta fábrica puede producir f(t) unidades por día después de empezar a trabajar, donde $f(t)=50(1-e^{-kt})$

Si un obrero puede producir 37 unidades por día después de 4 días, ¿Cuántas unidades diarias puede producir después de 7 días?

Se tiene como dato que f(4)=37. Usando, $f(t)=50(1-e^{-kt})$

$$37 = 50\left(1 - e^{-4k}\right)$$

$$\frac{37}{50} = \left(1 - e^{-4k}\right)$$

$$e^{-4k} = 1 - 0,74$$

$$e^{-4k} = 0,26$$

(en la tabla de raíces potencias 0,26 coincide con la expresión $e^{-1,35}$, o también puede verificarlo a través de una calculadora)

Asi.

$$e^{-4k} = e^{-1,35}$$

-4k=-1,35

K=0,34

Sustituimos k en

$f(t) = 50(1 - e^{-0,34t})$

Para responder el número de unidades producidas después de 7 días, tomamos la expresión anterior y sustituimos,

$f(7) = 50(1 - e^{-0,34(7)})$

$= 50\left(1 - e^{-2,38}\right)$

=50(1-0,093)

$f(7) = 45$

En consecuencia el obrero puede producir 45 unidades por día después de 7 días.

Funciones Logarítmicas

Resueltos

Determinar el número de años que tomará a una cantidad de \$900 acumularse a \$1500 si el dinero se invierte al 10% compuesto continuamente.

Para la solución, se tiene T como el número de años por determinar, P=900, A=1500, i=0,10 y t=T. Cada dato lo sustituiremos en la fórmula:

$A=Pe^{it}$

$1500=900e^{0,10.T}$

$$\frac{1500}{900} = e^{0,10T}$$

$$\frac{5}{3} = e^{0,10T}$$

Para determinar el valor de T, aplicamos propiedad del logaritmo natural a ambos lados de la igualdad,

$$\ln\frac{5}{3} = \ln e^{0,10T}$$

$$\ln 5 - \ln 3 = 0,10T \ln e$$

$$1,6094 - 1.0986 = 0,10T(1)$$

$$0,5108 = 0,10T$$

$$T = 5,108$$

Ahora bien, 5 años, 1 mes y nueve días, es el tiempo que se necesita para que una cantidad de $900 se acumule a $1500 si el dinero se invierte al 10% compuesto continuamente.

2. Determinar el número de años que tomará a una cantidad de $900 acumularse a $1500 si el dinero se invierte al 10% compuesto semianualmente.

Para la solución, se tiene T como el número de años por determinar, P=900, A=1500, i=0,10, m=2 y t=T. Cada dato lo sustituiremos en la fórmula:

$$A = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

$$1500 = 900\left(1+\frac{0,10}{2}\right)^{2T}$$

$$\frac{1500}{900} = (1,05)^{2T}$$

$$\frac{5}{3} = (1,05)^{2T}$$

Aplicamos propiedad del logaritmo natural a ambos lados de la igualdad

$$\ln\frac{5}{3} = \ln(1{,}05)^{2T}$$

$$\ln 5 - \ln 3 = 2T \ln(1{,}05)$$

$$T = \frac{\ln 5 - \ln 3}{2\ln(1{,}05)}$$

$$T = \frac{1{,}6094 - 1.0986}{2(0{,}0488)}$$

$$T = 5{,}234$$

Se concluye que, 5 años, 2 meses y 34 días, es el tiempo que tomará a $900 acumularse hasta $1500 si el dinero se invierte al 10% compuesto semianualmente.

Propuestos

1. Se realiza un préstamo de $2000 a una tasa de interés simple del 12% anual. Determine la cantidad por pagar si el plazo del préstamo es: a) Noventa días, b) Seis meses, c) Un año.
2. Se realiza un préstamo de $1500 a una tasa de interés simple del 10% anual. Determine la cantidad por pagar si el plazo del préstamo es: a) Noventa días, b) Seis meses, c) Un año.
3. Determine el monto, al cabo de cuatro años, de una inversión de $1000 si la tasa anual es 8% y a) se recibe un interés simple, b) el interés se compone anualmente, c) el interés se compone trimestralmente.
4. Determine la tasa efectiva de interés si el interés se basa en una tasa anual del 12% compuesto a) semianualmente, b) mensualmente, continuamente.
5. Determine la tasa efectiva de interés si el interés se basa en una tasa anual del 24% compuesto a) semianualmente, b) mensualmente, continuamente.
6. ¿Cuánto tiempo tomará a una cantidad de $500 acumularse hasta $900 si el dinero se invierte al 9% compuesto continuamente?
7. ¿Cuánto tiempo tomará a una inversión triplicarse si el interés se paga a

una tasa del 12% compuesto continuamente?

8. ¿Cuánto tiempo tomará a una inversión triplicarse si el interés se paga a una tasa del 12% compuesto a) anualmente, b) semianualmente?
9. ¿Cuánto tiempo tomará a una cantidad de $600 acumularse hasta $1000 si el dinero se invierte al 10% compuesto continuamente?
10. Determinar el número de años que tomará a una cantidad de $800 acumularse a $1500 si el dinero se invierte al 12% compuesto semianualmente.

CAPÍTULO III

CALCULO DIFERENCIAL

MAWIL
Publicaciones Impresas
y Digitales
www.mawil.us

El cálculo diferencial forma, junto con el cálculo integral, una de las ramas más importantes de las matemáticas. Vivimos en un mundo caracterizado por cambios continuos. Es importante en este sentido, desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar dichos cambios; justamente el propósito del cálculo diferencial es el estudio de los cambios.

El cálculo diferencial se conoce como la matemática de los cabios.

Todo el cálculo diferencial se puede reducir a su concepto fundamental, la razón de cambio. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar estos procesos. Siempre que dos magnitudes (variables) están conectadas mediante una relación funcional (función), se puede estudiar el cambio relativo de una de las magnitudes con respecto a la otra.

Ciertas razones de cambio tienen nombres especiales: la razón de cambio del tamaño de una persona se llama tasa de crecimiento. La razón de cambio de la posición de un vehículo con respecto al tiempo se llama velocidad. La razón de cambio de la temperatura de un líquido se llama velocidad de enfriamiento 9º calentamiento). En la economía interesa por ejemplo la razón de cambio del índice de precios a nivel nacional. Una importante razón de cambio es también la tasa de natalidad de una nación que describe el incremento de la población. Un aspecto fundamental de las relaciones funcionales cuyos cambios se estudian en el cálculo diferencial es el de continuidad. Esto significa que la relación es completa, sin interrupciones o saltos bruscos. Gráficamente estas funciones se representan como segmentos de líneas o curvas y no como una colección de puntos aislados.

3.1. Límites y continuidad de funciones

Estando conscientes de las nociones de variable y función, revisaremos el concepto de limite, como parte del cálculo matemático que ha servido como herramienta de singular importancia por estar ligado a aplicación de diversos problemas, que van desde los físicos, geométricos, ingenieriles y hasta sociales. Generalmente se han utilizado las ideas primigenias de velocidad y recta tangente para develar el concepto de límite. De allí que en adelante se han venido utilizando problemas traducidos al lenguaje de la matemática. En este espacio de las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales y la economía, tomaremos una función para estudiar su comportamiento en el entorno de un punto o bien cuando la variable se hace muy grande, con el objeto de conceptualizar el límite de una función. Así pues,

Si $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ ¿Cuál será el valor a que se aproxima la función f(x) cuando la variable x se acerca a x_0?

Para descifrar x0 tendremos en cuenta el dominio de la función, el cual verificaremos a través de la restricción de la función. $D(f)=R-\{4\}$.

¿Cuál será el valor a que se aproxima la función f(x) cuando la variable x se acerca a 4?

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
f(x)	7,9	7,99	7,999	8	8,001	8,01	8,1

Como respuesta a la interrogante, se tiene que, al sustituir en la función los valores de x, notamos que la imagen se acerca a 8.

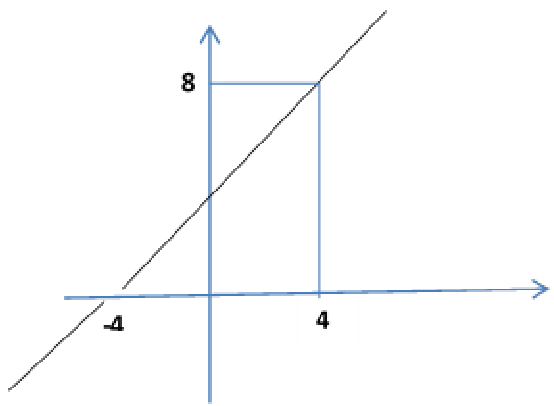
Transformando la función con operaciones básicas la imagen de f estará contenida en el conjunto de los números reales.

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)}=(x+4)$$

$$f(x)=(x+4)$$

$$f(4)=(4+4)=8$$

Su grafica son dos semirectas:



Podemos observar que los valores de la función se aproximan a 8, cuando la variable se acerca a 4. Usando la terminologia matemática, se dice que el limite de *f(x)* cuando x tiende a cuatro es ocho, lo cual se denota como:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8$$

En términos generales, los valores de una función f(x) se acercan a L cuando la variable x se acerca a x0, y se denota,

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, y se lee límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual a L .

Sea una función f que está definida para todo número de un intervalo abierto I que contiene a x_0 , excepto posiblemente para el número mismo x_0. Se dice que f tiene límite L , cuando x tiende hacia x_0 , si para todo número positivo ε, existe un número positivo δ tal que: si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Formalmente, el límite de una función se define por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad si \quad \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

En adelante se presentaran algunos teoremas con los cuales calcularemos límites de funciones en forma directa. En este espacio no presentaremos las demostraciones de dichos teoremas, por tratarse de pruebas avanzadas para este libro.

Teorema de Límite 1

Unicidad del Límite: Si la función tiene límite cuando tiende hacia , dicho límite es único, o sea si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = L'$ entonces $L = L'$

Sean f y g funciones tales que $\lim_{x \to c} f(x) = A$ y $\lim_{x \to c} g(x) = B$ con ($A, B \in R$) y k, c constantes.

Entonces:

. $\lim_{x \to c} k = k$.

2. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x) = kA$.

3. $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x) = A \pm B$.

4. Si P es una función polinómica, entonces $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$.

5. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)][\lim_{x \to c} g(x)] = A \cdot B$.

6. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{A}{B}$, tal que $B \neq 0$.

7. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, tal que $A \geq 0$.

Límites Laterales

Hacen referencia a aquellos límites expresados por la derecha o por la izquierda del número referenciado, al ser ubicado en la recta real. Así,

Límite Lateral Derecho

Límite lateral derecho: $x \to x_0^+$

Dada una función f, definida en algún intervalo abierto (x_0, c) , se dice que f tiene límite lateral L, cuando x tiende hacia x_0 por la derecha, o simplemente límite lateral derecho L en x_0, si para todo número ε positivo, existe un número δ positivo, tal que si: $0 < x - x_0 < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Se denota con: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Límite Lateral Izquierdo

Límite lateral izquierdo

Dada una función f , definida en algún intervalo abierto (x_0 , c) , se dice que f tiene límite lateral L , cuando x tiende hacia x_0 por la izquierda, o simplemente límite lateral izquierdo L en x_0 , si para todo número ε positivo, existe un número δ positivo, tal que si: $0 < x - x_0 < \delta$ entonces $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$. Se denota con: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

$\underset{x \to x_0}{lím} f(x) = L$, Existe, si y sólo si existen los límites laterales y además,

$\underset{x \to x_0^-}{lím} f(x) = \underset{x \to x_0^+}{lím} f(x) = L$.

Del enunciado del teorema anterior, se infiere que si existen los límites laterales y

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ No Existe

Límites Infinitos

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \leftrightarrow$ para todo M> 0 $\exists \partial = \partial(M) > 0$ para todo $x \epsilon D$;
$(0 < |x - x_{0<}| < \partial \rightarrow f(x) > M)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \leftrightarrow$ para todo M> 0 $\exists \partial = \partial(M) > 0$ para todo $x \epsilon D$;
$(0 < |x - x_{0<}| < \partial \rightarrow f(x) < M)$

Límites en el Infinito

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$ $\exists M(\varepsilon) > 0$ para todo $x \epsilon D$;
$(x > M \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$ $\exists M(\varepsilon) < 0$ para todo $x \epsilon D$;
$(x < M \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

Indeterminaciones

Se conocen con el nombre de límites indeterminados a aquellas expresiones que producen resultados tales como: 0/0, ∞/∞,∞-∞,1^∞,0^0,∞^0; los cuales requieren de algún procedimiento algebraico adicional para su determinación, del uso del algebra de limites o limites notables, o de alguna otra herramienta matemática.

Continuidad de una Función

Un concepto que está estrechamente relacionado con el límite, es la continuidad. A través de la cual podemos identificar si una función es continua en algún punto o en intervalo debidamente descrito. En este caso revisaremos el concepto de continuidad o no de una función en un punto.

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si y sólo sí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esta definición requiere de manera implícita tres condiciones que deben cumplirse, para afirmar que una función es continua o no en un punto.

1. Que la función esté definida en el punto ($x_0 \in Dom\ f$).
2. Que exista el límite de la función ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$).
3. Que el límite y la función evaluada en el punto sean iguales ($L = f(x_0)$).

De no cumplirse alguno de estas condiciones decimos pues que la función es discontinua o que $f(x)$ posee una discontinuidad en x_0.

Si al menos una de estas condiciones deja de cumplirse, se dice que la función es discontinua evitable o no evitable. Observe la conclusión a la que llegamos, a través del siguiente diagrama de llaves:

Discontinua:
Si $\underset{x\to x_0}{lím}\, f(x) \neq f(x_0)$

- **Evitable:**
  Si $\underset{x\to x_0}{lím}\, f(x)$ existe y es finito pero distinto de $f(x_0)$.
- **No evitable:**
  Si $\underset{x\to x_0}{lím}\, f(x)$ no existe o es infinito.
  - **Finita:**
    Si existen y son finitos $\underset{x\to x_0^+}{lím}\, f(x)$ y $\underset{x\to x_0^-}{lím}\, f(x)$
  - **Infinita:**
    Si al menos uno de los límites laterales es infinito.

Se dirá que f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ si y solo si ella es continua en cada punto interior al intervalo y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

3.2. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Usando la definición de límite, probar que $\lim_{x-3} 3x+1=10$

Para la aplicación de la definición de límite seguimos los siguientes pasos:

a. El término $|f(x)-L|$ lo descomponemos en una expresión en x multiplicada por $|x-x_0|$.

b. Usando $|x-x_0|<\partial$, acotamos la expresión en x por un número positivo, en el cual puede o no aparecer ∂.

c. Recordar que $|x-x_0|<\partial$. Se iguala este término a ε y se despeja ∂ .

Aplicando los pasos anteriores para la función f(x)=3x+1, L=10 y x_0 =3. Dado un $\varepsilon>0$ se quiere encontrar un $\partial>0$ tal que : $0<|x-3|<\partial \to |(3x+1)-10|<\varepsilon$

$|(3x+1)-10| = |3x-9|$ siempre que $|x-3|<\partial$

$= 3|x-3|$

Luego, $3|x-3|<\varepsilon$ siempre que $|x-3|<\partial$

$|x-3| < \frac{\varepsilon}{3}$ siempre que $|x-3| < \partial$

Así, $0 < \partial \leq \frac{\varepsilon}{3}$ lo que demuestra que $\lim\limits_{x-3} 3x+1 = 10$

2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x-2} 5x^2 + 2x + 1 = 5(2)^2 + 2(2) + 1 = 25$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x+6}{-\frac{1}{5}x-3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 5}(2x+6)}{\lim\limits_{x\to 5}\left(-\frac{1}{5}x-3\right)} = \dfrac{16}{-4} = -4$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{8x+12} = \sqrt{8(3)+12} = \sqrt{36} = 6$

3. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x+2 & para \quad x>1 \\ x^2+1 & para \quad x<1 \end{cases}$

Para calcular el limite de este tipo de función haremos uso de los límites laterales, ya que para los valores mayores que 1 el límite se estudiará a la función mientras que para los menores que 1 para la función . Y finalmente aplicaremos el Teorema de Límite 2:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, Existe, si y sólo si existen los límites laterales y además,

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$

Calculemos límite lateral derecho $\lim\limits_{x\to 5^+} (x+2) = 5^+ + 2 = 7$.

Calculemos límite lateral izquierdo $\lim\limits_{x\to 5^-} (x+2) = 5^- + 2 = 7$.

Como los límites laterales existen y son iguales, entonces:

$\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 7$

4. . $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x^2 + 6x) = 2(+\infty)^2 + 6(+\infty) = +\infty$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + 11) = (-\infty)^2 + 11 = +\infty$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + 2x - 2} = \frac{0}{0}$ esta solución representa una indeterminación, ahora bien, transformaremos la función para simplificar y evaluar de nuevo el límite, ya que el resultado debe pertenecer al conjunto de los números reales.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+2)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)}{(x^2+2)} = \frac{2}{3}$$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x} = \infty - \infty$ esta solución también representa una indeterminación. transformemos la función para que el resultado pertenezca a R.

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \frac{(x-2) - x}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \frac{-2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}}$$

Luego $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\infty} = 0$

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 7x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ como podemos observar esta solución también representa una indeterminación, de allí que para transformar la función, usaremos el grado mayor del polinomio $x^n = x$ con el cual dividiremos a cada polinomio que se encuentra en el numerador y denominador.

$$\frac{x^2 - 7x}{x} = \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{7x}{x}}{\frac{x}{x}} = \frac{x-7}{1}$$

Luego $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 7x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x - 7 = -\infty$

9. $\cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{3x^2+1} \right)^{x^2} = 1^{\infty}$, esta indeterminación se levanta haciendo uso

del Teorema: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - 1](g(x))}$

Así,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{3x^2+1} \right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1} \right) - 1 \right] (x^2)}$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^2+3-3x^2-1}{3x^2+1}\right)\right]\left(x^2\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{-2x^2+2}{3x^2+1}\right)\right]\left(x^2\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{-2x^4+2x^2}{3x^2+1}\right)\right]} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$$ al levantar la indeterminación,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{x^2} = e^{\frac{2}{3}}$$

10. Dada la siguiente función: a) determine la continuidad o no de la función y b) construya su gráfico.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \leq -1 \\ x^2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

a. Para determinar la continuidad o no de la función, debemos revisar el cumplimiento de las condiciones de continuidad:

i) f(x0) está definida en la función: f(-1) = (-1+2) =1

ii) $\lim_{x\to-1}$ f(x) existe: $\lim_{x\to-1^+} x+2$ =(-1+2) =1

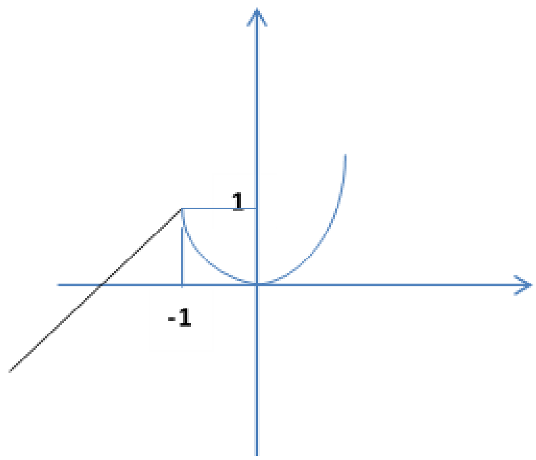
$\lim_{x\to-1^-} x^2 = (-1)^2$ =1,

como $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x)$ entonces

$\lim_{x\to-1} f(x) = 1$ y existe.

iii) $\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1) = 1$ Al cumplirse las tres condiciones significa que f es continua en x_0 = -1.

b. Representación grafica:



Propuestos

Determine un ∂ tal que $0 < | x - x^0 | < \partial$ entonces $| f(x) - L| < \varepsilon$ para indicar

a) $\lim_{x \to -1} 3x - 1 = -2$

b) $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}(x-1) = \frac{3}{2}$ si, $\varepsilon = 0{,}01$

c) $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}(x-1) = \frac{3}{2}$ si, $\varepsilon = 0{,}01$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x-1} = 0$ si, $\varepsilon = 0{,}5$

e) $\lim_{x \to -1} x^3 = -1$ si, $\varepsilon = 0{,}25$

2. Calcule los límites que a continuación se muestran:

a. $.\lim_{x \to 5} \sqrt{5x-16}$

b. $.\lim_{x \to 4} \left(x^3 + x\right)$

c. $.\lim_{x \to a} \left(x^3 + x\right)$

d. $.\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5x-3}{x^5+4x}$

e. $.\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3+64}{x^3-2x^2-7x-4}$

f. $.\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3x+10}{13x^2+16}$

g. $.\lim_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{-x^2+4x+12}$

h. $.\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+5x^2+x}{x^2-2x}$

i. $\cdot i)\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{3}}$

3. $.\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}$

4. $.\lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)^{x+3}$

5. $.\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{3+x^2}{4x^2-1}\right)^{x^2}$

6. Determine la continuidad o no de las funciones que se presentan a continuación:

a. $.r(x)=\begin{cases} \sqrt{4x-8} & para \quad x>2 \\ \dfrac{x^2+4x-12}{5x^3+6x-1} & para \quad x\leq 2 \end{cases}$

b. . $g(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \quad x\neq 4 \\ 2 & si \quad x=4 \end{cases}$

c. . $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ 0 & si \quad x=2 \end{cases}$

d. $$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 3 \\ X+1 & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ 6 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

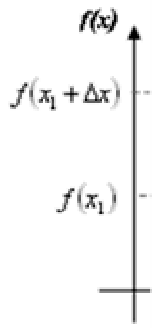
3.3. Interpretación derivada

Ya abordamos el hecho de que el cálculo diferencial como rama de las matemáticas, se ocupa de lo referente al cambio, de tal forma que la razón de cambio se presenta como un proceso continuo entre dos magnitudes llamadas variables que han sido y están conectadas mediante una relación funcional. En muchas de las variables económicas, es tan importante el nivel que muestra la variable como el ritmo al que se mueve. Además de la función y el límite, la derivada es uno de los aspectos que se presentan en el estudio del cálculo diferencial. El concepto de Derivada fue dado a conocer en el siglo XVII, casi simultáneamente por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y Sir Isaac Newton (1642-1727), trabajando de manera independiente. Leibniz consideró probablemente a dx y dy como pequeñas variaciones de las variables x y y, y a la derivada de y con respecto a x, como la razón de dy a dx cuando dy y dx se hacen pequeñas. El concepto de límite, como se conoce hoy día, era desconocido por Leibniz.

El esfuerzo de diferentes estudiosos en diferentes áreas no matemáticas, se ha visto reflejado en la consideración de la matemática como herramienta para la aplicación de la misma en la ingeniería, la física, las ciencias sociales, la economía, por nombrar algunas. Esfuerzos que tratan de poner en práctica la noción de Thomas Jefferson de una “ciudadanía ilustrada”, en la que los individuos, después de adquirir unos conocimientos amplios de los temas, actuarán con criterios a la hora de tomar decisiones personales y políticas. Los temas medioambientales y económicos dominan la vida moderna; detrás de ellos se encuentran asuntos tan complejos de la ciencia, tecnología y matemáticas que requieren tener conciencia de los principios fundamentales.

Interpretación Geométrica de la Derivada

En la siguiente gráfica que representa una función de demanda en la cual , podemos observar que dicha función representa la cantidad de unidades que está dispuesta a adquirir una determinada empresa según su valor y, el precio del bien ofertado. En ella se presentan dos momentos:



a) El punto R que responde al momento inicial donde las cantidades posibles de adquirir (x_1) eran superiores.

b) La disminución de las cantidades producto al desplazamiento de los precios (Δx) hasta $x_1+\Delta x$.

Lo descrito en la gráfica representa las cuántas unidades que está dispuesta a adquirir la empresa por cada peso de disminución, llevada a la siguiente forma para tener conocimiento de lo requerido:

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{x_1+\Delta x-x_1} = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Lo cual representa la expresión de la ecuación de la recta $m=\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$

conocido también en matemáticas como cociente de Newton o cociente incremental de f. Ahora bien, veamos la figura expuesta anteriormente y que refleja las ventas que se pueden obtener con la demanda dada anteriormente. Realicemos un desplazamiento de la recta secante que pasa por los puntos R y S hasta otra que sea tangente y solamente pase por R a través de una disminución gradual del incremento Δx hasta que el mismo tienda a 0. Seguidamente si aplicamos la definición de límite a la expresión m obtenemos,

$$m_{tg\theta} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = f'(x)$$

Si expresamos que la función de las ventas está dada por la ecuación $f(x) = -3x^2 + 5$ y aplicamos la definición anterior,

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3(x+\Delta x)^2 + 5 - (-3x^2+5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 5 + 3x^2 - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6x\Delta x - 3\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(-6x - 3\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= -6x - 3(0)$$

$$= -6x$$

Obtendríamos el valor $-6x$ al momento del desplazamiento de los precios. A esta variación se le conoce con el nombre de derivada. De allí que si hacemos uso formal de la derivada, $f(x) = -3x^2 + 5$ tiene como derivada -6x.

Derivada

Sea f una función definida en un intervalo abierto y x_0 un punto de dicho intervalo. Se dice que la función f es una derivada en x_0, si existe el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$$

Las formas más comunes de presentarse la derivada de una función son: $f'(x)$, y' , $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

3.4. Técnicas de derivación de funciones

Algebra de Derivadas

Sean f y g funciones, y de igual forma U y V funciones derivables, x una variable y k una constante entonces:

1. Derivada de una constante: Si f(x) = k entonces f'(x) = 0
2. Derivada de una identidad: Si f(x) = x entonces f'(x) = 1
3. Derivada de una constante por una identidad: Si f(x) = kx entonces f'(x) = k
4. Derivada de la suma algebraica: Sean (U $\pm$ V) entonces (U $\pm$V)'=U' $\pm$ V'
5. Derivada del producto: Sean (U.V) entonces (U.V)' = U'.V + U.V'
6. Derivada del cociente: Sean $\left(\frac{U}{V}\right)$ con V $\neq 0$ entonces $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'.V - U.V'}{v^2}$

Regla de la Cadena: Derivada de la función compuesta

Si y = f(U) y U = g(x) ambas derivables en cada punto de su dominio, entonces también es derivable y = f(g(x)) y además

$$y' = f'(g(x)).g'(x)$$

Si $y = f(g(x))$,

$\downarrow \quad \downarrow$

$f_e \quad f_i$

f_e: Función externa

f_i: Función interna

De allí que: $(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)$

En otra notación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Algunas Derivadas Directas

1. $(u^n)' = n\,u^{n-1} \cdot u'$

2. $(sen\,u)' = \cos u \cdot u'$

3. $(\cos u)' = -sen\,u \cdot u'$

4. $(\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$

5. $(\cot u)' = -\csc^2 u \cdot u'$

6. $(\sec u)' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$

7. $(\csc u)' = -\csc u \cdot \cot u \cdot u'$

8. $(arcsen\,u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

9. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

10. $(\arctan u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

11. $(\operatorname{arccot} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} . u'$

12. $(\operatorname{arcsec} u)' = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot u'$

13. $(\operatorname{arccsc} u)' = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot u'$

14. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u} \cdot \log_a e\ .\ u'$

15. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

Derivadas de orden Superior

Si f'(primera derivada) es derivable, la derivada de esta función representa la segunda derivada f'', si esta a su vez es derivable, su derivada representa la tercera derivada f''', y así sucesivamente.

Observe como se denotan:

Primera derivada: f', y', f'(x), $\frac{dy}{dx}$

Segunda derivada: f'', y'', f''(x), $\frac{d^2y}{dx^2}$, ….

n-esima derivada: $f^n, y^n, f^n(x), \frac{d^ny}{dx^n}$

3.5. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Determine la derivada de la función $f(x)=5x^2-3x+1$ aplicando la definición: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Para aplicar esta definición, debemos tomar en cuenta que $f(x+h)=5(x+h)^2-3(x+h)+1$.

Así,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[5(x+h)^2-3(x+h)+1\right]-\left[5x^2-3x+1\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[5(x^2+2xh+h^2)-3(x+h)+1\right]-\left[5x^2-3x+1\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{5x^2+10xh+5h^2-3x-3h+1-5x^2+3x-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{10xh+h^2-3h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(10x+h-3)}{h}
\end{aligned}$$

$\lim_{h\to 0} 10x + h - 3 =$ Aplicando propiedades de los límites, obtenemos:

$f'(x) = 10x - 3$

2. Derivar las siguientes funciones aplicando propiedades de la derivada:

a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$

$f'(x) = 10x - 3$

b) $f(x) = (x^3 - x^2)(x^2 + 9)$

$f'(x) = (3x^2 - 2x)(x^2 + 9) + (x^3 - x^2)2x$

c) $f(x) = \frac{3x}{(x^2 - 3x)}$

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 3x) - 3x(x^2 - 3x)}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 3x - 3x^3 + 3x^2}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{-3x^3 - 3x}{(x^2 - 3x)^2}$$

d) $y = \ln(x).senx$

$$y' = \frac{1}{x}.senx + \ln x.cosx$$

3. Determinar y'' para:

a) $y = \frac{3x}{\left(x^2 - 3x\right)}$ el desarrollo de la primera derivada está dispuesto en la parte c) del ejercicio anterior,

$$y' = \frac{-3x^3 - 3x}{\left(x^2 - 3x\right)^2} =$$

$$y'' = \frac{\left(-9x^2 - 3\right)\left(x^2 - 3x\right)^2 - \left(-3x^3 - 3x\right)2\left(x^2 - 3x\right)\left(2x - 3\right)}{\left(x^2 - 3x\right)^4}$$

$$\frac{\left(x^2-3x\right)\left[\left(-9x^2-3\right)\left(x^2-3x\right)-\left(-3x^3-3x\right)2\left(2x-3\right)\right]}{\left(x^2-3x\right)^4}$$

$$= \frac{\left[\left(-9x^2-3\right)\left(x^2-3x\right)-\left(-3x^3-3x\right)2\left(2x-3\right)\right]}{\left(x^2-3x\right)^3}$$

$$= \frac{-9x^4+27x^3-3x^2+9x+12x^4-18x^3+12x^2-18x]}{\left(x^2-3x\right)^3}$$

$$= \frac{3x^4+9x^3+9x^2-9x]}{\left(x^2-3x\right)^3}$$

4. Derive, aplicando regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

a) $y = \sqrt{x^5 - x^{10}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^5 - x^{10}}} \,.\, (5x^4 - 10x^9)$$

b) $y = \ln\left(cos(x^3)\right)$

$$y' = \frac{1}{cos\,(x^3)} \,.\, (-sen(x^3)) \,.\, 3x^2$$

c) $y = e^{tg\,(\log\,(x^6+1))}$

$$y' = e^{tg\,(\log\,(x^6+1))} \,.\, sec^2(\log(x^6+1)) \,.\, \frac{\log\, e}{(x^6+1)} \,.\, 6x^5$$

d) $y = 7^x$

$$y' = 7^x . \ln 7$$

$$y'' = 7^x . \ln 7 . \ln 7 + 7^x . 0$$
$$= 7^x . (\ln 7)^2$$

$$y''' = 7^x . \ln 7 . (\ln 7)^2 + 7^x . 0$$

$$y''' = 7^x . (\ln 7)^3$$

Propuestos

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones usando la definición:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, para todo $h \neq 0$

a) $y = -5x$

a) $y = 7x + 1$

b) $y = 5x^2 - 1$

c) $y = \frac{8}{(x+1)}$

d) $y = \frac{k}{x}$

e) $y = \sqrt{2x-1}$

2. Calcular la derivada primera para las funciones:

$$y = \frac{(x^2+2x)}{(x^2-2x)}$$

a. $.\,g(x) = \ln(2x-3) \cdot sen\ x$

$$y = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

b. $.\,y = \sqrt[5]{\frac{x^2 + x^3 - 7x}{2x}}$

c. $.\,g(y) = e^{\tan y}$

$$h(x) = 2^{3x \cdot senx}$$

$$y = \left(\frac{2}{x} + x^9\right)^6$$

$$y = \left[(9-x^3)^3 - \left(8x + \sqrt{\frac{2}{x^3}}\right)^3\right]^4$$

$$y = \frac{\cos(tgx)}{sec^3(x^2+3)}$$

$$y = \cos(\cot(x^2))$$

d. $, s(x) = 4y + 2 - \ln\sqrt{y}$

e. $. j(x) = \operatorname{arccot}(e^x + 3x)$

f. $. r(x) = \sec(\ln(2y - 5x))$

g. $. y = \ln(e^x \cdot \tan(x-1))$

h. $y = \operatorname{arccsc}\left(\frac{2x-6}{x}\right)$

3.6. Aplicaciones de la derivada, grafica de funciones

La derivada dentro de sus aplicaciones, representa una herramienta que permite el correcto trazado de la gráfica de una función, teniendo en cuenta cada uno de los datos obtenidos de una función como lo son: el dominio, corte con los ejes, intervalos de estudio y asíntotas, entre los más relevantes.

Para completar el estudio para el trazado de la gráfica de una función, a través de la derivada, podemos obtener los puntos máximos, mínimos y puntos de inflexión, desarrollando los criterios de la primera y segunda derivada.

Definiciones:

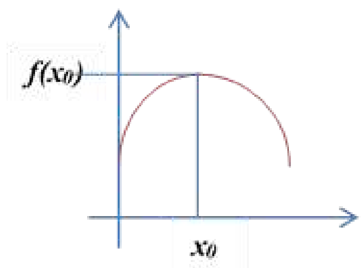
Máximo relativo: f tiene un máximo relativo en x0 si y solo si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in I$

Mínimo relativo: f tiene un mínimo relativo en x0 si y solo si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in I$.

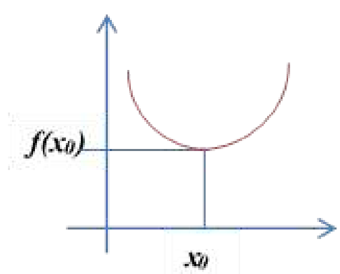
Máximo absoluto: f tiene un máximo absoluto en x_0 si y solo si $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Mínimo absoluto: f tiene un mínimo absoluto en x_0 si y solo si $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Se entiende por valor máximo o mínimo al valor de f en x_0, es decir $f(x_0)$, también se conocen como valores extremos.



f alcanza un valor máximo en x_0



f alcanza un valor minimo en x_0

Número Crítico: Un punto $x_0 \in D(f)$ es un número crítico de f si y solo si se tiene una de las siguientes posibilidades:

i. $f'(x_0) = 0$
ii. $f'(x_0)$ = No existe
iii. si (x_0) es un extremo del dominio,siendo este un intervalo cerrado

Si x_0 es un número crítico de f entones el valor de f en x_0 se llamará valor crítico.

Teorema 1

Si f alcanza un valor extremo en x_0 , entonces x_0 es un número crítico de f.

El reciproco de este teorema es falso, es decir, x_0 puede ser un número crítico de f sin que f tenga un máximo o un mínimo en x_0.

3.7. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Realizar el estudio completo de las siguientes funciones hasta obtener su gráfica aproximada:

a. Lo que se obtiene de la función y=f(x):

Dominio: R

Intersectos OX, OY

OX: $f(x) = x^3 - 3x$

$0 = x^3 - 3x$

$0 = x(x^2 - 3)$

$x=0$ y $x^2 - 3 = 0$

$x=0$ y $x = \pm\sqrt{3}$

Por tanto $P_x = (0,0), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

OY: $f(x) = x^3 - 3x$

$y = x^3 - 3x$

$y = 0^3 - 30$

$y = 0$

Por lo tanto $P_y = (0,0)$

a) Criterio de la primera derivada:

$y' = 3x^2 - 3$

$0 = 3x^2 - 3$

$x = \pm 1$ Números criticos

Si $x = 1$; $f(1) = (1)^3 - 3(1)$

$f(1) = -2$

Por tanto: (1,-2) es un Minimo.

Si $x = -1$; $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)$

$f(-1) = 2$

Por tanto: (-1,2) es un Máximo.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Intervalo	(	(-2,0)	(2,)
Valor Asignado	-1	1	3
Signo de *f'*	+	-	+
Resultado	Crece	Decrece	Crece

c. Criterio de la segunda derivada:

y'' = 6x

0 = 6x

x = 0 Abscisa de los posibles puntos de inflexión.

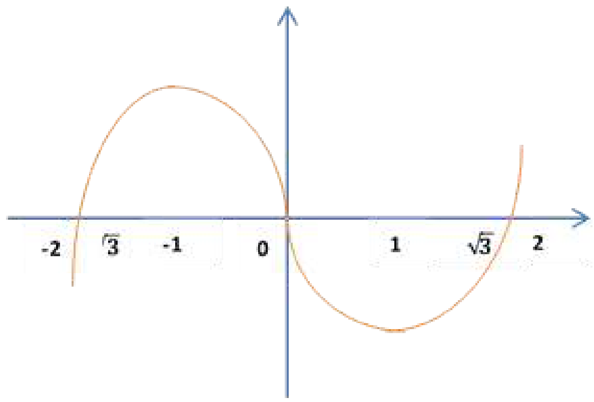
Intervalo	(	(0,)
Valor Asignado	-1	1
Signo de *f''*	-	+
Resultado	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Punto de inflexión: Si ; $x=0 \quad f(0)=6(0)$

$$f(0)=0$$

Por tanto, $x = 0$ es punto de inflexión.

Gráfica:



2. $.\, f(x) = \dfrac{2x}{(4-x^2)}$

a. Lo que se obtiene de la función y=f(x):

Dominio: $4 - x^2 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

Por tanto $D(f) = R - \{\pm 2\}$

Lo que indica discontinuidad de la función en los puntos ± 2.

Intersectos OX, OY

OX: $0 = \frac{2x}{(4-x^2)}$

$2x = 0$

$x = 0$

Por tanto $P_x = (0,0)$

OY: $y = \frac{2x}{(4-x^2)}$

$y = \frac{2(0)}{(4-(0)^2)}$

$y = \frac{0}{4}$

$y=0$

Por tanto $P_y = (0,0)$

b. Criterio de la primera derivada:

$$y' = \frac{2(4-x^2)-2x(-2x)}{(4-x^2)^2}$$
$$y' = \frac{8-2x^2+4x^2}{(4-x^2)^2}$$
$$y' = \frac{8+2x^2}{(4-x^2)^2}$$

$$0 = \frac{8+2x^2}{(4-x^2)^2}$$
$$0 = 8+2x^2$$
$x = \sqrt{-4}$ No puntos críticos. No posee extremos relativos.

c. Criterio de la segunda derivada

$$y'' = \frac{4x(4-x^2)^2-(8+2x^2)2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4}$$
$$y'' = \frac{(4-x^2)[4x(4-x^2)+(8+2x^2)(4x)]}{(4-x^2)^4}$$

$$y'' = \frac{[4x(4-x^2)+(8+2x^2)(4x)]}{(4-x^2)^3}$$
$$y'' = \frac{16x-4x^3+32x+8x^3}{(4-x^2)^3}$$

$$y'' = \frac{4x^3+48x}{(4-x^2)^3}$$

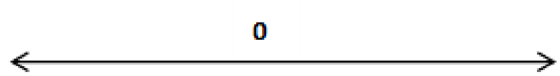
$$0 = 4x^3+48x$$

$$0 = 4x(x^2+12)$$

$0 = 4x$ y $(x^2+12) = 0$

$x = 0$ y $x^2 = -12,\ x = \sqrt{-12}$ No existe en R.

Con $x = 0$ estudiaremos la concavidad y punto de inflexión.



Intervalo	(	(0,)
Valor Asignado	-1	1
Signo de *f”*	-	+
Resultado	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Punto de inflexión: Si $x=0$; $f(0)=\dfrac{2(0)}{\left(4-(0)^2\right)}$

$$f(0)=\frac{0}{(4)}$$

$$f(0)=0$$

Por tanto, x = 0 es punto de inflexión.

Por otro lado, con los datos del dominio se calculan las denominadas asíntotas (rectas) usando definiciones de límite. Así,

AH:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(4-x^2)}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{(4-x^2)}=0$$

Por tanto $y=0$ es asintota horizontal y coincide con el eje x.

AV:

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{2x}{(4-x^2)}=\lim_{x\to-2^+}\frac{-4}{0}=\infty$$

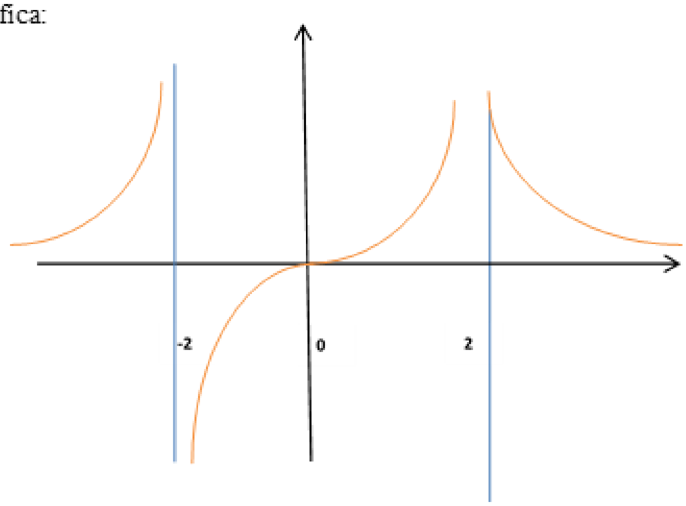
$$\lim_{x\to-2^-}\frac{2x}{(4-x^2)}=\lim_{x\to-2^-}\frac{-4}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x}{(4-x^2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x}{(4-x^2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{4}{0}=\infty$$

Por tanto $x=-2$ y $x=2$ son asintotas verticales.

Gráfica:



3. Trazar la gráfica de la función del costo total C para la cual C(x)=x^3-2x^2+x. Determinar dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo. Evaluar cualquier punto de inflexión.

Para dar solución al problema planteado, usaremos los datos que obtendremos de la función, criterio de la primera derivada y criterio de la segunda derivada.

Intersectos

OX: $0 = x^3 - 2x^2 + x$

$0 = x(x^2 - 2x + 1)$

$0 = x(x-1)^2$

Así, $x = 0$ y $x = 1$: $P_x = (0,0), (1,0)$

OY: $y = (0)^3 - 2(0)^2 + 0$

Así, $y = 0$: $P_y = (0,0)$

Criterio de la primera derivada

$C(x) = x^3 - 2x^2 + x$

$C'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$0 = 3x^2 - 4x + 1$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.3.1}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$;

Asi, $C_1 = 1$ y $C_2 = 1/3$ Puntos críticos

$C(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 = 0$ No define

$C(1/3) = (1/3)^3 - 2(1/3)^2 + 1 = 4/27 = 0{,}15$. (1/3,0,15) es un Maximo

Intervalo	(	(1/3,1)	(1,)
Valor Asignado	-1	0,25	2
Signo de *f'*	+	-	+
Resultado	Crece	Decrece	Crece

Criterio de la segunda derivada

$C'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$C''(x) = 6x - 4$

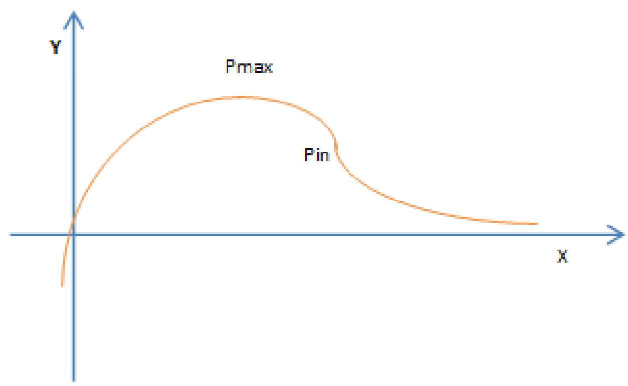
$0 = 6x - 4$

$x = 2/3$

$C(2/3) = (2/3)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27} = 0{,}07$. (2/3,0,07) Es Punto de Inflexión

Intervalo	(-∞,2/3)	(2/3,+∞))
Valor Asignado	-1	1
Signo de *f''*	-	+
Resultado	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Gráfica



Propuestos

1. Realizar el estudio completo a las siguientes funciones, y construir su gráfica

   a) $y = x^2 - 2$

   b) $y = x^2 + 12$

   c) $y = x^3 - 3x$

   d) $y = \frac{x-2}{x+3}$

   e) $y = \frac{1}{x^2+3}$

   f) $y = x^2 + \frac{2}{x}$

2. La ecuación de la demanda de una cierta mercancía viene dada por $p^2+x-14=0$.

Evaluar las funciones del ingreso total del ingreso marginal. Trazar las curvas de la demanda, del ingreso total y del ingreso marginal en el mismo eje de coordenadas. El costo total de producción de x unidades de mercancía está dada por $C(x)=x^2+4x+8$

Obtenga: a) la función del costo promedio y b)la función de costo marginal.. c) determinar el costo mínimo absoluto por unidad en promedio. d) Trace las curvas del costo total, del costo promedio y del costo marginal en el mismo eje de coordenadas.

3.8 Derivada Parcial y Multiplicadores de Lagrange

En el capítulo anterior se realizaron operaciones con funciones que estaban representadas por una variable f(x). Ahora bien; una función f(x,y) representa una función de dos variables, una función f(x,y,z) es de tres variables, y así sucesivamente. De allí que, a las funciones que representan dos o más variables, se les conoce como funciones de variables variables o múltiples variables. Teniendo en cuenta lo antes expuesto, estudiaremos a la Derivada Parcial y a los Multiplicadores de Lagrange, ya que cada una de las definiciones esta complementada con una función de varias variables.

Derivada Parcial

Se conoce como derivada parcial de una función de diversas variables, a aquella expresión derivada respecto a cada una de las variables que intervienen manteniendo las otras como constantes.

Si $z = f(x, y)$ entonces las primeras derivadas parciales de f respecto a x y a y son las funciones f_x, y f_y, definida por:

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Siempre y cuando estos límites existan.

De acuerdo a la definición de derivadas parciales de una función de dos variables, para determinar la derivada f_x , se ha de considerar a y como una constante y se deriva a la función con respecto a x. De manera similar, para determinar la derivada f_y, se ha de considerar a x como una constante y se deriva a la función con respecto a y.

Su notación se expresa de la manera siguiente: $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial y}{\partial x}$

Dada $z = f(x, y)$, las derivadas parciales de f respecto a x y a y; f_x, y f_y, se denotan:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Luego las derivadas parciales evaluadas en un punto se denotan,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(x, y) \quad \text{y}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(x, y)$$

Multiplicadores de Lagrange

En diferentes problemas de optimización, existen restricciones, para los valores que pueden usarse en la obtención de una solución óptima. Estas restricciones tienden a complicar los problemas de optimización debido a que la solución óptima puede encontrarse en puntos frontera del dominio. Para abordar este tipo de situaciones, se hará uso del denominado método de los multiplicadores de Lagrange. Que no es más que un procedimiento para determinar los máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a restricciones. Este método reduce el problema restringido con n variables a uno sin restricciones de n + k variables, donde k es igual al número de restricciones, y cuyas ecuaciones pueden ser resueltas más fácilmente. Estas nuevas variables escalares desconocidas, una para cada restricción, son llamadas multiplicadores de Lagrange. El método dice que los puntos donde la función tiene un extremo condicionado con k restricciones, están entre los puntos estacionarios de una nueva función sin restricciones construida como una combinación lineal de la función y las funciones implicadas en las restricciones, cuyos coeficientes son los multiplicadores.

Una vez conocido el Teorema de Lagrange, se darán las condiciones necesarias para la existencia de tal multiplicador:

Teorema de Lagrange

Sean f y g funciones cuyas primeras derivadas parciales sean continuas y tales que f tenga un extremo en el punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de la restricción $g(x,y)=c.$ Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

Multiplicadores de Lagrange

Sean f y g funciones que satisfagan la hipótesis del Teorema de Lagrange y sea f una función que tenga un mínimo o un máximo sujeto a la restricción $\boldsymbol{g(x, y) = c}$.

Para obtener el mínimo o el máximo de f se siguen los siguientes pasos:

1) Se resuelven simultáneamente las ecuaciones $\boldsymbol{\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)}$ y $\boldsymbol{g(x, y) = c}$ resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:
   $\boldsymbol{f_x(x,y) = \lambda\, g_x(x, y)}$
   $\boldsymbol{f_y(x,y) = \lambda\, g_y(x, y)}$
   $\boldsymbol{g(x, y) = c}$

2) Se evalúa *f* en cada uno de los puntos solución obtenidos en el primer paso. El valor mayor corresponde a un máximo de f sujeto a la restricción $\boldsymbol{g(x, y) = c}$ y el valor menor corresponde a un mínimo de f sujeto a la restricción $\boldsymbol{g(x, y) = c}$

3.9. Ejercicios resueltos y propuestos

Derivadas Parciales

Resueltos

1. Determine las derivadas parciales de fx y fy correspondientes a la función:
   $f(x,y) = 2x - x^2y^2 + 3x^3y$

Para la solución debemos considerar:
1. A y como constante y derivamos la función respecto a x, así,
$f_x(x,y) = 3 - 2xy^2 + 9x^2y$ (Derivada parcial respecto a x)

2. A x como constante y derivamos la función respecto a y, así,
$f_y(x,y) = -2yx^2 + 3x^3$ (Derivada parcial respecto a y)

a. $f(x,y) = xe^{3xy}$ y evaluar ambas en el punto (1,ln2).

Para la solución debemos considerar:
1) A y como constante y derivamos la función respecto a x, así,
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(x,y)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,ln\,2)} = f_x(x,y) = e^{3xy} + y3e^{3xy} \quad \text{(Derivada parcial respecto a } x\text{)}$$
$$= e^{3ln\,2} + ln23e^{3ln\,2}$$
2) A x como constante y derivamos la función respecto a y, así,
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(x,y)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,ln2)} = f_y(x,y) = x3e^{3xy} \quad \text{(Derivada parcial respecto a } y\text{)}$$

$$= 3e^{3ln\,2}$$

Multiplicadores de Lagrange

Resueltos

Determine el valor máximo de f(x,y)=4xy donde x>0 y y>0, sujeto a la restricción $\left(\frac{x^2}{3^2}\right)+\left(\frac{y^2}{4^2}\right)=1$

Para la solución iniciamos con:

$$g(x,y) = \left(\frac{x^2}{3^2}\right) + \left(\frac{y^2}{4^2}\right) = 1$$
Luego igualamos:
$\nabla f(x,y) = 4yi + 4xj$ y y $\lambda\, g(x,y) = \left(\frac{2\lambda\, x}{9}\right) i + \left(\frac{2\lambda\, y}{8}\right) j$ y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$4y = \tfrac{2}{9}\lambda\, x \qquad f_x(x,y) = \lambda\, g_x(x,y)$$
$$4x = \tfrac{1}{8}\lambda\, y \qquad f_y(x,y) = \lambda\, g_y(x,y)$$
$$\left(\frac{x^2}{3^2}\right) + \left(\frac{y^2}{4^2}\right) = 1 \qquad \text{Restricción}$$

De la primera ecuación se obtiene $\lambda = \dfrac{18y}{x}$ y se sustituye en la segunda ecuación,

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y \quad \text{entonces} \quad x^2 = \frac{9}{16}y^2.$$

Este valor x^2 lo sustituimos en la tercera ecuación,

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 = 1 \quad \text{entones} \quad y^2 = 8$$

Por tanto, $y = \pm 2\sqrt{2}$. Como se requiere que $y > 0$, se elige el valor positivo y se tiene que,

$$x^2 = \frac{9}{16}y^2$$

$$x^2 = \frac{9}{16}(8) = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Así, el valor máximo de f es:

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) = 4xy = 4\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(2\sqrt{2}\right) = 24$$

Podemos observar que expresar la restricción como,

$$g(x,y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{ó} \quad g(x,y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$$

No afecta la solución, la constante se simplifica cuando se forma $\vee g$

2. Determine el valor mínimo de $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$, sujeto a la restricción $2x - 3y - 4z = 49$

Para obtener el sistema de ecuaciones, tomamos la restricción y las derivadas parciales de las expresiones, teniendo conocimiento de:

$$\nabla f_x(x,y,z) = 4xi + 2yj + 6zk \quad \text{y} \quad \lambda g(x,y,z) = 4\lambda i + 2\lambda j + 6\lambda k$$

$$\begin{array}{rl} 4x = 2\lambda & f_x(x,y,z) = \lambda\, g_x(x,y,z) \\ 2y = -3 & f_y(x,y,z) = \lambda\, g_y(x,y,z) \\ 6z = -4\lambda & f_z(x,y,z) = \lambda\, g_z(x,y,z) \\ 2x - 3y - 4z = 49 & \text{Restricción} \end{array}$$

Al darle solución a este sistema, se obtuvo: x = 3, y = -9 y z = -4. Con lo que podemos concluir que el valor óptimo de f es:

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$$

$$f(3,-9,-4) = 2(3)^2 + (-9)^2 + 3(-4)^2$$

$$= 147$$

A partir de la función inicial y la restricción, f(x,y,z) no presenta máximo. Por tanto el valor óptimo de f es un mínimo.

Propuestos

1. Determine las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:
   a) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 9$
   b) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
   c) $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{4y^2}{x}$
   d) $z = e^y \sin(xy)$
   e) $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ evaluar en (1,1)
   f) $f(x.y.z) = x^2y^3 + 3xyz - 2yz$ evaluar en (-2,1,2)

2. Use multiplicadores de Lagrange para:
   c. Hallar los extremos que se indican, suponiendo que x y y son positivos.
   4. Minimice f(x,y)= 3x + y + 10, restricción x^2 y =6
   5. Maximice f(x,y)=2x+2xy^2+y restricción, 2x+y=100
   6. Maximice f(x,y)=e^{xy}, restricción, x^2+y^2=6

7. Minimice $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, restricción $x+y+z=1$
8. Maximice $f(x,y,z) = zxy$, restricción $x + y + z = 6$
9. Minimice $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, restricción $x + y + z = 6$

b. Hallar todos los extremos de la función sujeta a la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$. Si $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$

3.10. Aplicación de las técnicas de derivadas parciales y multiplicadores de Lagrange

Con el conocimiento obtenido en el desarrollo de ejercicios con el uso de derivadas parciales y multiplicadores de lagrange, se presentan a continuación problemas que requieren de la aplicación de las definiciones antes mencionadas.

3.11. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Supongamos que el costo de producción de un cierto bien depende de dos insumos: el costo de mano de obra y el costo de los materiales. En particular si z es el costo de producción; x, el costo por hora de la mano de obra; y y el costo por peso del material entonces,

$$z = 600 + 30x + 6y$$

Como $\frac{\partial z}{\partial x} = 30$

Se deduce que cuando el costo de materiales permanece fijo, un incremento de \$1 en el costo de la mano de obra origina un aumento de \$30 en el costo de producción,

como $\frac{\partial z}{\partial y} = 6$

Entonces cuando el costo de mano de obra permanece fijo, un incremento de \$1 en el costo del material origina un aumento de \$6 en el costo de producción.

2. Supongamos que x unidades de un cierto artículo A y y unidades de un artículo B son demandadas cuando el precio unitario de A es p y el precio unitario de B es q. Cuyas ecuaciones de demanda son:

$x = 4q^2 - 5pq$ y

$y = 7q^2 - 3pq$

Determinar la cantidad demandada de cada artículo cuando el precio de A es \$40 y el precio de B es \$60.

a. Evaluar las cuatro demandas marginales parciales cuando p=40 y q=60.
b. Utilizar los resultados del apartado b) para determinar cómo se modifica la cantidad demandada de cada artículo cuando el precio de A aumenta de \$40 a \$41 y el precio de B permanece fijo en \$60.
c. Utilizar los resultados del apartado b) para determinar cómo se modifica la cantidad demandada de cada artículo cuando el precio de B aumenta de \$60 a \$61 y el precio de a permanece fijo en \$40.
d. Solución a) Tomamos los precios de A (p=40), B(q=60) y los sustituimos en las ecuaciones de demanda, así,

$x = 4q^2 - 5pq$ y
$y = 7q^2 - 3pq$ toman los valores:

$x = 4(40)^2 - 5(40)(60)$ y
$x = 14400 - 12000$
$x = 2400$ Cantidad demandada del articulo A.

$y = 7(60)^2 - 3(40)(60)$
$y = 11200 - 7200$
$y = 4000$ Cantidad demandada del articulo B

Solución b) Para evaluar las cuatro demandas marginales aplicamos derivadas parciales:

$\frac{\partial x}{\partial p} = -5q$ y $\frac{\partial x}{\partial q} = 8q - 5p$

$\frac{\partial y}{\partial p} = 14p - 3q$ y $\frac{\partial y}{\partial q} = -3p$

Ya derivada cada una de las demandas, sustituimos p = 40 y q = 60 en las mismas.

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -5(60) \quad \text{y} \quad \frac{\partial x}{\partial q} = 8(60) - 5(40)$$
$$= -300 \qquad\qquad = 280$$
$$\frac{\partial y}{\partial p} = 14(40) - 3(60) \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial q} = -3(40)$$
$$= 380 \qquad\qquad = 120$$

Solución c) Con el resultado anterior interpretamos lo siguiente: cuando el precio de A aumenta de \$40 a \$41, la cantidad demandada de A decrece en 300 unidades; y la cantidad demandada de B se incrementa en 380 unidades.

Solución d) Con el resultado de b) interpretamos lo siguiente: cuando el precio de A se mantiene fijo en \$40, el precio de B se incrementa de \$60 a \$61, entonces la cantidad demandada de A, en 280 unidades; y la cantidad demandada de B decrece en 180 unidades.

3. Supongamos que x representa la demanda de queso y y la demanda de queso fundido cuando el precio por gramos es p centavos y el precio por gramos de margarina es q centavos. Las ecuaciones de demanda son:

   $x = p^{(-0,2)}\ q^{03}$ y

   $y = p^{0,5}\ q^{(-1,2)}$

Demuestre que el queso y el queso fundido son sustitutos y determine las cuatro elasticidades parciales de la demanda. Interprete los resultados.

Solución: Tengamos en cuenta, que la elasticidad de precios en la demanda indica la variación porcentual aproximada en la demanda que corresponde al cambio del 1% en el precio.

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -0{,}2p^{-1{,}2}q^{03} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x}{\partial q} = 0{,}3p^{-0{,}2}q^{-0{,}7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p} = 0{,}5p^{-0{,}5}q^{-1{,}2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x}{\partial q} = -1{,}2p^{0{,}5}q^{-2{,}2}$$

Como las derivadas $\frac{\partial x}{\partial q} = 0,3p^{-0,2}q^{-0,7}$ y $\frac{\partial y}{\partial p} = 0,5p^{-0,5}q^{-1,2}$ son mbas positivas, el queso y el queso fundido son sustitutos.

Ahora, usaremos las formulas siguientes para la interpretación de los resultados:

$$\frac{Ex}{Ep} = \frac{p}{x}.\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{p}{p^{-0,2}q^{03}}(-0,2p^{-1,2}q^{03}) = -0,2$$

$$\frac{Ex}{Eq} = \frac{q}{x}.\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{q}{p^{-0,2}q^{03}}(0,3p^{-0,2}q^{-0,7}) = 0,3$$

$$\frac{Ey}{Ep} = \frac{p}{y}.\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{p}{p^{0,5}q^{-1,2}}(0,5p^{-0,5}q^{-1,2}) = 0,5$$

$$\frac{Ey}{Eq} = \frac{q}{y}.\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{q}{p^{0,5}q^{-1,2}}(-1,2p^{0,5}q^{-2,2}) = -1,2$$

De los valores de $\frac{\mathrm{E}x}{\mathrm{E}p}$ y $\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}p}$ puede concluirse que si el precio del queso fundido se mantiene constante y el precio del queso se incrementa en 1%, la demanda del queso decrece en 0,2% y la demanda del queso fundido aumenta en 0,5%. Así mismo, de los valores de $\frac{\mathrm{E}x}{\mathrm{E}q}$ y $\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}q}$ se deduce que al mantener constante el precio del queso, un incremento de 1% en el precio del queso fundido ocasiona un incremento en la demanda del queso de 0,3%, y un decremento en la demanda del queso fundido de 1,2%.

4. Supongamos que U es una función de utilidad para la cual
   U(x , y , z) = xyz

Donde x, y, z representan el número de unidades de las mercancías A ,B, C, respectivamente, que semanalmente consume una persona en particular. Supongamos que \$2, \$3 y \$4 son los precios unitarios de A, B, C, respectivamente, y que el gasto semanal total por las mercancías está presupuestado en \$90. ¿Cuántas unidades de cada artículo deben adquirirse en una semana para maximizar el índice de utilidad del consumidor?

Para la solución indicamos que debemos determinar lo valores de x, y, z que maximizan a U(x,y,z)=xyz sujeta a la restricción presupuestal

2x + 3y + 4z = 90

Cada una de las variables x, y, z está en el intervalo [0,+∞).

Sea

$$g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 90 \quad \text{y}$$

$$F(x, y, z, \lambda) = U(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

$$= xyz + \lambda(2x + 3y + 4z - 90)$$

Determinamos las derivadas parciales y se les iguala a cero.

$$f_x(x, y, z, \lambda) = yz + 2\lambda$$

$$f_y(x, y, z, \lambda) = xz + 3\lambda$$
$$f_z(x, y, z, \lambda) = xy + 4\lambda$$

$$f_\lambda(x, y, z, \lambda) = 2x + 3y + 4z - 90$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones construido, así

De $f_x(x, y, z, \lambda)$ y $f_y(x, y, z, \lambda)$

$$\frac{yz}{xz} = \frac{-2\lambda}{-3\lambda}$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

De $f_x(x, y, z, \lambda)$ y $f_z(x, y, z, \lambda)$

$$\frac{yz}{xy} = \frac{-2\lambda}{-4\lambda}$$

$$z = \frac{1}{2}x$$

Luego sustituimos los valores encontrados en

$f_\lambda(x, y, z, \lambda) = 2x + 3y + 4z - 90 = 0$

$2x + 3\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{2}x - 90=0$

$2x + 2x + 2x = 90$

$6x = 90$

$x = 15$

Por lo tanto, $y = \frac{2}{3}(15)$ y $z = \frac{1}{2}(15)$

$y = 10$ y $z = \frac{15}{2}$

Con los valores de x y z,

$U(15,10,\frac{15}{2}) = 15.10.\frac{15}{2}$

$= 1125$ Índice de utilidad máximo.

Propuestos

1. Supongamos que x unidades de un cierto artículo A y y unidades de un artículo B son demandadas cuando el precio unitario de A es p y el precio unitario de B es q. Cuyas ecuaciones de demanda son:

   $x = 3q^2 - 2pq$ y
   $y = 8q^2 - 5pq$

e. Determinar la cantidad demandada de cada artículo cuando el precio de A es \$30 y el precio de B es \$50.
f. Evaluar las cuatro demandas marginales parciales cuando p=30 y q=50.
g. Utilizar los resultados del apartado b) para determinar cómo se modifica la cantidad demandada de cada artículo cuando el precio de A aumenta de \$30 a \$31 y el precio de B permanece fijo en \$50.
h. Utilizar los resultados del apartado b) para determinar cómo se modifica la cantidad demandada de cada artículo cuando el precio de B aumenta de \$50 a \$51 y el precio de a permanece fijo en \$30.

2. Supongamos que x representa la demanda de mantequilla y y la demanda de margarina cuando el precio por gramos es p centavos y el precio por gramos de margarina es q centavos. Las ecuaciones de demanda son:

$x = p^{-0,3}\ q^{0,4}$ y

$y = p^{0,6}\ q^{-1,3}$

Demuestre que la mantequilla y la margarina son sustitutos y determine las cuatro elasticidades parciales de la demanda. Interprete los resultados.

3. Una cierta mercancía tiene una función de producción f definida por

$$f(x, y) = 3 - \frac{7}{xy}$$

Las cantidades de los dos insumos están dadas por 100x y 100y, cuyos precios por unidad son, respectivamente, \$10 y \$5, y la cantidad de la producción está dada por 100z, cuyo precio por unidad es \$20.Determine la utilidad total máxima.

4. Una fábrica ocupa dos tipos de trabajadores, A y B. Los trabajadores A ganan \$15 por turno, y los trabajadores B, \$14 por turno. Para un cierto turno de producción se ha determinado que además de los salarios de los trabajadores, si se utilizan x trabajadores tipo A y y trabajadores B, el número de u.m, en el costo del turno es y^3+x^2-6xy+800. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben utilizarse de modo que el costo total del turno sea mínimo si se requieren al menos tres trabajadores de cada clase para un turno?

5. Supongamos que U es una función de utilidad para la cual

$U(x, y, z) = xyz$

Donde x, y, z representan el número de unidades de las mercancías A ,B, C, respectivamente, que semanalmente consume una persona en particular. Supongamos que \$4, \$5 y \$6 son los precios unitarios de A, B, C, respectivamente, y que el gasto semanal total por las mercancías está presupuestado en \$100. ¿Cuántas unidades de cada artículo deben adquirirse en una semana para maximizar el índice de utilidad del consumidor?

Supongamos que U es una función de utilidad que implica cinco mercancías A, B, C, D y E. Ademas considere que x unidades A, y unidades de B, z unidades de C, s unidades de D, y t unidades de E, se consumen semanalmente, y que los precios unitarios de A, B, C, D y E son, respectivamente, \$3, \$2, \$1, \$4, \$5. Si U(x,y,z,s,t)=xyzst y el gasto semanal total de la mercancía es de \$160. ¿Cuántas unidades de cada mercancía deben comprarse en una semana para maximizar el índice de utilidad del consumidor? U está sujeta a la restricción

$2x + 3y + 4z = 90.$

6. Una compañía tiene tres fábricas que producen cada una el mismo producto.. Si la fábrica A produce x unidades, la B produce y unidades y la C produce z unidades, sus costos de fabricación respectivos son ($3x^2$ +300) unidades monetarias (u.m), (y^2+400) (u.m), y ($2z^2$+200) (u.m), si debe surtir un pedido por 1100 unidades, ¿Cómo debe distribuirse la producción entre las tres fábricas para minimizar el costo total de manufactura?

CAPÍTULO IV

CALCULO INTEGRAL

MAWIL
Publicaciones Impresas
y Digitales
www.mawil.us

4.1 Definición y notación de integrales indefinidas.

Integral Indefinida

Sea $f(x)$ una función, definida en un intervalo I, se llama antiderivada o integral indefinida a la operación: $f'(x) = f(x)$ con $x \in I$.

Notación

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

4.2 Técnicas de integración

Regla de Potencias

Teorema 1

Si n es un número racional cualquiera excepto (-1), entonces: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$

Este teorema incluye el caso en el que n=0, $\int x^0 dx = \dfrac{x^{0+1}}{0+1} + k$ entonces $\int dx = x + k$. También dado el caso en que no sea específico el intervalo I, se entiende que la conclusión es válida para cualquier intervalo en el que x^n esté definida.

Teorema 2

Sean f y g dos funciones que tienen antiderivadas (integrales indefinidas) y sea k una constante, entonces:

¡) Un factor constante puede escribirse o delante del signo integral o después de él,

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

¡¡) La integral de una suma algebraica de expresiones diferenciales es igual a la misma suma algebraica de las integrales de esas expresiones,

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

4.3 Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Determine la antiderivada general de $x^{\frac{4}{3}}$.

Para la Solución aplicamos el Teorema 1:

$$\int x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + k = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + k = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + k$$

Observe que para antiderivar una potencia de x se aumenta uno al exponente y se divide entre el nuevo exponente. De todo resultado de diferenciación puede deducirse siempre una fórmula para integración.

2. Determinar la solución de $\int (5x^3 + 2x^2 - 3x + 7)dx$

Para la solución aplicamos los dos teoremas presentados:

$$5\int x^3dx + 2\int x^2dx - 3\int xdx + 7\int dx$$

$$5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 7x + k$$

3. Determinar la solución de $\int (\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}})dx$

Para la solución aplicamos los dos teoremas presentados, luego de haber transformado las funciones con operaciones matemáticas básicas:

$$\int x^{\frac{1}{3}}\,dx + 3\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 3\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + k$$

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+k$$

$$\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+6x^{\frac{1}{2}}+k$$

Propuestos

1. Determine la solución de las siguientes integrales:

a. $\int\left(2x^5-3x^2+2x-7\right)dx$

b. $\int\left(\frac{3a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+2c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

c. $\int\frac{\left(a+bt^2\right)^2}{\sqrt{x}}dx$

d. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

e. $\int\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)^2\sqrt{x}dx$

f. $\int 2\pi y\left(4-\sqrt[3]{y^2}\right)dy$

g. $\int(3-y)\sqrt{y}dy$

4.4 Método de integración por sustitución o cambio de variable.

Este método se aplica por lo general, a aquellas integrales que presentan en el integrando funciones compuestas.

Teorema 3

Sean f y g funciones tales que $(f\circ g)$ son continuas en un intervalo I. Si F es una primitiva (antiderivada) de f en I, entonces: $\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx=F\left[g(x)\right]+k$

Pasos a seguir para integrar por sustitución:

1. Escoger una sustitución, esto es: u = g(u) (por lo general se escoge a la función interna).
2. Determinar du = g´(x) dx .
3. Reescribir la integral inicial en términos de la nueva variable (u) .
4. Evaluar la integral resultante en términos de u .
5. Devolver el cambio, para observar a la primitiva en términos de la variable inicial.

Teorema 4

Regla general de potencias para integrales: Si g es una función derivable de x, entonces

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + k \ldots\ldots \forall n \neq 0$$

Equivalentemente, si $u = g(x)$, entonces

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k \ldots \forall n \neq 0$$

Integrales trigonométricas

Las integrales trigonométricas, se pueden reconocer porque presentan en el integrando funciones del tipo trigonométricas.

Algunos ejemplos de ellas las presentamos a continuación, las cuales representan integrales inmediatas:

$$\int senx\ dx = -cosx + k$$

$$\int cosx\ dx = senx + k$$

$$\int tgx\ dx = lnIsecxI + k$$

4.5 Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Estudie las siguientes integrales:

   b. $\int (x^3+6x)^5 (3x^2+6)\,dx$

   Solución:

1. Se identifica la función compuesta y se toma la interna como la u sustitución, así: $u = x^3+6x$

2. Se deriva u en base a x: $\frac{du}{dx} = (3x^2+6), luego...du = (3x^2+6)\,dx$

3. Se reescribe la integral inicial en base a la nueva variable: $\int u^5 du$

4. Se determina la integral usando regla de potencia:

$$\int u^5 du = \frac{u^{5+1}}{5+1} + k$$

$$= \frac{u^6}{6} + k$$

5. Se devuelve el cambio, para mostrar la solución en base a x:

$$\int (x^3+6x)^5 (3x^2+6)\,dx = \frac{(x^3+6x)^6}{6} + k$$

c. $.\int e^{tgx} sec^2 x\,dx$

Solución:

$u = tgx$

$du = sec^2 x\ dx$

$$\int e^u du = e^u + k$$

$$= e^{tgx} + k$$

d. $\int \frac{6}{(x+9)} dx$

Solución:

$u = x + 9$

$du = 1dx$

$$6 \int \frac{1}{u} du = 6 \ln u + k$$

$$= 6\ln(x + 9) + k$$

Importante: Las dos últimas soluciones corresponden a integrales inmediatas que se pueden ubicar en tablas diseñadas para tales expresiones. Aquí algunas de ellas:

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + k$

2. $\int e^x dx = e^x + k$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + k$

1. Determine las siguientes integrales:

a. $\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^3+4}} dx$

b. $\int \frac{(2x+3)}{\sqrt{x^2+3x}} dx$

c. $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^5 \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

d. $\int \frac{(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+1}} dx$

e. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^3} dx$

f. $\cdot\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x}dx$

g. $\cdot\int \frac{e^{\theta}}{a+be^{\theta}}d\theta$

h. $\cdot\int ba^{2x}dx$

i. $\cdot\int e^{\frac{x}{n}}dx$

j. $\cdot\int \left(e^{5x}+a^{5x}\right)dx$

k. $\cdot\int x\left(e^{x^2}+2\right)dx$

l. $\cdot\int e^{\left(x^3-3x+1\right)}\left(x^2-1\right)dx$

m. $\cdot\int x5^{x^2}\,dx$

n. $\cdot\int \sqrt{senx}\,cosx\,dx$

o. $\cdot\int \frac{senx}{\sqrt[3]{cosx}}dx$

p. $\cdot\int \frac{e^{tgx}}{cos^2x}dx$

q. $\cdot\int sen^4x.cosx\,dx$

r. $\cdot\int tg^4\left(5x\right).sec^2\left(5x\right)dx$

4.6 Integrales de forma

Potencia Impar y Positiva

Identidad a usar $sen^2x+cos^2x=1$

$sen^2x=1-cos^2x$

$cos^2x=1-sen^2x$

Potencia Par y Positiva

Identidad Trigonométrica a usar: Ángulo Medio.

$$sen^2x = \frac{1 - cos2x}{2}$$
$$cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

4.6.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Calcular $\int sen^3x\,dx$

$$\int sen^2xsenx\ dx$$

$$\int(1 - cos^2x)senx\ dx = \int senx\ dx - \int cos^2 x.senx\ dx$$

$$u = cosx$$
$$du = -senx\ dx$$

$$= -\int\ du + \int u^2\ du$$

$$= -u + \frac{u^3}{3} + k$$

$$= -cosx + \frac{1}{3}cos^3x + k$$

2. Calcular $\int cos^3x\,dx$

$$\int cos^2xcosx\ dx$$

$$\int(1 - sen^2x)cosx\ dx = \int cosx\ dx - \int sen^2 x.cosx\ dx$$

$$u = senx$$
$$du = cosx\ dx$$

$$= \int\ du - \int u^2\ du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + k$$

$$= senx - \frac{1}{3}sen^3x + k$$

3. Calcular $\int cos^2 x\, dx$

$$\int \left[\frac{1+cos2x}{2}\right] dx$$

$$\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int cos2x\ dx$$

$$u = 2x$$
$$du = 2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int du + \frac{1}{4}\int cosu\ du$$

$$= \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}senu + k$$

$$= \frac{1}{4}2x + \frac{1}{4}sen2x + k$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen2x + k$$

Propuestos

1. Calcular las siguientes integrales

a) $\int cos^3 3x\, dx$

b) $\int sen^3 x\ dx$

c) $\int cos^3 2x.sen^2 2x\ dx$

a) $\int sen^3 3x.cos^2 3x\, dx$

b) $\int \frac{cos^3 x}{\sqrt{senx}}\, dx$

c) $\int sen^2 x\, dx$

d) $\int sen^2 5x.cos^2\ 5x\ dx$

4.7 Integrales de forma $\int tg^m x . sec^n x \, dx$

Identidad Trigonométrica a usar: $sec^2 x - tg^2 x = 1$

$sec^2 x = 1 + tg^2 x$

$tg^2 x = sec^2 x - 1$

4.7.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Calcular $\int sec^4 x \, dx$

$$\int sec^2 x sec^2 x \, dx$$

$$\int (1 + tg^2 x) sec^2 x \, dx$$

$$\int sec^2 x \, dx + \int tg^2 x \, sec^2 x \, dx$$

$u = tgx$
$du = sec^2 x \, dx$

$$\int du + \int u^2 du$$

$$= u + \frac{u^3}{3} + k$$

$$= tgx + \frac{tg^3 x}{3} + k$$

1. $\int tg^3 x \sec x \, dx$

$$\int tg^2 x \, tgx \, secx \, dx$$

$$\int (sec^2 x - 1) \, tgxsecx \, dx$$

$$\int sec^2 x \, tgxsecx \, dx - \int tgxsecx \, dx$$

$$u = secx$$
$$du = secxtgx \, dx$$

$$\int u^2 \, du - \int u \, du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + k$$

$$= \frac{sec^3 x}{3} - \frac{sec^2 x}{3} + k$$

2. Integre $\int tg^2 x \, dx$

$$\int (sec^2 x - 1) \, dx$$

$$\int sec^2 x \, dx - \int dx$$

$$= tgx - x + k$$

3. Integre $\int \frac{tgx}{secx} \, dx$

$$\int \frac{\frac{senx}{cosx}}{\frac{1}{cosx}} \, dx$$

$$\int \frac{senxcosx}{cosx} \, dx$$

Propuestos

1. Integre las siguientes expresiones:

a)$\int \frac{7}{cos^2 6x} dx$

b)$\int tg^3x \,. \sqrt{secx}\, dx$

c)$\int \frac{tg^3 x}{\sqrt[3]{secx}} dx$

d)$\int tg^2 \frac{x}{2} dx$

a) $\int tg^4 x\, dx$

f)$\int sec^2 x. tagx\, dx$

g)$\int sec^2 x. tg^2 x\, dx$

h)$\int \frac{tg^2 x}{secx} dx$

i) $\int \frac{tgx}{sec^2 x} dx$

Resolver integrales donde se presentan el seno, coseno, tangente y secante elevadas a una potencia, requiere la aplicación de las reglas básicas de integración y el Método de integración por sustitución o cambio de variable; así como también, las destrezas en la también aplicación de identidades, razones y relaciones trigonométricas.

4.8. Integración por parte

La técnica de integración por parte, generalmente se aplica cuando en el integrando se presenta el producto de funciones algebraicas y trascendentes.

Aquí vamos a presentar algunos lineamientos para la integración por parte, ya que se hará uso del siguiente teorema.

Teorema 5

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int \boldsymbol{u\, dv = uv - \int v\, du}$$

Lineamientos para la solución:

a. Escoger como dv el factor del integrando más complicado que se ajuste a una regla de integración. Luego u representará al factor o los factores restantes del integrando.
b. Escoger como u al factor del integrando cuya derivada sea una función más simple que u. Luego dv representará al factor o los factores restantes del integrando.

4.8.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Integre $\int (x+1)a^x\, dx$

Podemos observar que en el integrando se presenta un producto de dos funciones, una algebraica $(x+1)$ y una trascendente (a^x) . Ahora bien, para la solución aplicaremos el Teorema 5 de integración por parte:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Siguiendo los lineamientos presentados, a conveniencia. Tomamos,

$dv = a^x dx$ lo integramos para obtener v

$$\int dv = \int a^x\, dx$$

$$v = \frac{a^x}{\ln a} + k$$

El factor restante $(x+1)$ lo tomamos como u y lo derivamos para obtener du,

$u=(x+1)$

$du=1dx$

Teniendo definido cada uno de los términos del teorema, sustituimos en la fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int (x+1)a^x dx = (x+1)\frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a}\,dx$$

Obsérvese, que el integral de la izquierda se reduce al integral de la derecha.

$$\int (x+1)a^x dx = (x+1)\frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int a^x\,dx$$

$$= (x+1)\frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\left[\frac{a^x}{\ln a}\right] + k$$

2. Integre $\int xlnx\,dx$

Aplicamos integración por parte;

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Seguimos los lineamientos presentados, a conveniencia. En este caso tomamos al lnx como u. y proseguimos.

$u=lnx$

$du=\frac{1}{x}dx$

Luego, x se toma como dv

$$dv = x\,dx$$

$$\int dv = \int x\,dx$$

$$v = \frac{x^2}{2} + k$$

Teniendo definido cada uno de los términos del teorema, sustituimos en la fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int (lnx\,xdx = lnx\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= lnx\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= lnx\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right] + k$$

Propuestos

1. Integre las siguientes expresiones

a. $.\int e^{2x}(x-1)dx$

b. $\int e^{2x}x^2dx$

c. $\int 5^{2x}(x+1)dx$

d. $\int 3^{2x}x^2dx$

e. $\int senx(x+5)dx$

f. $\int cos(x-1)(x-7)dx$

g. $\int lnx(x+9)dx$

h. $\int (x^2 - 2x + 6) lnx dx$

i. $\int \frac{x}{\sqrt{3+2x}} dx$

j. $\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2} dx$

4.9 La integral definida

Si f esa definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y el $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\, \Delta x_i$ existe, entonces f es integrable en $[a, b]$ y el límite se denota por $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$. Este límite se conoce como integral definida de f de a a b. El número a es el límite inferior de integración y el número b es el límite superior de integración.

Al observar esta definición podemos darnos cuenta que la notación de integral indefinida y la integral definida, se diferencian por los extremos contenidos en la definida que permiten la evaluación de la misma dando como resultado un número; en cambio la indefinida implica una familia de integrales.

Para dar solución a este tipo de integrales, tomaremos como referencia al denominado teorema fundamental del cálculo, ya que usar la definición formal de integral definida, implica la aplicación de propiedades para los límites y de la denominada sumatoria de Riemann, las cuales no estarán definidas en el presente texto.

Teorema 6

Teorema Fundamental del Cálculo

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Lineamientos a seguir para calcular una integral definida usando el teorema fundamental del cálculo

a. Identificar que la función sea continua en el intervalo dado.
b. Determinar la integral indefinida.
c. Restar la imagen del extremo superior (F(b)) de la imagen del extremo inferior (F(a)).
d. Escribir el valor aproximado de la solución.

4.9.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_0^2 (x^2 + 2x)\, dx$

$$\int (x^2 + 2x)\, dx = \int x^2\, dx + 2\int x dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + k$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + k$$

Así, $\int_0^2 (x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2$

$$= \left[\frac{2^3}{3} + 2^2\right] - \left[\frac{0^3}{3} + 0^2\right]$$

$$= \left[\frac{8}{3} + 4\right] - [0]$$

$$= \frac{20}{3}$$

b. $\cdot \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx$

$= \frac{x^{-1}}{-1} + k$

$= -\frac{1}{x} + k$

Así, $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3$

$= \left[-\frac{1}{3}\right] - \left[-\frac{1}{1}\right]$

$= -\frac{1}{3} + 1$

$= \frac{2}{3}$

c. $\cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\, dx$

$\int sec^2 x\ dx = tgx + k$

Así, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\ dx = [tgx]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left[tg(\frac{\pi}{4})\right] - [tg(0)]$

$= 1 - 0$

$= 1$

Para resolver este tipo de integrales, además e tener en cuenta el teorema fundamental del cálculo, también hacemos uso de las técnicas y reglas para determinar una integral indefinida.

Propuestos

1. Evaluar las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^3 (5x^2 - 7x + 4)\,dx$

b) $\int_1^4 \left(\frac{y-4}{\sqrt[3]{y}}\right)\,dy$

c) $\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{1}{x^2}\right)dx$

d) $\int_0^1 (3x - 1)^2\ dx$

e) $\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{dx}$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\,x\ cosx\ dx$

g) $\int_0^2 x\sqrt{4 + x^2}\,\mathrm{dx}$

h) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2-1}}\ dx$

i) $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\ dx$

4.10. La integral definida como área de una región bajo la curva y área entre graficas de funciones

Los teoremas que a continuación se presentarán, corresponden a aplicaciones de la integral definida, como algunas de las múltiples que se presentan en el cálculo integral. En este caso recae las aplicaciones al cálculo de área, bien sea para una región entre la gráfica y el eje de coordenadas, como para una o más regiones entre las gráficas de funciones.

Teorema 7

Área de una Región

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es

Área = $\int_a^b f(x)\,dx$

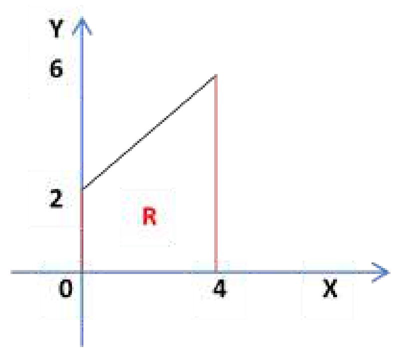
4.10.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función f(x)=x+2, las rectas verticales x=0 , x=4 y el eje de las x.

Antes de calcular el área, mostremos la región (R) dibujando la gráfica de la función.

x	y
0	2
1	3
2	4
3	5
4	6



Luego de haber mostrado la región, calculemos el área usando el Teorema 7:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{Área} = \int_0^4 (x+2)\,dx$$

$$\int (x+2)dx = \int x\,dx + 2\int dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + k$$

$$\text{Así, Área} = \int_0^4 (x+2)\,dx$$

$$= \int_0^4 (x+2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{4^2}{2} + 2(4)\right] - \left[\frac{0^2}{2} + 2(0)\right]$$

$$= 16 \text{ UA (Unidades de área)}$$

2. Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)= 4x - 2x^2$ y el eje de las x.

Antes de graficar la función para presentar la región a la cual calcularemos el área, debemos identificar los extremos determinando los valores de x:

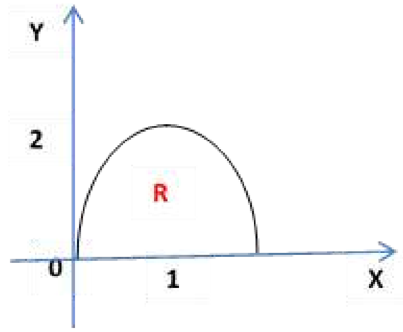
$4x - 2x^2 = 0$

$2x (2 - x) = 0$

$2x = 0$ y $2 - x = 0$

$x = 0$ y $x = 2$

x	y
0	0
1	2
2	0



Luego de haber mostrado la región, calculemos el área usando el Teorema 7:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{Área} = \int_0^2 (4x - 2x^2)dx$$

$$\int (4x - 2x^2)\ dx = 4\int x\,dx - 2\int x^2\ dx$$

$$= 4\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + k$$

$$= 2x^2 - 2\frac{x^3}{3} + k$$

$$\text{Asi, Área} = \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \left[2x^2 - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \left[2(2)^2 - 2\frac{(2)^3}{3}\right] - \left[2(0)^2 - 2\frac{(0)^3}{3}\right]$$

$$= \left[8 - \frac{16}{3}\right] - 0$$

$$= \frac{8}{3}\ \text{UA}$$

Propuestos

1. Determine el área de la región limitada por la gráfica de las funciones dadas, las líneas verticales y el eje de coordenadas x.

a. $f(x)=2x+6$, $x=0$ y $x=2$

b. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $x=0-3$ y $x=3$

c. $f(x)=6+2x-x^3$, $x=2$ y $x=4$

d. $f(x)=x-8$, $x=2$ y $x=4$

e. $f(x)=x^2+3$, $x=0$ y $x=4$

f. $(x)=-x^2+4x-3$, $x=1$ y $x=3$

2. Determine el área de la región acotada por las gráficas de las funciones dadas y el eje de coordenadas x.

c. $f(x)=2x-8x^2$

d. $f(x)=x^2-4$

e. $f(x)=9x^2-3x$

f. $f(x)=9x^2-81x$

g. $f(x)=x^2-4x+4$

Teorema 8

Área de una Región dos Curvas

Si f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $g(x)\leq f(x)$ para todo x $x\in[a,b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es,

Área = $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

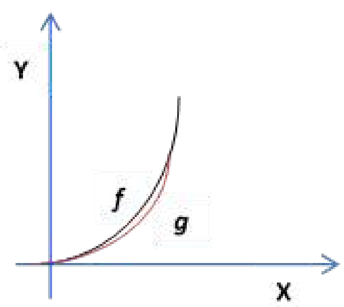
4.10.2 Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Determinar el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x)= x^3$, $x = 0$, $x = 1$

Ya definido los extremos, graficamos las funciones en el mismo eje de coordenadas.

x	y_1	y_2
0	0	0
1/2	1/4	1/8
1	1	1



Luego de haber mostrado la región, calculemos el área usando el Teorema 8:

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

$$\text{Área} = \int_0^1 [x^2 - x^3]\ dx$$

$$\int [x^2 - x^3]\ dx = \int x^2\ dx - \int x^3\ dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + k$$

$$\text{Así, Área} = \int_0^1 [x^2 - x^3]\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] - [0]$$

$$= \frac{1}{12}\ \text{UA}$$

2. Determinar el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = 6 - x$.

Como no están definido los extremos, determinaremos los mismos igualando a las dos ecuaciones. Al obtener dichos valores graficaremos las funciones en el mismo eje de coordenadas.

$y_1 = y_2$

$x^2 = 6 - x$

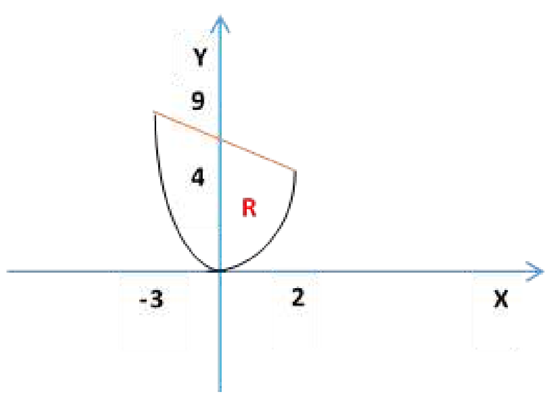
$x^2 + x - 6 = 0$

$(x - 2) (x + 3) = 0$

$(x - 2) = 0$ y $(x + 3) = 0$

$x = 2$ y $x = -3$

x	y_1	y_2
-3	9	9
-2	4	8
-1	1	7
0	0	6
1	1	5
2	4	4



Luego de haber mostrado la región, calculemos el área usando el Teorema 8:

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

$$\text{Área} = \int_{-3}^{2} [(6-x) - x^2]\ dx$$

$$\int [(6-x) - x^2]\ dx = 6\int dx - \int x\ dx - \int x^2\ dx$$

$$= 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + k$$

$$\text{Asi, Área} = \int_{-3}^{2} [(6-x) - x^2]\ dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$

$$= \left[6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right]$$

$$= \left[12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right] - \left[-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right]$$

$$= \left[10 - \frac{8}{3}\right] - \left[-9 - \frac{9}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{22}{3}\right] - \left[-\frac{27}{2}\right]$$

$$= \frac{125}{6}\ \text{UA}.$$

Propuestos

1. Determine el área la región limitada por las gráficas de las funciones dadas:

a. $y = x^2 + 2, \quad y = x + 1, \quad x = 0, \quad x = 2$

b. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5$

c. $y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2$

d. $y = x^2 + 2, \quad y = -x, \quad x = 0, \quad x = 4$

e. $y = x^3, \quad y = -x, \quad x = -1, \quad x = 2$

2. Determine el área de la región limita por las gráficas de las siguientes funciones:

a. . $y = 3 - x^2, \quad y = 2x$

b. . $y = 3x^3 - x^2 - 10x, \quad y = -x^2 + 2x$

c. . $y = 3x^3 - 3x, \quad y = 0$

d. . $y = x^4 - 2x^2, \quad y = 2x^2$

e. . $y = x^4 - 4x^2, \quad y = x^3 - 4x$

4.11. Aplicaciones de la integral definida a problemas relacionados con la economía

En adelante estaremos aplicando la definición de integral definida a situaciones de producción de ciertas mercancías entre otros, con la cual podemos ubicar costos, ingresos de las mismas; así como también, verificar el o los precios que un consumidor puede pagar por cierto producto, o el precio o los precios unitarios de un producto para ser puesto a la venta.

4.11.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. El gerente de una empresa manufacturera estima que la compra de una pieza determinada de un equipo resultará en un ahorro en los costos de operaciones para la compañía. La tasa de ahorro en el costo de operación es f(x) dólares al año cuando el equipo ha estado en uso durante x años y,

$$f(x) = 3000x + 2000 \qquad 0 \leq x \leq 10$$

a. ¿Cuál será el ahorro en los costos de operación en los primeros cinco años?
b. Si el precio de compra es de \$35000, ¿Cuántos años de uso se requieren para que el equipo se pague por sí solo?

a. Para calcular el ahorro en los costos los primeros 5 años, haremos uso de la definición $\int^{b} f(x)dx$, quedando establecida la integral $\int_0^5 [3000x + 2000]dx$, apliquemos el teorema fundamental del cálculo.

$$\int [3000x + 2000]\, dx = 3000 \int x\, dx + 2000 \int dx$$

$$= 3000\frac{x^2}{2} + 2000x + k$$

Así, $\int_0^5 [3000x + 2000]dx = \left[3000\frac{x^2}{2} + 2000x\right]_0^5$

$$= \left[3000\frac{5^2}{2} + 2000(5)\right] - \left[3000\frac{0^2}{2} + 2000(0)\right]$$

$$= \left[\frac{75000}{2} - 10000\right] - [0]$$

$$= \left[\frac{55000}{2}\right]$$

$$= 27500$$

es el ahorro logrado en costos de operaciones en los primeros 5 años

b. Teniendo en cuenta que \$35000, es el número de años de uso que se requieren para que el equipo se pague por si solo es n

Al usar $\int_a^b f(x)dx$ entonces $\int_0^n f(x)dx = 35000$,

Por tanto, $\int_0^n [3000x + 2000]dx = 35000$ de la integral anterior,

$$\left[3000\frac{x^2}{2} + 2000x\right]_0^n = 35000$$

$$\left[3000\frac{n^2}{2}+2000(n)\right]-\left[3000\frac{0^2}{2}+2000(0)\right]=35000$$

$$\left[3000\frac{n^2}{2}+2000(n)\right]=35000$$

(Dividimos toda la expresión entre 1000 para simplificar y determinar los valores de n, resultando):

$\frac{3}{2}n^2+2n-35=0$ (usando la ecuación de segundo grado)

$n=8,9 \qquad ; \qquad n=-10,3$

Esto quiere decir, que se necesitan 9 años de uso para que el equipo se pague por sí solo.

1. La utilización de una cierta pieza de maquinaria produce ingresos a razón de R(x) dólares por mes, si ha transcurrido x meses desde su compra y R(x) = 1600 - 2x^2. Si el costo de operación y mantenimiento del equipo es C(x) dólares por mes, donde C(x) = 200 + x^2. Calcular la utilidad total obtenida de las operaciones del equipo por 20 meses.

En este tipo de problemas para calcular la utilidad total, haremos uso del teorema 8 aplicado en el cálculo de área entre dos regiones. Sólo omitiremos la palabra área.

$\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$ por tanto:

$$\int_0^{20}\left[R(x)-C(x)\right]dx=\int_0^{20}\left[\left(1600-2x^2\right)-(150+x^2\right]dx$$

$$\int\left[1450-3x^2\right]dx=1450\int dx-3\int x^2\,dx$$

$$=1450x-3\frac{x^3}{3}+k$$

$=1450x - x^3 + k$

Así $\int_0^{20} \left[\left(1600 - 2x^2\right) - (150 + x^2 \right] dx = \left[1450x - x^3\right]_0^{20}$

$= \left[1450(20) - (20)^3\right] - \left[1450(0) - (0)^3\right]$

$= [29000 - 8000] - [0]$

$= 21000$

Esto quiere decir, que la utilidad total es $21000.

La siguientes dos definiciones hacen referencia a los Superávit tanto de consumidores como de productores, las cuales también usan como base la definición de integral definida en la solución de problemas.

Superávit de Consumidores

Supóngase que la ecuación de demanda p = f(x)o bien x = g(p), de una cierta mercancía está dada cuando p dólares es el precio unitario cuando se demandan x unidades. Sea p¯dólares el precio del mercado y x¯el número de unidades en la demanda correspondiente del mercado. Por tanto el superávit de consumidores está dado por el área de la región ubicada bajo la curva de demanda y encima de la recta $p=p_0$. De allí, que SC es el superávit de consumidores,

$$SC = \int_0^{x_0} \left[f(x) - p_0 \right] dx = \int_0^{x_0} f(x)\, dx - p_0 x_0$$

Superávit de Productores

Supóngase que se da la ecuación de la oferta, p = h (x)o bien x = λ(p), de una cierta mercancía donde p dólares es el precio unitario cuando se ofrecen x unidades. Sea p¯dólares el precio del mercado y x¯el número de unidades ofrecidas a ese precio. Entonces, el excedente de productores. está dado por el área de la región ubicada por encima de la curva de oferta y por debajo de la recta

$p=p_0$. De aquí, que PS sea la cantidad en dólares del excedente de productores.

$$SP=\int_0^{x_0}\left[p_0-g(x)\right]dx=p_0x_0-\int_0^{x_0}g(x)\,dx$$

3. Las funciones de la oferta y la demanda de cierto producto están dadas por

S: $p = g(x) = 52 + 2x$

D $p = f(x) = 100 - x^2$

Determine el superávit del consumidor y del productor, suponiendo que se ha establecido el equilibrio de mercado.

El punto de equilibrio (x_0 , p_0) se obtiene resolviendo las ecuaciones de oferta y demanda simultáneamente para x y p. Igualando las dos expresiones:

$52 + 2x = 100 - x^2$

$x^2 + 2x + 52 - 100 = 0$

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x - 6)(x + 8) = 0$

$x = 6$; $x = -8$

Tomando el valor positivo, lo sustituimos en la expresión más simple: p=-g(x)=52+2(6)

Por tanto p=64 y el punto de equilibrio (x_0, p_0) es (6,64).

$$SC = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]\, dx$$

$$SC = \int_0^{6} [(100 - x^2) - 64]\, dx$$

$\int [36 - x^2]\ dx = 36 \int dx - \int x^2\, dx$

$= 36x - \frac{x^3}{3} + k$

Asi, $SC = \int_0^6 [(100 - x^2) - 64]\, dx = \left[36x - \frac{x^3}{3}\right]_0^6$

$= \left[36(6) - \frac{(6)^3}{3}\right] - \left[36(0) - \frac{(0)^3}{3}\right]$

=[216-72]-[0]

= 144 (superávit del consumidor)

$$SP = \int_0^{x_0} [p_0 - g(x)]\, dx$$

$$SP = \int_0^{6} [64 - (52 + 2x)]\, dx$$

$\int [12 - 2x]\ dx = 12 \int dx - 2 \int x\, dx$

$= 12x - 2\frac{x^2}{2} + k$

Asi, $SP = \int_0^6 [64 - (52 + 2x)]\, dx = [12x - x^2]_0^6$

$= [12(6) - (6)^2] - [12(0) - (0)^2]$

= [72-36]-[0]

= 36 (superávit de productores)

Propuestos

1. El gerente de una empresa manufacturerera estima que la compra de una pieza determinada de un equipo resultará en un ahorro en los costos de operaciones para la compañía. La tasa de ahorro en el costo de operación es f(x) dólares al año cuando el equipo ha estado en uso durante x años y,

$$f(x) = 4000x + 2000 \qquad 0 \leq x \leq 10$$

a. ¿Cuál será el ahorro en los costos de operación en los primeros seis años?
b. Si el precio de compra es de $45000, ¿Cuántos años de uso se requieren para que el equipo se pague por sí solo?

2. Las tasas de ingreso y costo de cierta actividad minera están dadas por $R'(t) = 10 - 2t^{\frac{1}{2}}$ y $C'(t) = 2 + 3t^{\frac{1}{2}}$

respectivamente, en donde el tiempo t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. Determine por cuanto tiempo deberá continuarse la operación con el objeto de obtenr una utilidad máxima. ¿Cuál es el monto de la utiliad máxima, suponiendo que los costos fijos de operación inicial son de $ 3500000.

3. Las funciones de la oferta y la demanda de cierto producto están dadas por

S: $p = g(x) = 4 + x$
D: $p = f(x) = 16 - 2x$

Determine el superávit del consumidor y del productor, suponiendo que se ha establecido el equilibrio de mercado.

4. Las funciones de la oferta y la demanda de cierto producto están dadas por

S: $p = g(x) = 200 + x^2$
D: $p = f(x) = 1200 - 1{,}5x^2$

Determine el superávit del consumidor y del productor, suponiendo que se ha establecido el equilibrio de mercado.

CAPÍTULO V

ECUACIONES DIFERENCIALES

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales
www.mawil.us

5.1 Introducción a las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales forman parte de la extensa gama de las formulaciones matemáticas de problemas que dan como resultado una ecuación en que intervienen la derivada de una función desconocida. Por tanto antes de disponer la definición de ecuación diferencial, es necesario conocer el significado de diferencial, ya que la misma es usada a lo largo de la aplicación de dicha ecuación.

Diferencial

Sea f una función de R en R, es decir y = f(x), y h una variable que puede tomar un valor cualquiera de R, se define la diferencial de y como: dy=f'(x).h donde dy es una función de x y h, es decir dy=F(x,h)

5.1.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Determinar la diferencial de: y=x2+3x-2

Solución:
dy = f'(x). h
dy = (x2 + 3x - 2). h
dy =(2x + 3). h

Supogamos que en este caso: x=1 y h=0.03, se tiene que:

dy = (2.1 + 3).0.03
dy = 5.03

Propuestos

1. Determinar dy en las siguientes funciones:

a. y = (5 - x) 3
b. y = e4 x 2
c. y = Ln (tgx)
d. y = (x3 + 2x + 1) / (x2 + 3)
e. y = cos2 (2x) + sen(3x)

5.2 Ecuación Diferencial

Es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.

Sea y=f(h) una función diferenciable de la variable independiente h y denotemos con y',y'',…,y(n) las derivadas de y con respecto a h hasta de orden n. Entonces una ecuación diferencial de orden n para la función y es una ecuación que relaciona las variables h,y,y',…,y(n). El orden n corresponde a la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación diferencial.

1. $\frac{dx}{dh} - 2x - 2h = 0$, esta ecuación diferencial comprende tanto la función desconocida $x(h)$ y su primera derivada. (ecuación diferencial de primer orden)
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dx}{dy} + 7y = 0$, esta ecuación comprende la función desconocida "y" y la variable independiente "x", junto con las dos primeras derivadas y' y y'' de y. (ecuación diferencial de segundo orden).

Fines del Estudio de las Ecuaciones Diferenciales

1. Identificar la ecuación diferencial que describe una situación física específica.

2. Determinar la solución apropiada para esa ecuación.

Para resolver una ecuación en Álgebra se requiere determinar un número o los números desconocidos (incógnitas) que satisfacen a una ecuación como: $2x^2+3x-8=0$, a diferencia de resolver una ecuación diferencial, se requiere identificar las funciones desconocidas y=y(x) que satisfaga una identidad como y(x)=2xy(x) esto es, la ecuación diferencial: dy/dx=2xy para algún intervalo de números reales. Generalmente, se quiere determinar todas las soluciones de la ecuación diferencial si ello es posible.

5.2.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Si C es una constante y, $y(x) = Ce^{x2}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = C\left(2xe^{x^2}\right)$$

$$= 2x(Ce^{x^2})$$

$$=2xy$$

por tanto $\frac{dy}{dx} = 2xy$ es una solución de la ecuación diferencial.

2. Determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial y''- y = 0.

a) y=senx

Solución: si $y = senx$,

$y' = cosx$

$y'' = -senx$

Tomando la ecuación inicial: $y'' - y = 0$ y sustituyendo, se tiene

$-senx - senx = 0$

Luego

$-2senx \neq 0$

Por lo que se concluye que, $y = senx$ no es una solución.

Propuestos

1. Determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial y''-y=0. Para:

a. $y = 4e^{-x}$
b. $y = Ce^{x}$
c. $y = \cos x$
d. $y = x \ln x$
e. $y = 3\sqrt{x}$

5.3 Ecuaciones Separables

Resultan de reescribir la ecuación, tal que cada variable ocurre sólo en un lado de la ecuación.

Ecuación diferencial inicial	Reescrita con variables separables
$x^2 + 3y\dfrac{dy}{dx} = 0$	$3ydy = x^2dx$
$(senx)y' = cosx$	$dy = cotgxdx$
$\dfrac{xy'}{(e^y+1)} = 2$	$\dfrac{1}{(e^y+1)dy} = \dfrac{2}{xdx}$

La ecuación diferencial de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = M(x,y)$ se llama Separable si se ha probado que $M(x,y)$ puede escribirse como producto de una función de x y una función de y; $\dfrac{dy}{dx} = g(x)\Omega(y) = \dfrac{g(x)}{f(y)}$, en donde $\Omega(y) = \dfrac{1}{f(y)}$. En este caso las variables pueden ser separadas (aisladas en miembros opuestos de una ecuación) escribiendo de modo informal la ecuación diferencial f(y) dy = g(x) x que se entiende que es la notación compacta de la ecuación diferencial $f(y)\dfrac{dy}{dx}$ =g(x).

Para resolver este tipo especial de ecuaciones diferenciales, simplemente se integra ambos miembros de la expresión con respecto a x:

$\int f[y(x)] \frac{dy}{dx} dx = \int g(x)\, dx + C$ ó

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx + C$$

En este caso lo único que se requiere es que las antiderivadas (integrales indefinidas) puedan calcularse.

5.3.1 Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Resolver la ecuación diferencial $y' = \frac{2x}{y}$

i. Escribir la ecuación inical: $y' = \frac{2x}{y}$

ii. Multiplicar ambos miembros por y (simplificar si se da el caso):

$y.y' = \frac{2x}{y}.y$ así $y.y' = 2x$

iii. Integrar con respecto a x: $\int y.y'dx = \int 2xdx$

iv. Como $dy = y'dx$ (por la definición de diferencial) entonces:

$\int ydy = \int 2xdx$

v. Aplicar regla de potencias $\frac{1}{2}.y^2 = 2\frac{x^2}{2} + C$

vi. Desarrollar y simplificar $\frac{1}{2}.y^2 = x^2 + C$

$y^2 = 2x^2 + C$

$y^2 - 2x^2 = C$ (Solución dada)

Propuestos

1. Determinar la solución general de:

a. $\cdot \frac{dy}{dx} = -6xdx$

b. $\cdot \left(\left(x^2+4\right)\right)\frac{dy}{dx}$

c. $\cdot x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^2\right)}{\left(3y^2+1\right)}$

d. $\cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} + t^2$

e. $\cdot \frac{dy}{dx} = xe^x$

f. $\cdot \frac{dy}{dt} - \sqrt{t} = 0$

5.4 Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, donde P y Q son funciones continuas de x. Esta ecuación lineal de primer orden se dice que es de la forma normal.

Solución de una Ecuación Diferencial de Primer Orden

Para resolver una ecuación diferencial lineal, hay que escribirla en forma normal para identificar las funciones P(x) y Q(x). Después integrar P(x) y formar la expresión $U(x) = e^{\int P(x)dx}$ el cual se denomina factor integrante. La solución general de la ecuación es $y = \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)dx$.

5.4.1 Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

Determinar la solución de: xy’- 2y = x^2
Solución:

i. Escribir la formula normal de la ecuación (si se da el caso)

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

$$y' - \frac{2}{x}y = x$$

ii. Reconocer P(x) y Q(x), así, P(x)= -2 / x, pués se simplifica el x que acompaña a y’ en la ecuación dada:

$$xy' - 2y = x^2$$

$$\frac{1}{x}xy' - 2y\frac{1}{x} = x^2\frac{1}{x}$$

Así, $y' - \frac{2}{x}y = x$

Aplicando integración se tiene que,

$$\int P(x)dx = \int \frac{2}{x}dx$$

$$= -2\ln x$$
$$= -ln^2 x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln x}$$

$$= \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$= \frac{1}{x^2} \quad \text{(Factor integrante)}$$

iii. Se multiplica cada miembro de la forma normal por $\frac{1}{x^2}$, y así se llega a:

$$\frac{y'}{x^2} - 2\frac{y}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{y}{x^2} = \ln x + C$$

$y = x^2(\ln x + C)$ (Solución general)

2. Determinar la solución general de: $y'+y=e^x$

Para esta ecuación, P(x)=1 y Q(x)= e^x. Así el factor integrante es:

$$u(x) = e^{\int P(x)dx}$$
$$= e^{\int dx}$$
$$= e^x$$

Esto implica que la solución general es:

y=1/u(x) ∫ Q(x) u(x)dx

$$y = \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)dx$$

$$\frac{1}{e^x} = \int e^x(e^x)dx$$

$$= e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}e^x + Ce^x$$ (Solución general)

Propuestos

1. Determinar la solución de: $x^2 y' - 2y = x^3$
2. Determinar la solución general de: $y' + 3y = e^x$
3. Determinar la solución general de: $y' = xe^x$
4. Determinar la solución general de: $2y' + \ln x = 2$
5. Determinar la solución general de: $y' - 3x = 1$

5.5 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Algunas ecuaciones diferenciales que no son separables en x y y se pueden separar por un cambio de variable en x y y. El caso de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x,y)$ es homogénea de grado n sí: $f(hx, hy) = h^n f(x,y)$, donde n es un número real.

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación de la forma:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

5.5.1 Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

Verificar Funciones Homogéneas

a) $f(x,y) = x^2y - 4x^3 + 3xy^2$ es una función homogénea de grado 3 dado que:	$f(hx,hy) = (hx)^2(hy) - 4(hx)^3 + 3(hx)(hy)^2$ $= h^3x^2y - 4h^3x^3 + 3h^3xy^2$ $=h^3(x^2y - 4x^3 + 3xy^2)$ $= h^3f(x,y)$
b) $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}} + ysen(\frac{y}{x})$ es una función homogénea de grado 1 dado que:	$f(hx,hy) = hxe^{\frac{hx}{hy}} = hysen\left(\frac{hy}{hx}\right)$ $= h\left(xe^{\frac{hx}{hy}} + ysen\left(\frac{hy}{hx}\right)\right)$ $= hf(x,y)$
c) $f(x,y) = x + y^2$ no es un función homogénea dado que:	$f(hx,hy) = hx + (hy)^2$ $= hx + h^2y^2$ $= h(x + hy^2)$ Luego: $h(x + hy^2) \neq h^n(x + hy^2)$
d) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ es una función homogénea de grado 0 dado que:	$f(hx,hy) = \frac{hx}{hy} = h^0\left(\frac{x}{y}\right)$

Propuestos

1. En las siguientes expresiones verificar si la función es homogénea y, si lo es, determinar el grado, puede usar una tabla como la anterior.

a. $\cdot f(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^3$

b. $. f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$

c. $. f(x, y) = 2\ln xy$

d. $. f(x, y) = xe^{y^2}$

e. $. f(x, y) = 3\ln xy$

f. $. f(x, y) = 2\ln \dfrac{x}{y}$

CAPÍTULO VI

ALGEBRA MATRICIAL

MAWIL
Publicaciones Impresas
y Digitales
www.mawil.us

6.1 Matriz

El término Matriz debe su introducción en el año 1850 al matemático ingles J.J. Sylvester aunque también se dice que su desarrollo teórico se debe a W.R. Hamilton y A. Cayley quienes presentan la notación matricial como una forma abreviada de un sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas. Del extenso campo de las matrices, en este capítulo vamos a disponer la definición de matriz y algunas de las operaciones básicas realizadas con las mismas.

Definición

Una matriz A es un arreglo o imposición rectangular de números, si el arreglo tiene “m” renglones (horizontales) y “n” columnas (verticales) entonces se llama matriz mxn (se lee matriz m por n).

El tamaño de una matriz se define como mxn (llamada también dimensión).

A la matriz se le conoce como un arreglo bidimensional de mn números organizados en m filas y n columnas.

Las matrices se denotan con letras mayúsculas, y los elementos o componentes con letras minúsculas afectadas por dos subíndices.

Notación

$$\mathbf{A}= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m=**filas**
n=**columnas**

6.2 Tipos de Matriz

Matriz Cuadrada: es una matriz mxn con m = n.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Cero: es una matriz mxn con todas sus componentes iguales a cero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices Iguales: dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si: 1) tienen el mismo tamaño y 2) sus componentes correspondientes son iguales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Rectangular: es un arreglo de números distribuidos en filas y columnas, encerrados entre paréntesis, corchetes o barras dobles.

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal: Una matriz cuadrada A se llama matriz diagonal si todas sus componentes distintas de cero están en las diagonales.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Una matriz diagonal puede tener uno o más ceros en su diagonal.

Matriz Triangular Superior: Una matriz cuadrada se llama triangular superior si todas sus componentes que se encuentran debajo de los elementos de la diagonal son cero.

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior: Se dice que una matriz cuadrada es triangular inferior si todas las componentes que se encuentren arriba de la diagonal son cero.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3 Operaciones con matrices

Suma de matrices

Sean A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) dos matrices mxn, la suma A + B de dos matrices es la matriz mxn.

$$A+B = \left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right) = \left(a_{ij}+b_{ij}\right) =$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{ij}+b_{ij} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{2j}\,b_{2j} & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & a_{mj}\,b_{mj} & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta suma es aplicable para la suma de dos matrices A y B solamente si dichas matrices son del mismo tamaño.

Teorema 1

Sea A, B, C. matrices mxn. Sea 0 la matriz cero de mxn. Entonces:

a. A + 0 = A (identidada aditiva)
b. A + B = B + A (conmutativa de la adición)
c. A + (B + C) = (A + B) + C (asociatividad de la adición)
d. A + A = 2^a

Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea A = (a_{ij}) una matriz mxn y “c” cualquier número real. Entonces: c.A es la matriz mxn dada por:

$$c.A = c.\left(a_{ij}\right) = c.\,a_{ij} =$$

$$c.A = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{21} & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{2n} \\ ca_{m1} & ca_{m2} & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

El producto c.A se obtiene multiplicando cada una de las componentes de A por el escalar c.

Teorema 2

Sean A y B matrices mxn y 0 la matriz cero mxn. Sean c y d escalares arbitrarios y 0 y 1 los escalares identidad de la suma y multiplicación, respectivamente. Entonces:

1. c.(A+B)=c.A+c.B
2. (c+d).A=c.A+d.A
3. (c.d).A=c.(d.A)
4. 1-A=A
5. 0.A=0 mxn, donde 0 cero es el número real nulo.

Diferencia de matrices

Sen A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) dos matrices cuadradas mxn.
La diferencia A - B = A + (-1).B = (a_{ij}) -(b_{ij}) = (a_{ij}) + (-1) =

$$A\text{-}B=\begin{bmatrix} a_{11}+(-1)b_{11} & a_{12}+(-1)b_{12} & a_{ij}+(-1)b_{ij} & a_{1n}+(-1)b_{1n} \\ a_{21}+(-1)b_{21} & a_{22}+(-1)b_{22} & a_{2j}+(-1)b_{2j} & a_{2n}+(-1)b_{2n} \\ a_{m1}+(-1)b_{m1} & a_{m2}+(-1)b_{m2} & a_{mj}+(-1)b_{mj} & a_{mn}+(-1)b_{mn} \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

Sean A una matriz mxn y B una matriz de rxn. El producto A.B es la matriz mxn cuya componente ij-èsima es el producto del renglón i-èsimo de A y la columna j-èsima de B.

$$A.B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{11}b_{12} & a_{21}b_{11}+a_{21}b_{12} \\ a_{12}b_{21}+a_{12}b_{22} & a_{22}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Para que el producto A.B de dos matrices esté definido, sus tamaños deben ser compatibles, es decir, que el nùmero de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B.

La dimensión mxn de A.B es el número de renglones de A por el número de columnas de B.

Teorema 5

Sean las matrices: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ y entonces:

a. $A.B \neq B.A$ (no conmutativa)

b. $(A.B).C = A.(B.C)$ (si asociativa)

6.3.1. Ejerccios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 11 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & \frac{3}{2} \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Determine la suma: a) A+B, b) C+D.

Solución a) $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 11 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+15 & 5+5 & 3+1 \\ 3+4 & 4+8 & 2+2 \\ 7+11 & 5+5 & 1+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 10 & 4 \\ 7 & 12 & 4 \\ 18 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } C+D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & \frac{3}{2} \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{2}{3} & 4+2 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2} \\ 3+1 & \frac{1}{3}+\frac{3}{2} & 1+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & 6 & \frac{4}{2} \\ 4 & \frac{11}{6} & 5 \end{bmatrix}$$

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 12 & 7 \\ 3 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 & 7 \\ 10 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

y los escalares: $\alpha = 2$, $\beta = -3$ y $\theta = -4$, desarrollar las operaciones siguientes: a) $a.A$ b) $\beta.D$ c) $\theta.B$ d) $\alpha B + \beta.C$ e) $\theta.A + \beta.D$

Solución: a) $2.A = 2\begin{bmatrix} -2 & 12 & 7 \\ 3 & 8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 24 & 14 \\ 6 & 16 & -8 \end{bmatrix}$

Solución: e) 2.B + (-3).C =

$$= 2.\begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} + (-3).\begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 & 7 \\ 10 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -14 & -10 & 2 \\ 10 & 0 & -8 & 6 \\ 4 & 2 & 12 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -27 & 0 & 9 & 21 \\ -30 & -18 & 6 & -9 \\ -12 & -3 & -15 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -21 & -14 & -1 & 23 \\ -20 & -18 & -2 & -3 \\ -8 & -1 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Importante: A su juicio para la solución, quedan las operaciones b), c) y e).

3. Sean las matrices:

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Determinar: a) A-B b) B-A

Solución: a) $A\text{-}B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4-(-1) & -2-9 & 5-6 \\ 7-8 & 0-2 & 3-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -11 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: b) $B\text{-}A = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1-4 & 9-(-2) & 6-5 \\ 8-7 & 2-0 & 0-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 11 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Sean las matrices:

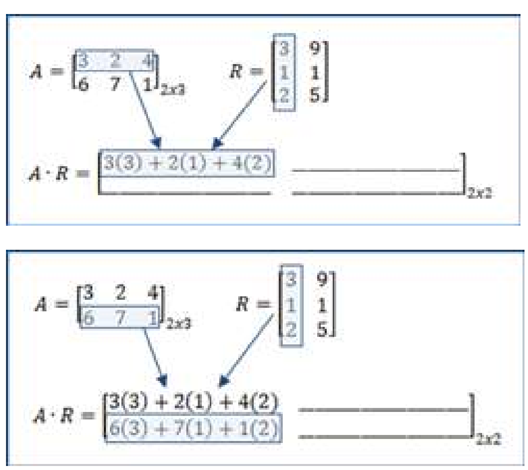
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

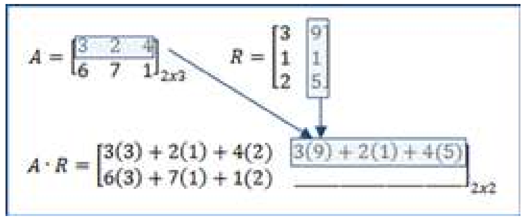
$$R = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para la solución, obsérvese los pasos aplicados en la siguiente ilustración dadas dos matrices A y R:

1. Comprobar que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda, para así determinar que el producto existe, así .
2. Multiplicar los elementos de la fila de la primera matriz por los de la columna de la segunda como se observa:





3. Construir la matriz resultante con las filas y columnas, según el orden identificado. En este caso A.R resultará:

$$A.R = \begin{bmatrix} 19 & 49 \\ 27 & 66 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Propuestos

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{4} & 1 & 7 \\ -4 & 4 & \frac{3}{2} & 8 \\ 1 & \frac{1}{5} & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 & 8 \\ -3 & 1 & 6 & 7 \\ 9 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ Determinar la suma: a) A+B y b) 7B+5ª

2. Sean las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & -9 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 2 & 2 \\ 4 & 1 & \frac{2}{5} \\ -3 & \frac{3}{2} & 7 \end{bmatrix}$$ Determinar: a) 3(C-D) , b) (-2).D-C

3. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & 4 \\ 5 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Calcular: A.B}$$

4. Sean las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 7 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{Calcular C.D}$$

5. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Calcular: a) A.B y b) B.A}$$

6. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Calcular: (A.B).C}$$

7. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 8 & -2 & 9 \\ 6 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{Calcular: } 2(A).B$$

6.4 Aplicación de matrices

Los arreglos rectangulares de números reales, en este caso lo vamos a hacer corresponder con datos expresados en algunos problemas del tipo sociales, económicos o contables, los cuales se encerraran en paréntesis rectangulares, y se utilizaran como datos en la solución de los mismos. Quiere decir que estaremos usando representaciones matriciales, estudiemos los siguientes casos:

6.4.1 Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

a) Una tienda por departamentos cuenta con dos distribuidores. Para el mes de junio las ventas de cámaras fotográficas, iPhone y celulares en las dos tiendas estuvieron representados en el siguiente arreglo:

	Cámaras	iPhone	Celulares
Distribuidor 1	25	40	18
Distribuidor 2	12	30	22

La gerencia establece que la venta debe aumentar en un 60% en el siguiente mes, en base a los datos anteriores, represente las ventas proyectadas para julio.

Para la solución, cada elemento presentado, lo representaremos a través de una matriz, la cual será multiplicada por 1,6 como el valor que representa las ventas proyectadas. Así,

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 40 & 18 \\ 12 & 30 & 22 \end{bmatrix} \text{ y } \alpha = 1{,}6$$

$$\text{Por tanto: } \alpha.A = 1{,}6.\begin{bmatrix} 25 & 40 & 18 \\ 12 & 30 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 64 & 29 \\ 19 & 48 & 35 \end{bmatrix}$$

Para la tienda por departamento del caso anterior, la siguiente matriz indica la existencia de cada producto en los almacenes, al inicio del mes de junio,

$$B = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 40 \\ 31 & 25 & 32 \end{bmatrix}$$

Durante el mes de junio la tienda por departamento hizo entrega a cada distribuidor un número de productos dispuestos en C,

$$C = \begin{bmatrix} 15 & 26 & 11 \\ 10 & 36 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine la matriz que representa el número de los tres artículos en existencia al final del mes de junio.

Para la solución, debemos tener en cuenta que en el almacén hubo el siguiente movimiento: los productos en existencia al final de junio = Productos al inicio de junio – Ventas. Así,

D = B + C – A

$$D = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 40 \\ 31 & 25 & 32 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 26 & 11 \\ 10 & 36 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 40 & 18 \\ 12 & 30 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 33 \\ 29 & 31 & 10 \end{bmatrix}$$

Propuestos

1. Un contratista calcula que los costos en $ para adquirir y transportar unidades determinadas de hormigón, madera y aluminio desde tres diferentes localidades están dados por los siguientes arreglos,

	Hormigón	Madera	Aluminio	
Localidad 1	35	20	25	Costos de Material
	10	6	8	Costo de Transporte

	Hormigón	Madera	Aluminio	
Localidad 2	36	24	22	Costos de Material
	8	9	8	Costo de Transporte

	Hormigón	Madera	Aluminio	
Localidad 3	15	30	26	Costos de Material
	11	9	7	Costo de Transporte

Escribir la matriz que representa los costos totales de material de transporte por unidades de cada insumo, desde cada una de las tres localidades.

2. Una empresa produce tres tamaños de contenedores de agua en dos calidades diferentes. La producción en miles de su planta A esta dada por el siguiente arreglo:

	Tamaño 1	Tamaño 2	Tamaño 3
Calidad 1	36	27	30
Calidad 2	25	17	19

La producción en miles en su planta B está dada por:

	Tamaño 1	Tamaño 2	Tamaño 3
Calidad 1	40	32	34
Calidad 2	25	37	30

a. Escriba una matriz que represente la producción total de envases en ambas plantas.
b. El dueño de la empresa pretende abrir una tercera planta, lacual tendría una vez y media la capacidad de la planta en A. Escriba la matriz que representa la producción en la nueva planta.
c. ¿Cuál sería la producción total de las tres plantas.

6.5. Operaciones elementales Gauss – Jordan

Para determinar matrices e inversas, es de gran utilidad el método de Gauss Jordan usualmente utilizado en la solución de un sistema de ecuaciones. Dicho método consiste en seguir los pasos dispuestos a continuación:

1. Ir a la primera columna no cero de izquierda a derecha.
2. Si la primera fila tiene un cero en esta columna, intercambiarlo con otra que no lo tenga.
3. Luego, obtener ceros debajo de este elemento delantero, sumando múltiplos adecuados del renglón superior a los renglones debajo de él.
4. Cubrir el renglón superior y repetir el proceso anterior con la matriz restante. Repetir con el resto de los renglones (en este punto la matriz se encuentra en forma escalonada).
5. Comenzando con el último renglón no cero, avanzar hacia arriba: para cada renglón obtener 1 delantero e introducir ceros arriba de éste sumando múltiplos correspondientes a los renglones correspondientes.

6.5.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Usar el Método Gauss Jordan para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x-3y+4z&=13\\ x+y+2z&=4\\ 3x+5y-z&=-4 \end{aligned}$$

Para la solución, a este sistema de ecuaciones lineales, lo vamos a disponer en una matriz denominada aumentada, ya que las constantes de los lados derechos de las ecuaciones se dispondrán luego de una línea vertical que permite identificar los coeficientes de las variables de la izquierda, con los valores constantes de la derecha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Intercambiamos el renglón R1 con el renglón R2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Restamos el renglón R2 del R1 multiplicado por2.

$$(2 \quad -3 \quad 4 \quad 13) - 2(1 \quad 1 \quad 2 \quad 4) = (2 \quad -3 \quad 4 \quad 13) - (2 \quad 2 \quad 4 \quad 8) =$$

$$(0 \quad -5 \quad 0 \quad 5)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Restamos el renglón R3 del R1 multiplicado por 3.

$$(3 \quad 5 \quad -1 \quad -4) - 3(1 \quad 1 \quad 2 \quad 4) = (3 \quad 5 \quad -1 \quad -4) - (3 \quad 3 \quad 6 \quad 12) =$$

$$(0 \quad 2 \quad -7 \quad -16)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \end{array}\right)$$

Para obtener 1 de -5 en el segundo renglón, multiplicamos R2 por $-\frac{1}{5}$.

$$-\frac{1}{5}(0 \quad -5 \quad 0 \quad 5) = \left(0\left(-\frac{1}{5}\right) \quad -5\left(-\frac{1}{5}\right) \quad 0\left(-\frac{1}{5}\right) \quad 5\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = (0 \quad 1 \quad 0 \quad -1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \end{array}\right)$$

Para obtener 0 de 2 en el tercer renglón, multiplicamos R2 por -2 y el resultado lo restamos con R3.

$$-2(0 \quad 1 \quad 0 \quad -1)\text{-}(0 \quad 2 \quad -7 \quad -16) =$$

$$(0 \quad -2 \quad 0 \quad 2)\text{-}(0 \quad 2 \quad -7 \quad -16) = (0 \quad 0 \quad -7 \quad -14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 | & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

Para obtener 1 de -7 en el renglón R3, multiplicamos R3 por $-\frac{1}{7}$.

$$-\frac{1}{7}(0 \quad 0 \quad -7 \quad -14) = \left(0\left(-\frac{1}{7}\right) \quad 0\left(-\frac{1}{7}\right) \quad -7\left(-\frac{1}{7}\right) -14\left(-\frac{1}{7}\right)\right) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0| & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De la primera fila hagamos 0 al 1del segundo término del renglón R1. Restando R1 a R2

$$(1 \quad 1 \quad 2 \quad 4)-(0 \quad 1 \quad 0 \quad -1) = (1 \quad 0 \quad 2 \quad 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0| & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así mismo de la primera fila hagamos 0 al 2 del tercer término del renglón R1, restando R1 al producto 2 por R3.

$$(1 \quad 0 \quad 2 \quad 5)-2(0 \quad 0 \quad 1 \quad 2) = (1 \quad 0 \quad 2 \quad 5)-(0 \quad 0 \quad 2 \quad 4) =$$

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0| & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, esta última matriz representa la solución al sistema de ecuaciones presentado.

$x+0y+0z=1$ por tanto $x=1$

$0x+y+0z=-1$ por tanto $y=-1$

$0x+0y+z=2$ por tanto $z=2$

Este método también lo aplicamos a problemas como el descrito a continuación:

2. Dos productos A y B compiten. Las demandas xA y xB de estos productos están relacionado a sus precios PA y P B por las ecuaciones de demanda,

$$x_A=17-2P_A+\frac{1}{2}P_B \quad \text{y} \quad x_B=20-3P_B+\frac{1}{2}P_A$$

Las ecuacones de la oferta son,

$$P_A=2+x_A+\frac{1}{3}x_B \quad \text{y} \quad P_B=2+\frac{1}{2}x_B+\frac{1}{4}x_A$$

Que dan los precios a los cuales las cantidades x_A y x_B estarán disponibles en el mercado. En el punto de equilibrio del mercado, las cuatro ecuaciones deben satisfacerse (dado que la demanda y la oferta deben ser iguales). Calcule los valores de equilibrio de x_A, x_B, P_A y P_B.

En la solución disponemos las cuatro ecuaciones dadas, para así obtener el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_A \quad &+2P_A-\frac{1}{2}P_B=17\\
x_B &-\frac{1}{2}P_A+3P_B=20\\
x_A+\frac{1}{3}x_B-P_A \quad &=-2\\
+\frac{1}{4}x_A+\frac{1}{2}x_B \quad &-P_B=-2
\end{aligned}$$

De tal sistema, escribimos la siguiente matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 & 17 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 & 20 \\ 1 & 1/3 & -1 & 0 & -2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego para simplificar realizamos las operaciones indicadas y ubicamos la nueva matriz de las formas siguientes.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1/2 & 17 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 & 20 \\ 0 & 1/3 & -3 & ½ & -19 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -7/8 & -\frac{25}{4} \end{array}\right] \quad \text{Resultado de } R_3 - R_1 \text{ y } R_4 - \frac{1}{4}R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1/2 & 17 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{6} & -½ & -\frac{77}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{19}{8} & -\frac{65}{4} \end{array}\right] \quad \text{Resultado de } R_3 - \frac{1}{3}R_2 \text{ y } R_4 - \frac{1}{2}R_2$$

Luego de las correspondientes operaciones con los renglones, obtenemos al final:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Por tanto el equilibrio de mercado es:

$x_A = 4$, $x_B = 6$, $P_A = 8$ y $P_B = 6$

Propuestos

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones dados, si existen sus soluciones:

$$\begin{aligned} x+3x&=1 \\ 2x-x&=9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p+2q&=1 \\ 3q+2p&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ 2x-y+3z&=9 \\ -x+2y+z&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p-q+r&=-1 \\ 3p-2r&=-7 \\ r+4q&=10 \end{aligned}$$

2. Las ecuaciones de oferta y demanda de cierto artículo vienen dadas por y, respectivamente. a) Determine los valore de x y p en el punto de equilibrio del mercado. b) si se impone un impuesto sobre las ventas de un 11% en cada artículo, calcule los nuevos valores de la cantidad x y del precio p, pagado por los consumidores.
3. Una compañía de carga transportó tres tipos de flete de manera aérea. El espacio requerido por cada unidad de los tres tipos d carga eran de 5, 2 y 4 pies cúbicos, respectivamente. Cada unidad de los tres tipos de carga pesó 2, 3 y 1 kilogramo, respectivamente, mientras que los valores unitarios de los tres tipos de carga fueron \$10, \$30 y \$50. Determine el número de unidades de cada tipo de carga transportada si el valor total de la carga fue de \$12,500, ocupó 1050 pies cúbicos de espacio y pesó 530 kilogramos.
4. Una persona invirtió un total de \$30000 en tres inversiones al 6, 8 y 10%. El ingreso anual total fue de \$1624 y el ingreso de inversión del 10% fue dos veces el ingreso de la inversión al 6%. ¿De cuánto fue cada inversión?

6.6. Matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada nxn. Entonces una matriz A-1 se dice que es una inversa de A si satisface la dos ecuaciones matriciales: A.A-1=I y A-1.A=I, siempre que ambas sean del mismo tamaño. Donde I representa la matriz identidad de tamaño nxn.

6.6.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

Determinemos la inversa de la matriz: $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Para determinar la inversa de la matriz presentada, debemos tomar en cuenta el que se cumpla $A.A^{-1}=I$ y $A^{-1}.A=I$, por tanto vamos a disponer el producto de la matriz de la siguiente forma,

$A.A^{-1}=I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ la matriz inversa que pretendemos determinar. En este sentido, realizaremos una multiplicación de matrices para así obtener un sistema de ecuaciones que nos permitirá verificar el valor de cada una de las variables desconocidas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+3z & y+3w \\ 3x+4z & 3y+4w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\begin{matrix} x+3z=1 & \text{y} & y+3w=0 \\ 3x+4z=0 & & 3y+4w=1 \end{matrix}$$

Para resolver estos dos sistemas de ecuaciones arrojados, debemos ordenarlos en matrices aumentadas y transformarlas.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora bien, para cada una efectuaremos operaciones entre renglones; asi,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \; 3R_1\text{-}R_2 \; (3 \;\; 9 \;\; 3)\text{-}(3 \;\; 4 \;\; 0)\text{=}(0 \;\; 5 \;\; 3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \; 1/5.R_2 \; (0 \;\; 1 \;\; 3/5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{array}\right) \; 3R_2\text{-}R_1 \; (0 \;\; 3 \;\; 9/5)\text{-}(1 \;\; 3 \;\; 1)\text{=}(\text{-}1 \;\; 0 \;\; 4/5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{array}\right) \; \text{-}1R_1 (1 \;\; 0 \;\; \text{-}4/5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{array}\right) \; \text{luego, } x=-\frac{4}{5} \, y \;\; z=\frac{3}{5}$$

Seguidamente operamos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \; 3R_1\text{-}R_2 \; (3 \;\; 9 \;\; 0)\text{-}(3 \;\; 4 \;\; 1)\text{=}(0 \;\; 5 \;\; \text{-}1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right) \; 1/5R_2 \; (0 \;\; 1 \;\; \text{-}1/5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right) \; 3R_2\text{-}R_1 \; (0 \;\; 3 \;\; \text{-}3/5)\text{-}(1 \;\; 3 \;\; 0)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right) \; \text{-}1R_1 \; (1 \;\; 0 \;\; 3/5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right) \; \text{luego, } y=\frac{3}{5} \; y \;\; w=-\frac{1}{5}$$

De esta forma nuestra matriz inversa,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Propuestos

1. Si existe, determine A-1 para las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.7. Determinante de una matriz

Otra forma de tratar a una matriz cuadrada, es asociándole un número real denominado determinante; el cual, va a presentar cada matriz encerrada entre barras. En este espacio definiremos a un determinante de orden dos, en adelante los interesados pueden investigar sobre las determinantes de orden superior y las correspondientes propiedades.

Un determinante Δ de orden dos viene definido por la expresión:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Resultado de la operación: donde los símbolos (+) (-) estarán asociados con el producto.

$$\begin{array}{ccc} & (+) & (-) \\ \Delta = & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 \end{array}$$

Por otro lado se puede indicar que los determinantes representan una importante aplicación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, en las cuales el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

En este sentido, vamos a considerar a la Regla de Cramer para dar solución a un sistema de ecuaciones con tres incógnitas.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas (x, y y z)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3 \end{aligned}$$

Y sea,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

El determinante de los coeficientes y sean Δ_1, Δ_2 **y** Δ_3 obtenidos reemplazando la primera, segunda y tercera columna de Δ, respectivamente, por los términos constantes.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad y \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

Entonces si $\Delta \neq \mathbf{0}$, el sistema dado tiene la solución única dada por

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad y \quad x = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Si $\Delta = \mathbf{0}$ y $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \mathbf{0}$, entonces el sistema tiene un número ifinito de soluciones. Si $\Delta = \mathbf{0}$ y $\Delta_1 \neq \mathbf{0}$ *o* $\Delta_2 \neq \mathbf{0}$ *o* $\Delta_3 \neq \mathbf{0}$, entonces el sistema no posee ninguna solución.

6.7.1. Ejercicios resueltos y propuestos

Resueltos

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices,

a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Para el determinante de a) se tiene,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

= (3)(7)-(5)(4)
= 21-20
= 1

Para el determinante de b) se tiene,

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right.$$

= [(2)(-1)(2) + (0)(2)(3) + (0)(1)(4)] - [(3)(-1)(0) + (4)(2)(2) + (2)(1)(0)]
= [-4+0+0] - [0+16+0]
= -20

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante el uso de determinantes,

$$3x - y + 2z = -1$$
$$2x + y - z = 5$$
$$x + 2y + z = 4$$

Para la solución, se organiza el determinante de coeficientes de la siguiente forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicamos el Teorema:
Sea $\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$, los tres cofactores requeridos son:

$$A_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2 c_3 - b_3 c_2)$$

$$B_1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_2 c_3 - a_3 c_2)$$

$$C_1 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

Asi: $\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2)$

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\Delta = 3(1+2) + 1(2+1) + 2(4-1)$$
$\Delta = 18$. Como $\Delta \neq 0$, el sistema presenta una única solución dada por,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad y \quad x = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Luego,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

Por consiguiente, se obtienen los siguientes valores para las variables

$x = \frac{18}{18}, \quad x = \frac{36}{18} \quad y \quad x = \frac{-18}{18}$

$x = 1, \quad x = 2 \quad y \quad x = -1$

Propuestos

1. Calcule los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 24 & -4 \\ 15 & 7 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1/2 & 2 & 0 \\ 3 & 1/3 & 7 \\ 7 & 0 & 3/5 \end{vmatrix}$

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y = 1$

b) $x + y + z = -1$
$2x + 3y - z = 0$
$3x - 2y + z = 4$

c) $2x + y + z = 0$
$x + 2y - z = -6$
$x + 5y + 2z = 0$

d) $2y + 5z = 3$
$4x - 3z = 5$
$3x - 4y + 2z = 12$

BIBLIOGRAFÍA

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales
www.mawil.us

Arya J y Lardner, R. (2002). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Editorial Person, Prentice Hall. México.

Baldor, A. (1982). Álgebra. Editorial Cultural Venezolana, S. A. Caracas, Venezuela.

Batanero, M.; Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1994). Razonamiento combinatorio. Madrid.

Colección ESPARTACO. (2009). Razonamiento Matemático. Lima: Editora Kano.

Dueñez, R. y Arocha G. (1999). Matemática preuniversitaria para ingeniería. Estación de promoción y desarrollo tecnológico. Facultad de Ingenieria. U.C. Venezuela.

Granville, W., Mikesh, J., & Smith, P. (1992). Trigonometría plana y esférica: con tablas trigonométricas. México D.F. Unión Tipográfica Editorial Hispano-americana. Instituto Politécnico Nacional.

Haeussler, E. (2008). Matemáticas para administración y economía. Editorial Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Lehmann, C., García Díaz, R., & Santaló Sors, M. (1980). Geometría Analítica. Editorial Limusa. México, D.F.

Leithold, L. (1994). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México D.F. Oxford University Press.

Leithold, L. (2004). Calculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales. Alfaomega Grupo Editor. Oxford University Press. Impreso en México.

Matemática I. Módulos III y IV. Universidad Nacional Abierta. Registro de publicaciones de la UNA, # UNA-EG-98-0462. Caracas, Venezuela.

Miller, Charles; Heeren, Vern; y Hornsby, John. (1996). Matemática: razonamiento y aplica-ciones. Traducción: Víctor Hugo Ibarra y Javier Enríquez, Editorial Pearson, Décima Edición. Recuperado de: ttps://books.google.com.ec/books?id=uapEWymIU6kC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false.

Santibañez, J. (1994). Elementos del Razonamiento Matemático. Lima: Edición 1998.

Sullivan, M. (1997). Precálculo. Prentice-Hall Hispanoamericana. México D.F.

Stewart, J; Redlin, L. y Watson, S. (2001). Precálculo. International Thompson Editores, S.A de C.V México, D.F.

Swokowski, E. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage Learning. México D.F.

Vargas, E y Vargas, E. (2008). Derivada de una función y aplicaciones. Universidad de Carabobo. Carabobo, Venezuela.

Zill, D. G., & Dewar. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Mc Graw Hill. México, D. F.

1
EDICIÓN

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

MAWIL
Publicaciones Impresas y Digitales

Publicado en Ecuador
Julio del 2019

Edición realizada desde el mes de diciembre del año 2018 hasta marzo del año 2019, en los talleres Editoriales de MAWIL publicaciones impresas y digitales de la ciudad de Quito.

Quito – Ecuador

Crossref

Cámara Ecuatoriana del Libro

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS

Q.F. Anita Dora Medina Bailón MAE.

Ing. Rubén Bernardo Manrique Pincay

CPA. Walter Giovanni Villamar Piguave MAE.

Ec. Eduardo Erasmo Morán Quijije Msc.

Ing. Jorge Enrique Ordoñez García Msc.

Ing. Jesús Mauricio Mora Roca

ISBN: 978-9942-787-63-7

9 789942 787637

CÁMARA ECUATORIANA DEL LIBRO

Crossref

MAWIL Publicaciones Impresas y Digitales

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LOS NEGOCIOS